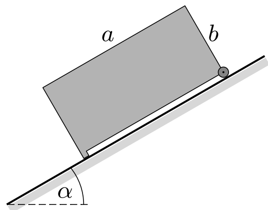
42. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
III. forduló
Megoldások
I. kategória: gimnázium 9. évfolyam

1. feladat. *Az ábrán látható, közelítőleg téglatest alakú, zárt konténer két szomszédos alsó sarka egy-egy könnyen forgó kis kerékkel van ellátva, míg a maradék két alsó saroknál kis lábak találhatóak. A konténer releváns méretei* $a = 3{,}0$ m *és* $b = 1{,}5$ m*, tömegközéppontja pedig a határoló téglatest geometriai középpontjával esik egybe. A konténert* $\alpha = 30°$*-os lejtőre helyezzük. Legalább mekkora tapadási súrlódási együttható esetén maradhat a konténer egyensúlyban, ha az*

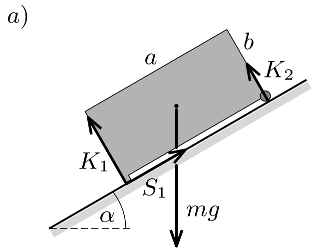


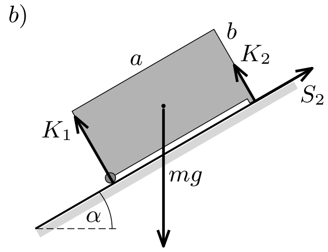
a) kerekekkel felfelé (vagyis az ábrának megfelelően);

b) kerekekkel lefelé

helyezkedik el a lejtőn?

Megoldás. Jelöljük az alsó illeszkedési pontoknál ébredő kényszererők eredőjét K_1-gyel, a súrlódási erők eredőjét ugyanitt S_1-gyel, míg a felső illeszkedési pontoknál a megfelelő erőket jelölje K_2 és S_2. Vegyük észre, hogy a konténerre a kerekeknél csak a lejtőre merőleges irányú erő ébredhet, ellenkező esetben forgatónyomaték hatna a kerekekre, amik forgásba jönnének. Ezért az *a*) esetben $S_2 = 0$, a *b*) esetben pedig $S_1 = 0$.





a) Tekintsük a bal oldali ábrát! A konténer egyensúlyának egyik feltétele, hogy a rá ható erők eredője nulla legyen. Lejtőre merőleges irányban:á

$$K_1 + K_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}mg\,, \tag{1}$$

míg lejtővel párhuzamosan:

$$S_1 = \frac{mg}{2}\,. \tag{2}$$

Az egyensúly másik feltétele, hogy a forgatónyomatékok eredője zérus legyen. Írjuk fel ezt a tömegközéppontra:

$$K_1\frac{a}{2} - K_2\frac{a}{2} - S_1\frac{b}{2} = 0\,. \tag{3}$$

Szorozzuk be a (3) egyenletet $2/a$-val és használjuk fel a (2) egyenletet:

$$K_1 - K_2 = \frac{b}{2a}mg\,.$$

Ezt hozzáadva az (1) egyenlethez meghatározhatjuk a K_1 kényszererőt:

$$K_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}mg + \frac{b}{4a}mg\,.$$

A tapadási súrlódási együttható definíció szerint:

$$\mu_{0,a} \geq \frac{S_1}{K_1}\,,$$

amelybe a korábbi eredményeinket behelyettesítve kapjuk:

$$\mu_{0,a} \geq \frac{2a}{\sqrt{3}a+b} \approx 0{,}90\,.$$

b) Tekintsük most a jobb oldali ábrát! Az erőegyensúlyt lejtőre merőleges irányban továbbra is az (1) egyenlet fejezi ki, lejtővel párhuzamosan azonban most

$$S_2 = \frac{mg}{2}\,. \tag{4}$$

A forgatónyomatékok egyensúlya (a súlypontra vonatkoztatva) így írható:

$$K_1\frac{a}{2} - K_2\frac{a}{2} - S_2\frac{b}{2} = 0\,. \tag{5}$$

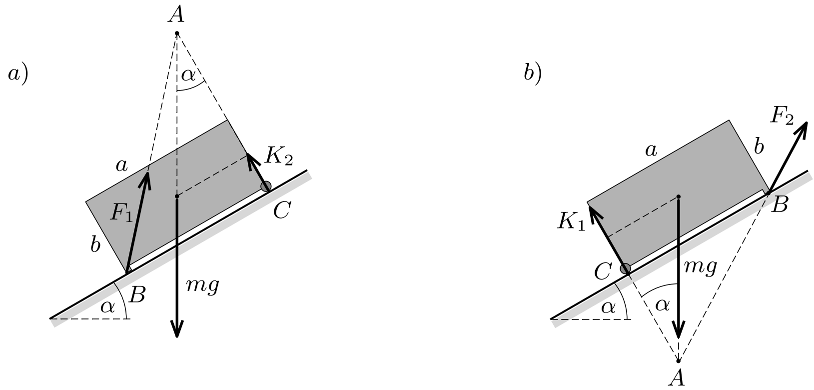
Az (1), (4) és (5) egyenletekből álló rendszer éppen olyan alakú, amilyet az *a*) részben megoldottunk. A fő különbség, hogy most a K_2 kényszererőre van szükségünk:

$$K_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}mg - \frac{b}{4a}mg\,.$$

Ennek segítségével a tapadási súrlódási tényező a *b*) esetben:

$$\mu_{0,b} \geq \frac{2a}{\sqrt{3}a-b} \approx 1{,}62\,.$$

Megjegyzés. A feladat megoldható geometriai úton is. Ha a lejtőtől származó erőt nem bontjuk fel lejtőre merőleges és azzal párhuzamos komponensekre, akkor a konténerre három erő hat: az mg nehézségi erő, a kereknél ható K kényszererő és a lábaknál ható F erő. Ezen három erő hatásvonalának egy pontban kell találkoznia (jelöljük ezt a pontot A-val), ellenkező esetben a forgatónyomatékok eredője nem tűnne el.



Tekintsük az ábrákon látható ABC háromszögeket! A tapadási súrlódási együttható az F erők lejtőirányú és lejtőre merőleges irányú komponenseinek hányadosával van összefüggésben, ez azonban a hasonló háromszögek miatt így írható mindkét esetben:

$$\mu_0 \geq \frac{BC}{AC}\,.$$

A BC szakasz hossza mindkét alkérdésben a-val egyenlő, AC viszont különböző. Ahogy az az ábrákról leolvasható, az *a*) esetben

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{b}{2},$$

míg a *b*) esetben

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{b}{2}.$$

Ezek felhasználásával a tapadási súrlódási tényezőre ugyanazt kapjuk, mint az elsőként ismertetett megoldásban.

2. feladat. *Egy* $M = 3m$ *tömegű,* $h = 0{,}15$ m *magasságú, harang alakú test szabadon csúszhat egy hosszú, vízszintes felületen. A test végei belesimulnak a vízszintes síkba. Kezdetben a test nyugalomban van, és tetején egy m tömegű, kisméretű hasáb található bizonytalan egyensúlyi helyzetben. A kis hasábot az* ábra *szerint jobbra kissé kimozdítjuk eredeti helyzetéből. A kis hasáb a vízszintes felületre érve rugalmasan ütközik egy nagyobb hasábbal, amit mindvégig állandó* u_0 *sebességgel mozgatunk feléje. A súrlódás mindenhol elhanyagolható, minden mozgás az ábra síkjában történik. A kis hasáb a harang alakú testen való mozgása során soha nem válik el attól.*

Legalább mekkora állandó u_0 sebességgel kell mozgatni a nagy hasábot, hogy a kis hasáb az ütközés után áthaladjon a harang alakú testen?

Megoldás. Legyen az m tömegű test sebessége a vízszintes felületre érkezéskor v_1, a harang alakú testé pedig V. Az impulzusmegmaradás így írható:

$$mv_1 - 3mV = 0 \qquad \text{ebből} \qquad v_1 = 3V\,.$$

A súrlódás hiánya miatt alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 3mV^2\,.$$

Ebbe beírva a v_1 és V közötti összefüggést:

$$mgh = \frac{1}{2}m(3V)^2 + \frac{1}{2}\cdot 3mV^2\,.$$

Innen a következő sebességeket kapjuk:

$$V = \sqrt{\frac{gh}{6}} = 0{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{3}{2}gh} = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Most egyelőre ne foglalkozzunk a nagy hasábbal történő ütközés részleteivel, csak tegyük fel azt, hogy az ütközés után a kis hasáb v_2 sebességgel halad a harang alakú test felé. Határozzuk meg, hogy mekkora v_2 érték esetén fogja az m tömegű test utolérni a harang alakú testet, majd éppen feljutni a tetejére, hogy azután egy bizonyos $v_{\text{közös}}$ sebességgel együtt mozogjanak tovább! Vegyük észre, hogy a $v_{\text{közös}}$ sebességgel mozgó (azaz tömegközépponti) vonatkoztatási rendszerben ez a folyamat éppen az imént tárgyalt lecsúszási folyamat fordítottja. A lecsúszás során a kis hasáb és a harang alakú test *egymáshoz viszonyítva* $V + v_1 = 2{,}0$ m/s sebességgel lökődött szét, így a feljutás akkor jön létre, ha a két test ugyanekkora nagyságú relatív sebességgel *közelít* egymáshoz. Mivel a harang alakú test sebessége az újbóli találkozás előtt $V = 0{,}5$ m/s volt, így a kis hasábnak a felülethez viszonyítva $v_2 = V + (V + v_1) = 2{,}5$ m/s-mal kell mozognia az *ábra* szerint balra.

Végül következzen a nagy hasábbal történő ütközés vizsgálata! Gondolatban üljünk bele a nagy hasábbal együttmozgó vonatkoztatási rendszerbe. Itt nyilvánvaló, hogy a kis hasáb ugyanakkora relatív sebességgel közeledik a nagy hasáb felé ütközés előtt, mint amennyivel távolodik attól ütközés után. Az ütközés előtti és utáni relatív sebességek nagyságát egyenlővé téve:

$$v_1 + u_0 = v_2 - u_0\,,$$

ahonnan

$$u_0 = \frac{v_2 - v_1}{2} = 0{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Ekkora tehát határesetben a nagy hasáb sebessége, a keresett u_0 értékének ennél *kicsit* nagyobbnak kell lenni.

Megjegyzések. 1. A paraméteres számolásból látszik, hogy a feladat előírása akkor teljesíthető, ha

$$u_0 > V = \sqrt{\frac{gh}{6}}\,.$$

2. A feladat egyik kulcsa v_2 értékének meghatározása. Ez a fenti furfangos gondolatmenet helyett megmaradási törvények segítségével is megtehető. A kis hasáb és a harang alakú test találkozására alkalmazhatjuk az impulzusmegmaradást:

$$mv_2 + 3mV = 4mv_{\text{közös}}\,,$$

valamint az energiatételt:

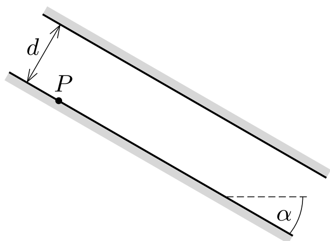
$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\cdot 3mV^2 = \frac{1}{2}\cdot 4mv_{\text{közös}}^2 + mgh\,.$$

Ebből a két sorból v_2-re az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$v_2^2 - 2v_2V + V^2 - \frac{8}{3}gh = 0\,.$$

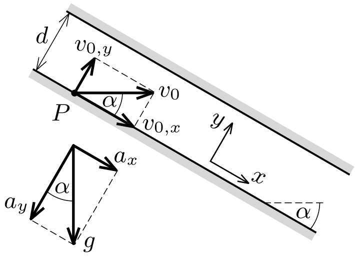
Az adatokat behelyettesítve végül az egyenlet nemtriviális megoldására valóban $v_2 = 2{,}5$ m/s értéket kapunk.

3. feladat. *Egy barlang egyik járatát alulról és felülről két párhuzamos sík határolja, melyek távolsága* $d = 3$ m*, a síkok vízszintessel bezárt szöge pedig* $\alpha = 30°$ *(lásd az ábrát). Az alsó sík egy* P *pontjából szeretnénk egy követ vízszintes kezdősebességgel elrúgni úgy, hogy az a lehető legtávolabb essen vissza erre a síkra, de mozgása során a kő ne ütközzön a felső síkkal. A légellenállást hanyagoljuk el!*



a) Mekkora kezdősebességgel tehető ez meg?

b) Mekkora az elérhető legnagyobb távolság?



Megoldás. *a*) A vízszintesen elhajított kő pályája parabola, amely a kérdéses határesetben éppen érinti a felső ferde síkot. Ennek felismerése után a feladat megoldható többféleképpen, a nehezebb módszer függőleges és vízszintes tengelyű koordináta-rendszer használatán alapul. Könnyebben érhetünk a megoldáshoz, ha ehelyett inkább az *ábrán* látható, a lejtő hajlásához „illeszkedő" koordináta-rendszert használunk. A kő v_0 kezdősebességének és gyorsulásának komponensei ebben a rendszerben:

$$v_{0,x} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0\,, \quad v_{0,y} = \frac{v_0}{2}\,, \quad a_x = \frac{g}{2}\,, \quad a_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}g\,,$$

ahol ügyeltünk az előjelekre, valamint felhasználtuk a speciális $\alpha = 30°$ értéket. Jelölje t_1 azt az időpillanatot, amikor a kő éppen „súrolja" a felső síkot. Ekkor a sebesség y irányú komponense éppen eltűnik:

$$0 = v_{0,y} + a_y t_1 = \frac{v_0}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}g t_1\,,$$

ahonnan

$$t_1 = \frac{v_0}{\sqrt{3}g}\,.$$

Ugyanebben a pillanatban az y irányú elmozdulás d, ezért:

$$d = v_{0,y}t_1 + \frac{1}{2}a_y t_1^2$$

Behelyettesítve $v_{0,y}$, a_y és t_1 korábban felírt alakját:

$$d = \frac{v_0}{2}\frac{v_0}{\sqrt{3}g} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}g}{2}\frac{v_0^2}{3g^2} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{v_0^2}{g}\,.$$

Természetesen ugyanez abból a felismerésből is megkapható, hogy az y irányú átlagsebesség $v_0/4$. Végül átrendezéssel kapjuk a kezdősebesség keresett értékét:

$$v_0 = \sqrt{4\sqrt{3}gd} = 14{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

b) Az elérhető legnagyobb távolság kiszámításához vizsgáljuk az x irányú mozgást! Észrevehetjük, hogy a mozgás teljes időtartama éppen $2t_1$, így ezalatt az elmozdulás x irányban:

$$s_{\max} = v_{0,x}\cdot 2t_1 + \frac{1}{2}a_x\cdot(2t_1)^2\,.$$

A korábban kapott eredményeket behelyettesítve:

$$s_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0\cdot 2\frac{v_0}{\sqrt{3}g} + \frac{1}{2}\cdot\frac{g}{2}\left(2\frac{v_0}{\sqrt{3}g}\right)^2 = \frac{4}{3}\frac{v_0^2}{g}\,.$$

Használjuk fel v_0 kifejezését:

$$s_{\max} = \frac{16}{\sqrt{3}}d = 27{,}7\ \text{m}\,.$$

Megjegyzés. Rövidebben célt érünk, ha a *b*) részben inkább a vízszintes irányú elmozdulást határozzuk meg (ennek értéke $v_0\cdot 2t_1$), majd ezt számoljuk vissza a lejtő mentén mért elmozdulásra:

$$d = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot v_0\cdot 2t_1 = \frac{4}{3}\frac{v_0^2}{g} = \frac{16}{\sqrt{3}}d\,.$$

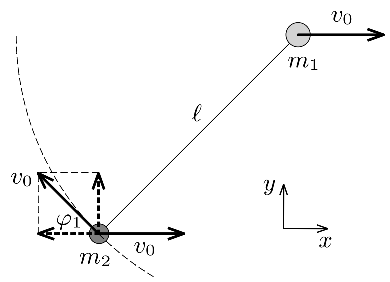
4. feladat. *Vízszintes, súrlódásmentes felületen két pontszerű test található, amelyeket egyenes, $\ell = 0{,}2$ m hosszúságú fonál köt össze. A testek tömege $m_1 = 0{,}3$ kg és $m_2 = 0{,}6$ kg. Az m_1 tömegű testet egy adott pillanatban állandó nagyságú és irányú, $v_0 = 0{,}2$ m/s sebességgel kezdjük húzni, amely sebesség iránya kezdetben a fonálra merőleges.*

a) Mekkora az m_2 tömegű test sebessége akkor, amikor a fonál az eredeti helyzetével $\varphi_1 = 45°$-os szöget zár be?

b) Mekkora erőt fejtünk ki az m_1 tömegű testre akkor, amikor a fonál szögelfordulása $\varphi_2 = 90°$?

c) A fonál $\varphi_2 = 90°$-os elfordulásánál az m_1 tömegű testet elengedjük. Mekkora erő feszíti a fonalat az elengedés utáni pillanatban?

Megoldás. *a)*Az m_2 tömegű test összetett mozgást végez a felülethez képest: az m_1 tömegű testről nézve v_0 nagyságú sebességgel egyenletes körmozgást végez, valamint állandó v_0 sebességgel együtt mozog az m_1 tömegű testtel. E két mozgás szuperpozíciójával határozhatjuk meg a kérdéses pillanatban az m_2 tömegű test sebességét.



Használjuk az *ábrán* látható koordináta-rendszert! Az x, illetve y irányú sebességkomponensek:

$$v_{2,x} = v_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} v_0\,, \qquad v_{2,y} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0\,,$$

ahol felhasználtuk a $\varphi = 45°$ értéket. Az m_2 tömegpont sebességének nagysága a felülethez képest:

$$v_2 = \sqrt{v_{2,x}^2 + v_{2,y}^2}\,.$$

Helyettesítsük be a korábban felírt komponenseket és egyszerűsítsünk! Az eredmény:

$$v_2 = v_0\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0{,}15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

b) Mivel az m_1 tömegű testet állandó sebességgel mozgatjuk, a rá ható erők eredője zérus. Ez azt jelenti, hogy a kezünk által kifejtett húzóerő a fonál által m_1-re kifejtett erővel megegyező nagyságú, de azzal ellentétes irányú. A fonálban ébredő erőt az m_2 tömegű test megfigyelésével határozhatjuk meg. Mivel az m_1 tömegű test állandó sebességgel mozog, a hozzá rögzített rendszer inerciarendszer, amelyben az m_2 tömegű test egyenletes körmozgást végez v_0 sebességgel. Felírva a dinamika alapegyenletét:

$$F_{\text{fonál}} = m_2 \frac{v_0^2}{\ell} = 0{,}12\ \mathrm{N}\,.$$

A fonálerő nagysága a fonál helyzetétől független. Ezek alapján az m_1 tömegre az általunk gyakorolt erő minden pillanatban 0,12 N nagyságú, és a fonál egyenesével egybeesik.

c) Az elengedés után a külső erők eredője zérus, így a tömegközéppont nem gyorsul, tehát a hozzá rögzített rendszer inerciarendszer. Ebben a rendszerben a tömegpontok egyenletes körmozgást végeznek, méghozzá rendre $r_1 = 2\ell/3$, illetve $r_2 = \ell/3$ sugarú pályán. A szögsebesség meghatározásánál felhasználhatjuk, hogy az minden pontra nézve azonos, így például az m_1 tömegű test körüli forgást tekintve:

$$\omega = \frac{v_0}{\ell}\,.$$

Az m_1 tömegű test centripetális gyorsulása:

$$a_{\mathrm{cp},1} = \frac{2\ell}{3} \cdot \omega^2 = \frac{2v_0^2}{3\ell}$$

Ezt a gyorsulást a fonálerő biztosítja, így a fonalat feszítő erő:

$$F'_{\text{fonál}} = m_1 a_{\mathrm{cp},1} = \frac{2m_1 v_0^2}{3\ell} = 0{,}04\ \mathrm{N}\,.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha az m_2 tömegre írjuk fel Newton II. törvényét.

42. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
III. forduló
Megoldások
III. kategória: technikum 9. évfolyam

1. feladat. *Anna megfigyeli, hogy* 8 km/h *sebességű egyenletes futását* 75 cm*-es lépésekkel teszi meg.*

a) Percenként hány lépést tesz meg Anna?

b) Anna szeretne 10 km/h*-ás tempóra fejlődni. A percenkénti lépéseinek számát* 180*-ra tudja csak növelni. Mennyi legyen az új lépéseinek hossza?*

Megoldás. *a*) Induljunk ki a sebesség fogalmából:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{k \cdot \ell}{\Delta t}\,,$$

ahol Δt most 1 perc időtartamot, k a percenkénti lépések számát, ℓ pedig a lépéshosszat jelöli. A fenti összefüggésből könnyen kifejezhető Anna percenkénti lépéseinek száma:

$$k = \frac{v \cdot \Delta t}{\ell} = \frac{\frac{8\,000}{60}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{perc}} \cdot 1\ \mathrm{perc}}{0{,}75\ \mathrm{m}} \approx 178\,.$$

b) Anna új lépéseinek hossza:

$$k = \frac{v \cdot \Delta t}{k} = \frac{\frac{10\,000}{60}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{perc}} \cdot 1\ \mathrm{perc}}{180} \approx 93\ \mathrm{cm}\,.$$

2. feladat. *Képzeljük el, hogy három nagy tömegű, állandó személyzetű űrállomás kering a Föld körül, mindhárom körpályán. Az elsőnek 2 óra, a másodiknak 3 óra, a harmadiknak pedig 4 óra a keringési ideje.*

a) A Föld felszíne felett mekkora magasságban keringenek az űrállomások?

b) A második űrállomás kapitánya meg akarja látogatni a másik kettő közül az egyiket. Azt választja, amelyik úthoz kevésbé kell megváltoztatni az űrállomás energiáját. Kiszámítja mindkét út esetén az energiaváltozást. Hogyan aránylanak egymáshoz ezek a kiszámított mennyiségek?

Adatok: a Föld tömege $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, *a Föld sugara* 6370 km, *az univerzális gravitációs állandó pedig* $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Megoldás. *a*) Az űrállomásokat a gravitációs erő kényszeríti körpályára. Egy m tömegű, r sugarú körpályán mozgó űrállomásra a körmozgás dinamikai feltétele így írható fel:

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m a_{\mathrm{cp}}\,,$$

ahol γ a gravitációs állandó, M a Föld tömege. Látható, hogy az űrállomás tömegével egyszerűsíthetünk. A centripetális gyorsulás kifejezhető a T keringési idővel:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\,.$$

Ezt a két egyenletet összevetve a következő kifejezést kapjuk a pályasugárra:

$$r = \sqrt[3]{\gamma M \frac{T^2}{4\pi^2}}\,.$$

Az ismert adatokat SI-egységekben behelyettesíthetjük, és így a következő pályasugarak adódnak:

$$r_1 = 8\,070\ \mathrm{km}\,, \qquad r_2 = 10\,570\ \mathrm{km}\,, \qquad r_3 = 12\,810\ \mathrm{km}\,.$$

Tehát a felszíntől mért magasságok rendre: 1700 km, 4200 km és 6440 km.

b) A tömegvonzás hatására r sugarú körpályán mozgó űrállomás teljes mechanikai energiája:

$$E_{\text{mech.}} = E_{\text{pot.}} + E_{\text{mozg.}} = -\gamma\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

ahol v a körmozgás sebessége. Ez utóbbi a körmozgás dinamikai feltételében is megjelenik:

$$\gamma\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}\,,$$

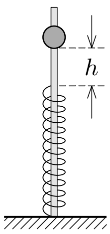
amelynek felhasználásával a mechanikai energia így írható:

$$E_{\text{mech.}} = -\gamma\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{r} = -\gamma\frac{mM}{2r}\,.$$

A pályamódosítás során bekövetkező energiaváltozás tehát csak a pályasugaraktól függ:

$$\frac{\Delta E_{2\to1}}{\Delta E_{2\to3}} = \frac{\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}}{\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_3}} = \frac{r_1 - r_2}{r_3 - r_2}\frac{r_3}{r_1} = -1{,}77\,.$$

Tehát a távolabbi (1-es számú) űrállomás meglátogatásához szükséges kisebb energiaváltoztatás.



3. feladat. *Egy* 50 *gramm tömegű, átfúrt golyó súrlódásmentesen mozoghat az* ábrán *látható függőleges rúdon. Ha a golyót óvatosan a rúdra felfűzött rugóra engedjük, akkor az* 4 cm-*t nyomódik össze.*

a) *A rugó felső végétől mekkora h magasságból kell elengedni a golyót, hogy a rugó legnagyobb összenyomódása* 12 cm *legyen?*

b) *Mekkora az a*) *feladatbeli mozgás során a golyó legnagyobb sebessége? Hol következik ez be?*

Megoldás. *a*) Az óvatosan a rugóra engedett golyó egyensúlyba kerül, azaz a rá ható nehézségi erő és a rugóerő kioltják egymást:

$$mg = Dx_1\,,$$

ahol m a golyó tömege, D a rugóállandó, továbbá $x_1 = 4$ cm. Ebből a rugóállandó meghatározható:

$$D = \frac{mg}{x_1} = 12{,}5\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\,.$$

A h magasságból leejtett golyó a rugót $x_2 = 12$ cm-rel nyomja össze. Vegyük fel a potenciális energia nullszintjét a golyó legalsó helyzetében, és alkalmazzuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét a két szélső helyzetre:

$$mg(h + x_2) = \frac{1}{2}Dx_2^2\,.$$

Ebből h kifejezhető:

$$h = \frac{D}{2mg}x_2^2 - x_2\,.$$

Használjuk fel a korábban D-re kapott paraméteres eredményt:

$$h = \frac{x_2^2}{2x_1} - x_2 = 6\ \text{cm}\,.$$

b) A golyó az elengedést követően lefelé gyorsul, azaz sebessége növekszik. Az egyensúlyi helyzeten áthaladás után a gyorsulásának iránya felfelé mutat, sebessége innentől csökken egészen az alsó szélső helyzetig. A sebesség tehát éppen az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor maximális, azaz $x_1 = 4$ cm-es összenyomódásnál.

Hogy mekkora ez a legnagyobb sebesség, az szintén az energiatételből határozható meg:

$$mg(h + x_1) = \frac{1}{2}Dx_1^2 + \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

A rugóállandó paraméteres kifejezését felhasználva, majd rendezve a következőt kapjuk:

$$v_{\max} = \sqrt{g(2h + x_1)} = 1{,}26\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

4. feladat. Egy $L = 1{,}8$ m hosszú, egyenes deszkát $\alpha = 30°$ hajlásszögű helyzetében rögzítünk, majd a deszkára pontszerűnek tekinthető kis testet helyezünk. Azt tapasztaljuk, hogy ekkor a kis test állandó sebességgel csúszik lefelé a deszkán.

a) Mekkora a csúszási súrlódási együttható a kis test és a deszka között?

b) Mennyi idő alatt csúszik végig ugyanezen a deszkán a kezdősebesség nélkül elengedett kis test, ha a hajlásszöget $\beta = 60°$-ra állítjuk be?

Megoldás. *a*) Jelöljük a csúszási súrlódási tényezőt μ-vel, a test tömegét pedig m-mel! A deszkára merőleges irányban a test nem gyorsul, ezért a kényszererő:

$$K = \frac{\sqrt{3}}{2} mg\,.$$

A dinamika alapegyenlete a deszkával párhuzamos irányban:

$$\frac{mg}{2} - \mu K = ma\,,$$

ahol az a gyorsulás most a feladat feltétele miatt nulla. E két egyenletből μ kifejezhető:

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58\,.$$

b) Ebben az esetben is hasonló egyenletek írhatók fel, a nehézségi erő merőleges vetületei azonban most a $\beta = 60°$-os hajlásszg miatt eltérőek lesznek:

$$K = \frac{mg}{2}\,, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} mg - \mu K = ma\,.$$

Innen a gyorsulás meghatározható μ korábbi értékének felhasználásával:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} g - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{g}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} g\,.$$

Mivel nincs kezdősebesség, használhatjuk a négyzetes úttörvényt:

$$L = \frac{1}{2} a t^2\,,$$

melyből a mozgás idejét meghatározhatjuk:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}L}{g}} = 0{,}79 \text{ s}\,.$$