Javítási útmutató

43. MIKOLA SÁNDOR FIZIKAVERSENY

DÖNTŐ - GIMNÁZIUM 10. OSZTÁLY (II. kat.)

PÉCS 2024

1.

A hasáb esetén munka az erőtörvény linearitása miatt egyszerűen meghatározható:

$$W_{hasáb} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{v}}\frac{V_t}{2}gR = \frac{1}{4}\rho_{\mathrm{v}}\,V_t\,g\,R$$

A munka a gömb esetén a víz és a test helyzeti energiájának a változásából is számolható (ezek összege):

$$\Delta E_{\text{gömb}} = -\,V_{\mathrm{g}}\,\rho_{\mathrm{t}}\,g\,R = -\,V_{\mathrm{g}}\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{v}}\,g\,R,$$

$$\Delta E_{\text{víz}} = \frac{V_{\mathrm{g}}}{2}\rho_{\mathrm{v}}\,g\,\frac{5}{8}R + \frac{V_{\mathrm{g}}}{2}\,\rho_{\mathrm{v}}\,g\,R.$$

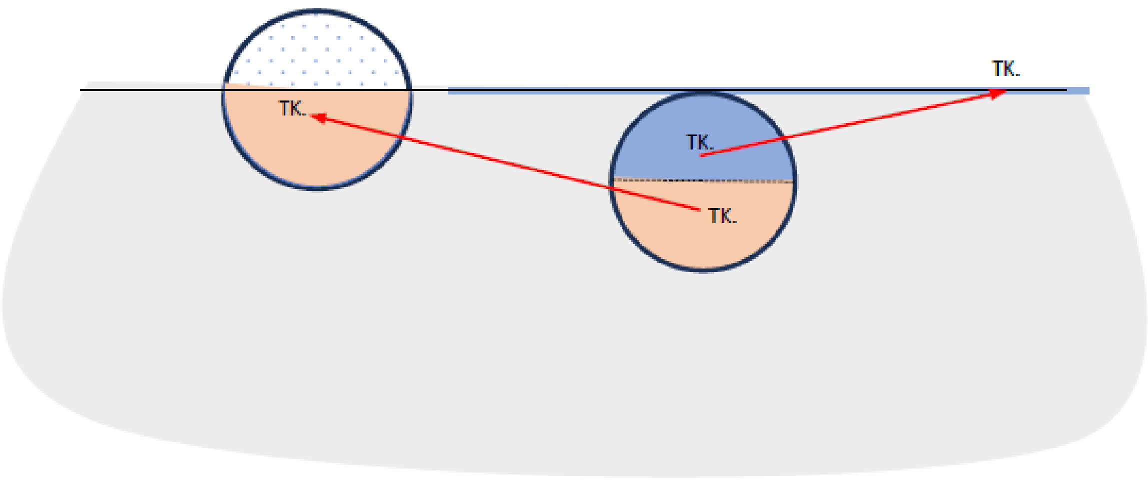
A lenyomás után a gömb felső fele a térfogatának megfelelő vizet szorít ki a tó felszínére, miközben a tömegközéppont $(5/8)\cdot R$ értékkel emelkedik. Ezt fejezi ki a második egyenlet első tagja. A második tag a gömb alsó fele által kiszorított vizet írja le, amely az első állapotban bemerülő félgömb helyére kerül.

Tehát:

$$W_{\text{gömb}} = \Delta E_{\text{gömb}} + \Delta E_{\text{víz}} = \frac{5}{16}\mathrm{V}_{\mathrm{g}}\,\rho_{\mathrm{v}}\,g\,R.$$

A két munka hányadosa:

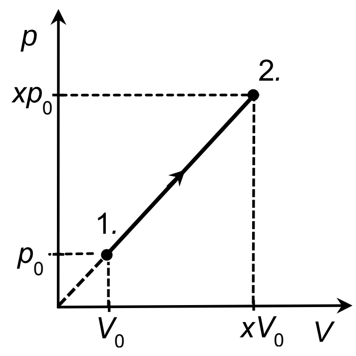
$$\frac{\boldsymbol{W}_{\textbf{gömb}}}{\boldsymbol{W}_{\textbf{hasáb}}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}\,\mathbf{4} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\,.$$



Megjegyzés: A feladat integrálszámítással is megoldható.

2.

a) Vezessük be az ábrán látható jelöléseket!



A gáz által végzett munka:

$$W_{12}^* = \frac{p_0 + xp_0}{2} \cdot (xV_0 - V_0) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 1)p_0V_0.$$

A felvett hő a termodinamika első főtétele alapján:

$$Q = E_2 - E_1 + W_{12}^*,$$

$$Q = \frac{5}{2} \cdot (x^2p_0V_0 - p_0V_0) + \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 1)p_0V_0,$$

$$Q = 3 \cdot (x^2 - 1)p_0V_0.$$

Ezekből:

$$\frac{Q}{W_{12}^*} = 6,$$

$$\boxed{Q = 6W_{12}^* = 4800 \text{ J.}}$$

A belső energia növekedése:

$$\boxed{E_2 - E_1 = Q - W_{12}^* = 5W_{12}^* = 4000 \text{ J.}}$$

b) Legyen az oxigén hőmérséklete az 1. állapotban T_1, a 2. állapotban T_2! Keressük a hőmennyiséget a:

$$Q = cm(T_2 - T_1)$$

alakban!

Az egyesített gáztörvényből:

$$\frac{p_0V_0}{T_1} = \frac{x^2p_0V_0}{T_2},$$

$$x^2 = \frac{T_2}{T_1}.$$

Az állapotegyenletből:

$$p_0V_0 = \frac{m}{M}RT_1.$$

Ezeket a

$$Q = 3 \cdot (x^2 - 1)p_0V_0$$

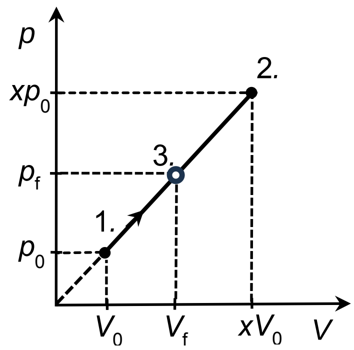
összefüggésbe beírva:

$$Q = 3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\frac{m}{M}RT_1,$$

$$Q = 3\frac{R}{M}m(T_2 - T_1).$$

Az oxigén fajhője állandó erre a folyamatra:

$$\boxed{c = 3\frac{R}{M} = 779{,}4\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg.\,C^o}}.}$$



c) A kérdéses közbenső 3. állapotban a gáz nyomása és térfogata az eddigi jelölésekkel:

$$p_f = \frac{1+x}{2}p_0, \quad V_f = \frac{1+x}{2}V_0.$$

A feltételek szerint:

$$W_{12}^* = 800\ \mathrm{J} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)p_0V_0,$$

$$W_{13}^* = 300\ \mathrm{J} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 - 1\right)p_0V_0 = \frac{1}{8}(x^2 + 2x - 3)p_0V_0.$$

A két munka osztásából:

$$\frac{8}{3} = \frac{4(x^2 - 1)p_0V_0}{(x^2 + 2x - 3)p_0V_0}.$$

Ebből:

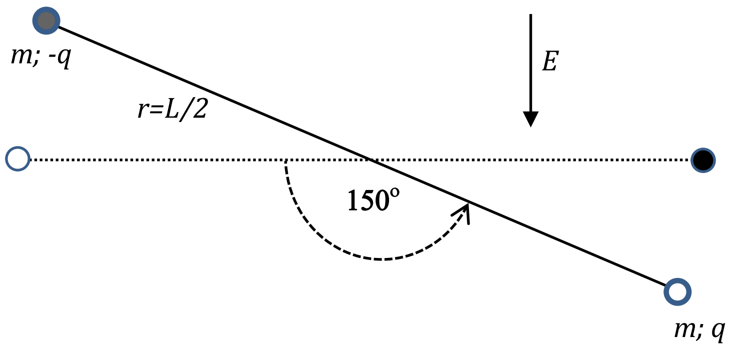
$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$\boxed{x = 3.}$$

A gáz térfogata, így a nyomása is háromszorosára növekedett.

3.

Az ábra felülnézetben mutatja az elforduló pálcát!



a) A pálcára ható erők eredője nulla, forgatónyomatékuk eredője viszont nem, ezért a pálca (nem egyenletesen) változó forgómozgásba kezd. A mozgás először gyorsuló, majd lassuló. Amikor a sebesség ismét nulla, a munkatétel alapján (α_r radiánban értendő, a hangsúly kedvéért):

$$2Eqr\sin\alpha - 2\mu mgr\alpha_r = 0$$

$$\mu = \frac{Eq\sin\alpha}{mg\alpha_r}$$

$$\boldsymbol{\mu = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}\pi} = \frac{3}{5\pi} \approx 0,191}$$

b) A testek sebessége akkor maximális, amikor az elektrosztatikus erő érintő irányú összetevője egyenlő a súrlódási erővel:

$$Eq\cos\beta = \mu mg$$

$$\cos\beta = \frac{\mu mg}{Eq} = \mu = 0{,}191$$

$$\boldsymbol{\beta = 79°}$$

c) A maximális sebesség a munkatételből számítható:

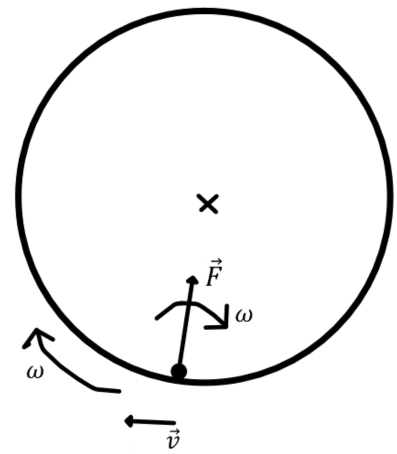
$$2 \cdot \frac{1}{2} mv^2 = 2Eqr\sin\beta - 2\mu mgr\beta_r$$

$$v^2 = \frac{2r}{m}(Eq\sin\beta - \mu mgr\beta_r)$$

$$v = \sqrt{2r\left(\frac{Eq\sin\beta}{m} - \mu g\beta_r\right)} = \sqrt{0{,}2 \cdot (9{,}816 - 2{,}633)} = \mathbf{1,2\ \frac{m}{s}}$$

4.

Induljunk ki az egyenletes körmozgásból, mivel ebben az esetben az állandó nagyságú erővektor állandó (ω) szögsebességgel körbe forog. A mozgás történjen az ábra szerint az óramutató járásának irányában, *F* forgása szintén.



Ismert:

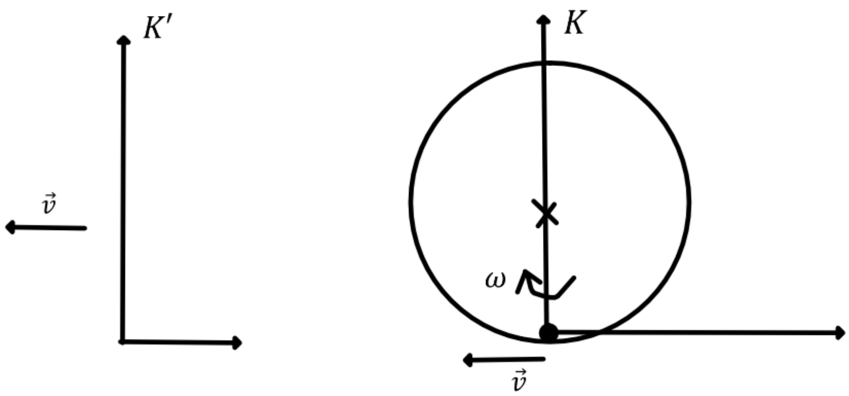
$$F = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

ahonnan

$$r = \frac{FT^2}{4\pi^2 m}$$

A kerületi sebesség:

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r = \frac{FT}{2\pi m}$$



E körmozgás történjék a *K* laboratóriumi rendszerben. A feladat szövege szerint *t* = 0-ban a test áll, ami a *K*-ban egyenletesen körmozgó test esetén nem teljesül. Ezért tekintsünk egy az *ábra* szerinti, *K*-ban *v* sebességgel *jobbról balra* mozgó *K*' inerciarendszert, melyben *t* = 0-ban igaz az, hogy a test sebessége zérus. *K*'-ben (lévén, hogy inerciarendszer) az erő változatlan: állandó ω szögsebességgel forog körbe.

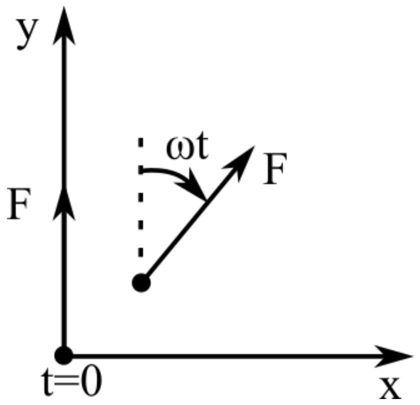
K’-ből szemlélve a mozgás egy *r* sugarú tisztán gördülő kerék (*t* = 0-ban a talajjal érintkező) kerületi pontjának a mozgása. E pont a T/2 időpillanatban éri el a (tetőponthoz tartozó) maximális $v_{max} = 2v$ sebességét, ahol

$$\boldsymbol{v_{max} = \frac{FT}{\pi m}}$$

A tömegpont elmozdulása *T* idő alatt:

$$\boldsymbol{\Delta r = vT = 2r\pi = \frac{FT^2}{2\pi m}}$$

Megjegyzés: A feladat integrálszámítással is megoldható:



$$ma_x = F \cdot \sin(\omega t)$$
$$ma_y = F \cdot \cos(\omega t)$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$v_x = \int_0^t a_x dt' = \int_0^t a \cdot \sin(\omega t')\, dt' = \frac{a}{\omega}(1 - \cos(\omega t))$$
$$v_y = \int_0^t a_y dt' = \int_0^t a \cdot \cos(\omega t')\, dt' = \frac{a}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{a^2}{\omega^2}[(1 - \cos(\omega t))^2 + sin^2(\omega t)] = \frac{2a^2}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t))$$

A sebesség(négyzet) maximális, ha $\cos(\omega t) = -1$, $\omega t = \pi$, $t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$

$$\boldsymbol{v_{max} = \sqrt{\frac{4a^2}{\omega^2}} = \frac{2a}{\omega} = \frac{2F}{m\frac{2\pi}{T}} = \frac{FT}{\pi m}}$$
$$x = \int_0^t v_x dt' = \int_0^t \frac{a}{\omega}(1 - \cos(\omega t'))dt' = \frac{a}{\omega}t - \frac{a}{\omega^2}\sin(\omega t)$$
$$y = \int_0^t v_y dt' = \int_0^t \frac{a}{\omega}\sin(\omega t')\, dt' = -\frac{a}{\omega^2}\cos(\omega t)$$
$$\Delta x = x(T) = \frac{a}{\omega}T = \frac{F}{m} \cdot \frac{T^2}{2\pi}$$
$$\Delta y = y(T) = 0$$
$$x(0) = 0, y(0) = 0$$
$$\boldsymbol{\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x = \frac{FT^2}{2\pi m}}$$

Javítási útmutató

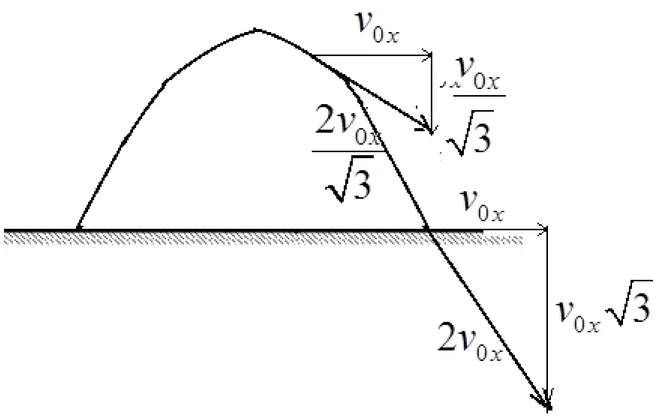
43. MIKOLA SÁNDOR FIZIKAVERSENY

DÖNTŐ - TECHNIKUM 10. OSZTÁLY (IV. kat.)

PÉCS 2024

1.

a.) Legyen a kezdősebesség v_0, ennek állandó nagyságú vízszintes komponense v_{0x}. A sebesség függőleges komponensének nagysága a megadott 1 s alatt egyrészt a félszabályos háromszögek miatt a $\frac{v_{0x}}{\sqrt{3}}$-ról $v_{0x}\sqrt{3}$-ra növekedett, másrészt a g-vel való gyorsulás miatt gt-vel növekedett, ezért



$$v_{0x}\sqrt{3} - \frac{v_{0x}}{\sqrt{3}} = gt,$$

ebből

$$\boldsymbol{v_{0x} = \frac{1}{2}gt\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot \sqrt{3} \cdot 1\,\frac{m}{s} = 8,5\,\frac{m}{s}}$$

Szimmetria okokból a kezdősebesség is $2v_{0x} = 17\,\frac{m}{s}$.

b.) A kő annyi ideig emelkedik, amíg egyenletes ütemben függőleges sebesség összetevője nullára nem csökken, vagyis

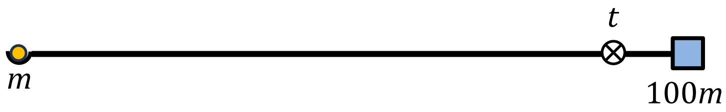
$$\boldsymbol{t_{em} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_{0x}\sqrt{3}}{g} = \frac{\frac{1}{2}gt\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{g} = 1,5\ s}$$

c.) A kő annyi időn át süllyedt, mint amennyi időn keresztül emelkedett. Így maximális vízszintes irányú elmozdulásának nagysága

$$\boldsymbol{x_{max} = 2t_{em}v_{0x} = 2\frac{3}{2}t\frac{1}{2}gt\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 9,81 \cdot 1\ m = 25,5\ m}$$

d.) Tehát a kő repülésének ideje 3 s.

2.



Adatok: $l = 0{,}9\ \text{m}, L = 0{,}1\ \text{m}, \frac{m}{M} = 0{,}01$.

a) Jelölje v és u a lövedék és a nehezék sebességét a rúd függőleges helyzetében. A mechanikai energia megmaradása miatt:

$$MgL - mgl = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

A rúdvégek szögsebessége minden pillanatban megegyezik, ezért:

$$u = \frac{L}{l}v$$

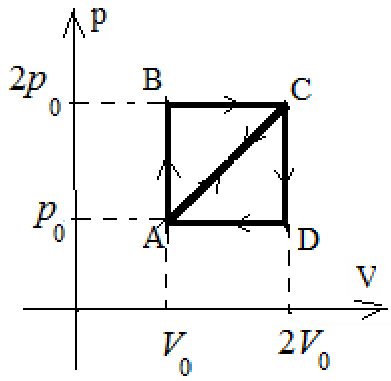
Behelyettesítés és átalakítások után:

$$MgL - mgl = \frac{1}{2}M\left(\frac{L}{l}v\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2g\frac{L - \frac{m}{M}l}{\left(\frac{L}{l}\right)^2 + \frac{m}{M}}} \approx 9\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}}.$$

b) A keresett arány:

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2} = \frac{mv^2}{M\left(\frac{L}{l}v\right)^2 + mv^2} = \frac{\frac{m}{M}}{\left(\frac{L}{l}\right)^2 + \frac{m}{M}} \approx \boldsymbol{0,45}.$$



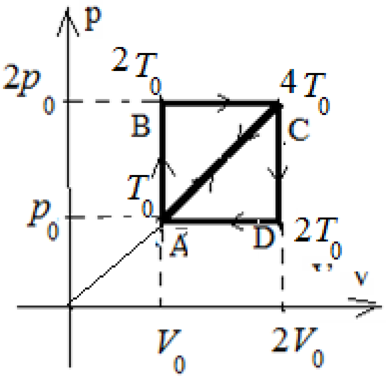
3.

Legyen a gáz hőmérséklete az A állapotban T_0, vagyis az állapotegyenlet alapján a szokásos jelölésekkel

$$p_0V_0 = nRT_0.$$

A feladat szövegéből adódik, hogy B és D állapotokban a hőmérséklet $2T_0$, C-ben pedig $4T_0$.

Nézzük először az ABCA körfolyamatot. A gáz munkája (számértékben) megegyezik az ABC háromszög területével (számértékben), vagyis



$$W_g = \frac{1}{2}p_0V_0 = \frac{1}{2}nRT_0$$

Az AB izokor, és a BC izobár folyamatokban van hőfelvétel, melyek az első főtétel szerint

$$Q_V = \Delta E = \frac{f}{2}nR\Delta T = \frac{f}{2}nRT_0,$$

$$Q_p = \Delta E + W_{gp} = \frac{f}{2}nR\Delta T + 2p_0V_0 = \frac{f}{2}nR \cdot 2T_0 + 2nRT_0 = (f+2)nRT_0.$$

A CA folyamat két állapotában is azonos a $\frac{p}{V}$ arány, továbbá a folyamat képe egyenes szakasz lévén, az AC szakasz meghosszabbítása átmegy az origón. A folyamat minden állapotára igaz, hogy a nyomás és a térfogat egymással egyenesen arányos. A CA folyamatban a gáz hőmérséklete, és így belső energiája folyamatosan csökken, a környezet végez rajta (pozitív) munkát, vagyis a gáz folyamatosan hőt ad le.

Tehát az ABCA folyamatban a hatásfok

$$\eta_1 = \frac{W_g}{Q_{fel}} = \frac{\frac{1}{2}nRT_0}{\frac{f}{2}nRT_0 + (f+2)nRT_0} = \frac{1}{f+2(f+2)} = \frac{1}{3f+4}.$$

A másik körfolyamatban a háromszögek területének egyenlősége miatt a gáz munkája azonos az első bélivel, vagyis

$$W_g = \frac{1}{2}p_0V_0 = \frac{1}{2}nRT_0.$$

Az izokor és az izobár folyamatokban a gáz hűl, nem vesz fel hőt, viszont az előzőekben mondottak alapján az AC folyamatban egyfolytában. Ennek nagysága az első főtételt is figyelembe véve

$$Q_f = \Delta E + W_g = \frac{f}{2}nR\Delta T + \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{f}{2}nR \cdot 3T_0 + \frac{3}{2}nRT_0 = \frac{3(f+1)}{2}nRT_0.$$

Ezzel a második körfolyamat hatásfoka

$$\eta_2 = \frac{W_g}{Q_f} = \frac{\frac{1}{2}nRT_0}{\frac{3(f+1)}{2}nRT_0} = \frac{1}{3(f+1)}.$$

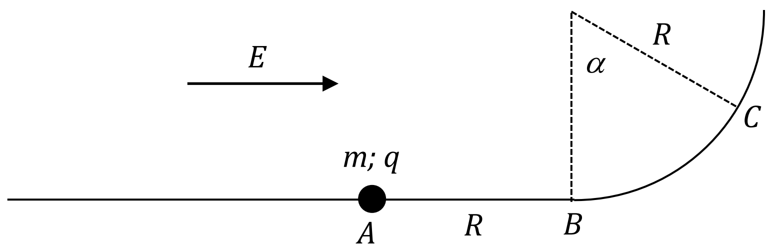
Vagyis az első körfolyamat (termodinamikai) hatásfoka a másodikénak

$$\boldsymbol{\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{3(f+1)}{3f+4} = \frac{3(3+1)}{3 \cdot 3 + 4} = \frac{12}{13} = 0{,}923 - \textbf{szerese}}$$

Itt felhasználtuk, hogy a hélium szabadsági foka három.

4.

Adatok: m = 10 g, $E = 10^4$ N/C, α = 60°.



a) A munkatételt alkalmazva:

$$qER(1+\sin\alpha) = mgR(1-\cos\alpha)$$

$$\boldsymbol{q = \frac{mg}{E}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = 2,68\ \mu\mathrm{C}}$$

b) Jelölje most x az AB távolságot. Ha a gyöngy eljut a körív legfelső pontjáig, akkor:

$$qE(x+R) \geq mgR$$

$$\boldsymbol{x \geq R\left(\frac{mg}{qE}-1\right) = 2,73R}$$

c) A gyöngy addig gyorsul, amíg a körív alakú szakaszon a nehézségi erő és az elektrosztatikus erő érintő irányú összetevője egyenlő nem lesz. Utána lassul, mert a nehézségi erő érintő irányú összetevője nő, az elektrosztatikus erőé csökken. Jellemezze ezt a helyzetet a β szög:

$$mg\sin\beta = qE\cos\beta$$

$$\boldsymbol{\mathrm{tg}\beta = \frac{qE}{mg}}$$

(Az a) feladatrészben kapott összefüggést felhasználva ez így is írható: $\mathrm{tg}\beta = \frac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.)

$$\boldsymbol{\beta = 15°}$$

d) A legnagyobb sebesség ismét a munkatétel alapján határozható meg:

$$qER(1+\sin\beta) = mgR(1-\cos\beta) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2R\left(\frac{qE}{m}(1+\sin\beta) - g(1-\cos\beta)\right)}$$

$$\boldsymbol{v = 1,1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$