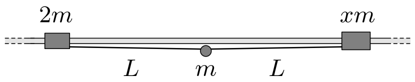
43. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
Döntő, 2024. május 5.
I. kategória: gimnázium 9. évfolyam

1. feladat. *Vízszintes, rögzített rúdon súrlódásmentesen csúszhat két átfúrt test. A bal oldali test tömege $2m$, a jobb oldalié xm, ahol x értéke ismeretlen. A két testet egy $2L = 70$ cm hosszúságú, elhanyagolható tömegű fonállal összekötjük, melynek közepéhez egy m tömegű, kis méretű testet erősítünk. Kezdetben a rúdon csúszó testek $2L$ távolságra vannak egymástól. Ebben a helyzetben a fonálhoz erősített, m tömegű testet elengedjük. A rúdon csúszó testek ütközéséig a $2m$ tömegű test $7L/6$ hosszúságú utat tesz meg. A fonalak nem lazulnak meg.*



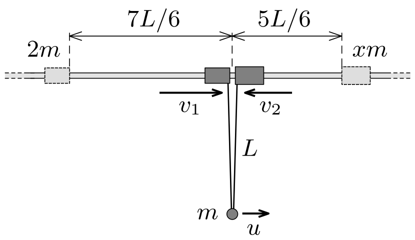
a) Határozzuk meg x értékét!

b) Mekkora sebességgel ütköznek össze az átfúrt testek?

Megoldás. *a*) Az ütközés előtti állapotot a mellékelt *ábra* mutatja. Látható, hogy ha a bal oldali test elmozdulása az ütközésig $7L/6$, akkor a jobb oldalié $-5L/6$, az alsó test helyzete pedig vízszintesen $L/6$ távolsággal tolódik el. Mivel a pontrendszerre vízszintes irányban nem hat erő, a tömegközéppont vízszintesen nem mozdul el, ezért

$$2m\frac{7L}{6} - xm\frac{5L}{6} + m\frac{L}{6} = 0\,,$$

amiből az $x = 3$ eredmény adódik. A jobb oldali test tömege tehát $3m$.



b) Az ütközés előtti pillanatban az alsó, m tömegű test függőleges sebességkomponense eltűnik. Jelöljük ennek vízszintes sebességét u-val, a bal és jobb oldali csúszó testek sebessége pedig legyen rendre v_1 és v_2 az *ábra* szerint! A rendszer teljes impulzusa vízszintes irányban megmarad:

(1) $$2mv_1 + mu - 3mv_2 = 0\,.$$

Üljünk bele gondolatban az alsó test u sebességével vízszintesen mozgó vonatkoztatási rendszerbe! Innen nézve a két csúszó test a geometria miatt azonos nagyságú, de ellentétes irányú sebességgel mozog, ezért felírhatjuk:

(2) $$v_1 - u = v_2 + u\,, \qquad \text{ahonnan} \qquad u = \frac{v_1 - v_2}{2}\,.$$

Az (1) és (2) egyenletekből:

(3) $$v_2 = \frac{5}{7}v_1\,, \qquad u = \frac{1}{7}v_1\,.$$

Hátravan még annak felhasználása, hogy disszipatív erők nem hatnak a rendszerre, ezért a mechanikai energia megmarad:

$$mgL = \frac{1}{2}2mv_1^2 + \frac{1}{2}3mv_2^2 + \frac{1}{2}mu^2\,.$$

Felhasználva a (3) kifejezéseket:

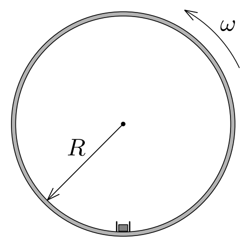
$$2gL = 2v_1^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 v_1^2 + \left(\frac{1}{7}\right) v_1^2\,.$$

Rendezés után kapjuk:

$$v_1 = \sqrt{\frac{49}{87}\,gL} = 1{,}40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\,, \qquad v_2 = \frac{5}{7}v_1 = \sqrt{\frac{25}{87}\,gL} = 1{,}00\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Bár a feladat nem kérdezte, de az m tömegű test sebessége $u = v_1/7 = 0{,}20$ m/s.

2. feladat. *Egy centrifuga egy vízszintes tengelyű, $R =$ 40 cm belső sugarú hengeres dobból áll, amelyet egy motor állandó fordulatszámmal képes forgatni. A dobba egy kis testet helyezünk, amit a dob belső felületéhez rögzített kis, súrlódásmentes falakkal oldalról megtámasztunk (lásd az ábrát).*



a) Legalább mekkora ω_0 szögsebességgel kell forognia a centrifugának, hogy a kis test ne váljon el a dob falától?

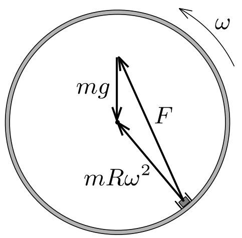
b) Vektoros ábra segítségével szerkesszük meg a dob által a kis testre kifejtett eredő erő irányát egy általános helyzetben, ha $\omega > \omega_0$!

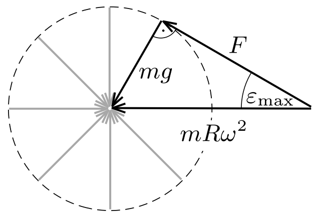
c) Legalább mekkora a tapadási súrlódási együttható a dob fala és a kis test között, ha a test $\omega > \sqrt{2g/R}$ szögsebességeknél a támaszfalak eltávolítása esetén sem csúszik meg a dob belsejében?

Megoldás. *a*) Határesetben a legfelső helyzetben éppen nem válik el a dob falától, azaz itt a nyomóerő nullává válik. Ez azt jelenti, hogy az mg nehézségi erő tartja a testet körpályán:

$$mg = mR\omega_0^2\,, \qquad \text{ahonnan} \qquad \omega_0 = \sqrt{g/R} = 5\ \text{s}^{-1}\,.$$

b) A kis testre a függőlegesen lefelé mutató mg nehézségi erő és a dob által kifejtett F eredő erő hat. Ezek hatására a test mindvégig a forgástengely irányába gyorsul $R\omega^2$ gyorsulással. A dinamika alapegyenletének segítségével az F erő iránya a bal oldali *ábra* szerint megszerkeszthető.





c) Amint az a *b*) rész vektoros ábrájáról leolvasható, a test különböző helyzeteiben a dob által kifejtett F eredő erő más-más nagyságú ε szöget zár be a felület adott pontbeli normálisával (azaz a sugáriránnyal). A megcsúszás akkor kerülhető el, ha még az előforduló legnagyobb ε szög esetén is teljesül a tapadás $S/N \leq \mu$ feltétele, ahol S és N rendre az F erő tangenciális és sugárirányú komponensei.

Rögzítsük most gondolatban a testre ható, $mR\omega^2$ nagyságú eredő erő irányát, és vizsgáljuk meg, milyen irányokba mutathat F, miközben az mg nehézségi erő a dob egy fordulata alatt az eredő erő irányához képest körbeforog (lásd a jobb oldali *ábrát*). Látható, hogy az ε szög akkor maximális, amikor F hatásvonala érinti a nehézségi erő talppontja által kirajzolt kört. Mivel az érintő és az érintési pontba húzott sugár egymásra merőleges, továbbá a megcsúszás határán $mR\omega^2 = 2mg$, így a jobb oldali *ábrán* egy olyan derékszögű háromszög keletkezik, melynek átfogója kétszerese a rövidebb befogónak. Ebből következik, hogy az ε szög maximális nagysága egy körülfordulás során 30°.

Számítsuk ki ebben a megcsúszáshoz közeli helyzetben az S tapadási súrlódási erőt és az N nyomóerőt! Az $\varepsilon_{\max} = 30°$ szögérték miatt F sugár- és érintőirányú komponensei így számolhatók:

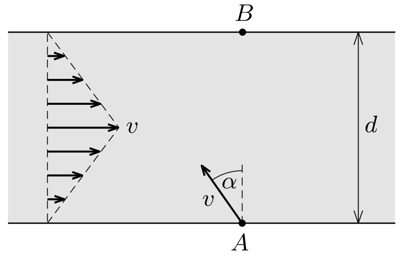
$$S = \frac{F}{2}, \qquad N = \frac{\sqrt{3}}{2}F,$$

amiből a tapadási súrlódási együtthatóra vonatkozó feltétel:

$$\mu \geq \frac{S}{N} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577\,.$$

Megjegyzés. Könnyen abba a hibába eshetünk, hogy feltételezzük, a megcsúszás határa abban a helyzetben következik be, amikor a test a tengellyel azonos magasságba kerül, hiszen ilyenkor a mozgás fenntartásához szükséges S súrlódási erő maximális, nagyságát tekintve éppen mg. Ez azért nem igaz, mert nem S, hanem az S/N hányados maximális értékét kell vizsgálni. A fenti megoldásból kiderül, hogy a test akkor kerül legközelebb a megcsúszáshoz, amikor a hozzá húzott sugár a függőlegessel 60°-os szöget zár be.

3. feladat. *Egyenes, $d = 50$ méter szélességű folyószakasz egyik partjának A pontjából a szemben lévő part felé indul egy csónakos. A víz sodrási sebessége aparttól mért távolsággal egyenes arányban növekszik a folyó középvonaláig, ahol értéke $v = 2$ m/s, majd innen a túlsó parthoz közeledve szimmetrikusan nullára csökken (lásd az* ábrát*). A csónakos mindvégig egyenletesen evez úgy, hogy állóvízben szintén v sebességgel haladna.*



a) Az A ponttal szemközti B ponttól milyen távol ér partot a csónakos, ha végig a sodrásra merőleges irányban evez ($\alpha = 0°$)?

b) Milyen alakú pályán mozog a csónakos? Készítsünk vázlatos rajzot!

c) Milyen (állandó) irányban kellene a csónakosnak eveznie, hogy éppen a B pontban érjen partot? Adjuk meg az ehhez tartozó α szög értékét!

Megoldás. *a*) Válasszunk olyan koordinátarendszert, melynek x tengelye az evezéssel egyirányú, míg y tengelye sodrásirányú és egybeesik a kiindulási partvonallal! Amíg $x \leq d/2$, a csónakos parthoz viszonyított sebességkomponensei:

$$v_x = v\,, \qquad v_y = \frac{2x}{d}v\,,$$

hiszen $x = d/2$ esetén $v_y = v$. Mivel az x irányú sebesség állandó, $x = vt$, azaz

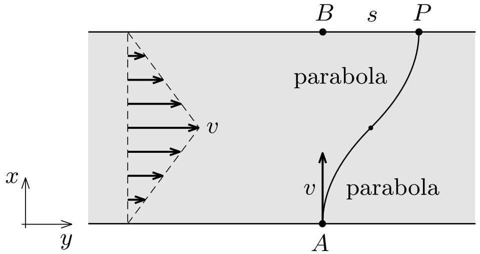
$$v_y = \frac{2v^2}{d}t\,. \tag{*}$$

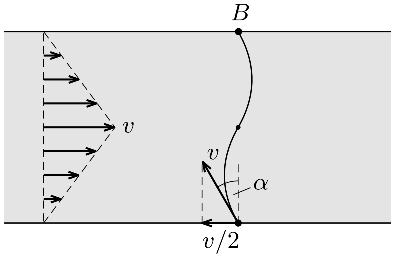
Ez a sebességkomponens időben egyenletesen növekszik, míg $x > d/2$ esetén egyenletesen csökken, ezért az egész átkelésre vonatkozóan számolhatunk a $v/2$ átlagos sodródási sebességgel.

Az átkelés teljes ideje $T = d/v$, eközben a lefelé sodródás távolsága a B ponthoz képest

$$s = \frac{vT}{2} = d/2 = 25 \text{ m}\,.$$

b) Észrevehetjük, hogy a ($*$) formula éppen olyan alakú, mint egy zérus kezdősebességű, $a = 2v^2/d$ gyorsulású mozgás sebesség-idő függvénye. Emiatt a pályagörbe a folyó középvonaláig parabolaív, akárcsak vízszintes hajítás esetén. Az $x > d/2$ tartományban a csónakos gyorsulása előjelet vált, ezért a pálya egy olyan parabolaívben folytatódik, amely a pálya első felére nézve középpontosan szimmetrikus (lásd a bal oldali *ábrát*).



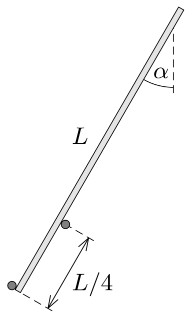


c) Most is elmondható, hogy az x irányú sebesség állandó, emiatt az y irányú sebességkomponens időben lineárisan változik. Mivel a folyón lefelé sodródás átlagsebessége $v/2$, az evezés sebességének úgy kell állnia, hogy a vízhez viszonyított y irányú sebességkomponens ugyanekkora, de ellentétes irányú legyen (ahogy az a jobb oldali *ábrán* látható). Ebből következik, hogy a keresett α szög értéke 30°.

4. feladat. *A falból kiálló két vízszintes szögre egy homogén tömegeloszlású, $L = 100$ cm hosszúságú, vékony rudat fektetünk az* ábrán *látható módon. A rúd a függőlegessel $\alpha = 30°$-os szöget zár be, a szögek távolsága $L/4$. A csúszási és tapadási súrlódási együttható a szögek és a rúd között egyaránt μ.*

a) Legalább mekkora μ esetén maradhat a rúd egyensúlyban?

b) Ha $\mu = 0{,}5$, akkor a rúd a szögek között lecsúszik. Mekkora a rúd sebessége abban a pillanatban, amikor elválik az alsó szögtől? (Mozgása során a rúd csak a szögekkel érintkezik.)



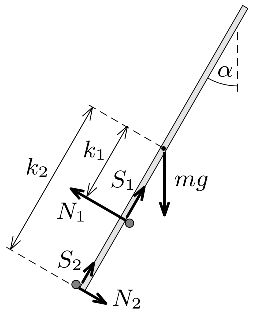
Megoldás. A rúdra az mg nehézségi erő, a szögeknél pedig a rúdra merőleges irányú N_1 és N_2 nyomóerők, valamint a rúddal párhuzamos S_1 és S_2 súrlódási erők hatnak. Mivel a rúd szöggyorsulása nulla, a rá ható az eredő forgatónyomaték a tömegközéppontra nézve nulla:

$$N_1 k_1 - N_2 k_2 = 0\,,$$

ahol k_1 és k_2 rendre az N_1 és N_2 erők karjai (lásd az *ábrát*). Felhasználtuk, hogy a rúd vékony, ezért a súrlódási erők forgatónyomatéka a középpontra tekintve nulla.

A rúdra merőleges irányban a tömegközéppont nem gyorsul, így az ilyen irányú erők eredője is zérus:

$$N_1 - N_2 - \frac{mg}{2} = 0\,.$$



A fenti két egyenletből a nyomóerők kifejezhetők:

$$(*) \qquad N_1 = \frac{k_2}{k_2 - k_1}\frac{mg}{2}\,, \qquad N_2 = \frac{k_1}{k_2 - k_1}\frac{mg}{2}\,.$$

Vegyük észre, hogy ezek az egyenletek mind az *a*), mind pedig a *b*) kérdésben fennálló esetben érvényesek.

a) Egyensúlyi helyzetben az erőkarok hossza $k_1 = L/4$ és $k_2 = L/2$, így a szögek nyomóereje:

$$N_1 = mg\,, \qquad N_2 = \frac{mg}{2}\,.$$

Az egyensúly feltétele szerint a rúddal párhuzamos irányú erők eredője is zérus kell, hogy legyen:

$$S_1 + S_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}mg = 0\,.$$

A tapadási súrlódás erőtörvénye szerint $S_1 \le \mu N_1$ és $S_2 \le \mu N_2$, ezért

$$\mu(N_1 + N_2) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}mg\,.$$

A bal oldalra helyettesítsük be a nyomóerőkre kapott ($*$) kifejezéseket! Ekkor egyszerűsítés és rendezés után a súrlódási együtthatóra a következőt kapjuk:

$$\mu \ge \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577\,.$$

b) Látjuk tehát, hogy $\mu = 0{,}5$ esetén a rúd valóban megcsúszik. Számítsuk ki a mozgó rúdra ható súrlódási erőket a tömegközéppont x elmozdulásának függvényében! Ekkor az erőkarok $k_1 = L/4 - x$ és $k_2 = L/2 - x$, így ($*$) alapján a nyomóerők:

$$N_1 = \left(1 - \frac{2x}{L}\right)mg\,, \qquad N_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2x}{L}\right)mg\,.$$

Látszik, hogy a rúd az alsó szögtől akkor válik el ($N_2 = 0$), amikor elmozdulása $x = L/4$. Fejezzük ki a rúdra ható eredő erőt (ami a rúddal párhuzamos irányú):

$$F_{\text{eredő}} = \frac{\sqrt{3}}{2}mg - S_1 - S_2\,.$$

A csúszás miatt most a súrlódás erőtörvényében egyenlőség van: $S_{1,2} = \mu N_{1,2}$. Ezt és a nyomóerőkre kapott összefüggéseket felhasználva, rendezés után kapjuk:

$$F_{\text{eredő}} = \frac{\sqrt{3}}{2}mg - \frac{3}{2}\mu mg + \frac{4x}{L}\mu mg\,.$$

Ez lineárisan növekszik x függvényében, ezért munkája számolható úgy, mintha mindvégig a kezdeti ($x = 0$) és végső ($x = L/4$) értékének az átlaga hatna:

$$W_{\text{eredő}} = \overline{F_{\text{eredő}}} \cdot \frac{L}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} mg - \mu mg \right) \frac{L}{4} \,.$$

A munkatétel szerint az eredő erő munkája egyenlő a rúd mozgási energiájának megváltozásával:

$$W_{\text{eredő}} = \frac{1}{2} m v^2 - 0 \,.$$

A munkára kapott kifejezés felhasználásával a keresett sebesség rövid rendezés után meghatározható:

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{3} - 2\mu}{4} g L} = 1{,}35 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \,.$$

43. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
Döntő, 2024. május 5.
III. kat.: akik ebben a tanévben kezdtek fizikát tanulni a technikumban

1. feladat. *András és Béla állandó nagyságú sebességgel fut a Pécs melletti Tüskésréti,* 1200 *méter hosszú futókörön. Ha egymással szemben futnak, akkor* 3,6 *percenként találkoznak. Ha egyirányban futnak, akkor András* 18 *percenként halad el Béla mellett.*

a) Mekkora sebességgel futnak a fiatalok?

b) Ha egyszerre indulnak ugyanarról a helyről és azonos irányban futnak, akkor hány kör megtétele után körözi le András Bélát?

Megoldás. Legyen $L = 1200$ m $= 1{,}2$ km, $t_1 = 3{,}6$ perc $= 0{,}06$ óra és $t_2 = 18$ perc $= 0{,}3$ óra. Jelölje v_A, illetve v_B rendre András és Béla sebességét.

a) Ha egymással szemben futnak, akkor két találkozás között ketten együtt a futókör hosszát teszik meg, azaz

(1) $$v_\mathrm{A}t_1 + v_\mathrm{B}t_1 = L.$$

Ha azonos irányban futnak, akkor két utolérés között András a futókör hosszával több utat tesz meg, tehát

(2) $$v_\mathrm{A}t_2 = L + v_\mathrm{B}t_2.$$

Szorozzuk meg az (1) egyenletet t_2-vel, a (2) egyenletet pedig t_1-gyel, és az így kapott egyenleteket adjuk össze. Ebből kapjuk, hogy

$$2v_\mathrm{A}t_1t_2 = L(t_1 + t_2),$$

vagyis András sebessége:

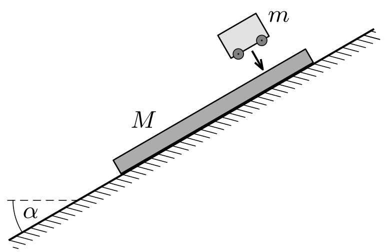
$$v_\mathrm{A} = \frac{L(t_1 + t_2)}{2t_1t_2} = 12\ \mathrm{km/h}.$$

Ennek ismeretében Béla sebességét például az (1) egyenletből kaphatjuk meg:

$$v_\mathrm{B} = \frac{L}{t_1} - v_\mathrm{A} = 8\ \mathrm{km/h}.$$

b) Mivel ebben az esetben András t_2 idő alatt éri utol Bélát, így András ezalatt $v_\mathrm{A}t_2 = 3{,}6$ km utat tesz meg. Ez $3{,}6/1{,}2 = 3$ kör megtételét jelenti.

2. feladat. *A rögzített, $\alpha = 30°$ hajlásszögű, hosszú lejtőn egy $M = 5$ kg tömegű deszka csúszik. A deszka és lejtő közötti súrlódási tényező $\mu = 0{,}5$.*



a) Mekkora a deszka gyorsulása?

b) Óvatosan a deszkára helyezünk egy m tömegű, könnyen gördülő kiskocsit. Hogyan válasszuk meg m értékét, hogy a kiskocsi deszkára helyezése után a deszka állandó sebességgel csússzon a lejtőn?

Megoldás. *a*) A lejtőn lecsúszó deszkát a lejtő irányában az Mg nehézségi erő lejtő irányú komponense és az S csúszási súrlódási erő eredője gyorsítja. A 30°-os lejtő esetében a nehézségi erő ezen komponense éppen fele a nehézségi erőnek, azaz

$$\frac{Mg}{2} - S = Ma.$$

Lejtőre merőleges irányban a deszka nem mozdul el, ezért a lejtőtől származó N nyomóerő a deszkára ható nehézségi erő lejtőre merőleges irányú komponensével egyezik meg. Pitagorasz tétele alapján a nehézségi erő ezen komponense $Mg\sqrt{3}/2$, így

$$N = Mg\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Továbbá a csúszási súrlódási erő és a nyomóerő közötti kapcsolat:

$$S = \mu N$$

Az utolsó két egyenletet az elsőben felhasználva adódik a deszka gyorsulása:

$$a = g\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}67\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) A kiskocsi a deszkán elkezd lefelé gördülni, azonban a deszka és a kocsi közötti súrlódás elhanyagolható (könnyen gördülő kiskocsi). Viszont a lejtőre merőleges irányban a kiskocsi erőt fejt ki a deszkára, melynek értéke a kiskocsira ható nehézségi erő lejtőre merőleges komponensével egyezik meg, ami $mg\,\sqrt{3}/2$. Tehát a deszkára ható súrlódási erő

$$S' = \mu(M + m)g\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vagyis ebben az esetben a deszka nagyobb erővel nyomja a lejtőt, ezáltal nagyobb súrlódási erő hat a deszkára, aminek hatására a deszka állandó sebességgel csúszik a lejtőn:

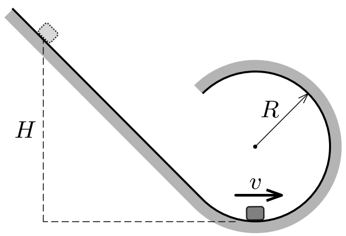
$$\frac{Mg}{2} - S' = 0.$$

A két egyenlet összevetéséből a kiskocsi tömegére az

$$m = M \cdot \left(\frac{1}{\mu\sqrt{3}} - 1\right) = 0{,}77 \text{ kg}$$

eredményt kapjuk.

3. feladat. *Egyenes lejtő törésmentesen csatlakozik egy $R = 1$ m sugarú, körív alakú részhez (lásd az ábrát). A lejtőn a körív legmélyebb pontjához képest $H = 2$ m magasságból kezdősebesség nélkül lecsúszik egy pontszerű, $m = 0{,}1$ kg tömegű test. A súrlódás elhanyagolható.*



a) Mekkora v sebességgel ér a kis test a körív legalsó pontjába?

b) Mekkora erővel nyomja a legalsó pontban a kis test a körívet?

c) Legalább mekkorának válasszuk H értékét, hogy a kis test elérje a körív legmagasabb pontját is?

Megoldás. *a*) Mivel a súrlódás elhanyagolható, alkalmazhatjuk a mechanikaienergia-megmaradás törvényét. A H magasságból lecsúszó test helyzeti energiája a körív legalsó pontjára érve mozgási energiává alakul, azaz

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2,$$

vagyis a test sebessége a kérdéses helyen $v = \sqrt{2gH} = 6{,}3$ m/s.

b) A test ebben helyzetben már körpályán halad, ezért

$$N - mg = ma_{\text{cp}} = m\frac{v^2}{R},$$

ahol N a körív által a testre kifejtett nyomóerő. A test ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányú erőt fejt ki a körívre. Tehát ennek az erőnek a nagysága:

$$N = mg + \frac{mv^2}{R} = mg + \frac{m \cdot 2gH}{R}.$$

A feladat adatai szerint $H = 2R$, így a nyomóerő nagysága $N = 5mg = 5$ N.

c) Legyen a test sebessége a legfelső pontban v_1. Ahhoz, hogy a test elérje a körpálya legfelső pontját, az kell, hogy a pálya által a testre ható nyomóerő végig pozitív legyen, határesetben éppen legfelül váljon nullává. Mivel ekkor még a test körpályán halad, így a centripetális gyorsulást már csak a nehézségi erő okozza:

$$mg = m\frac{v_1^2}{R}.$$

Ezt a sebességet a mechanikai energiamegmaradásból határozhatjuk meg, amit a kérdéses H magasan lévő indítási pont és a körív felső pontja közötti helyzetekre írunk fel:

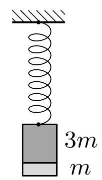
$$mgH = mg\ 2R + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Innen $v_1^2 = 2g(H - 2R)$ adódik. Másrészt az első egyenlet szerint $v_1^2 = gR$, ezért

$$2(H - 2R) = R,$$

amiből $H = 5R/2 = 2{,}5$ m. Legalább ilyen magasságból kell a testet elindítani, hogy az eljusson a körív legfelső pontjába.

4. feladat *Egy $3m$ és egy m tömegű hasábot egymáshoz ragasztunk, majd a rendszert rugóra függesztjük az ábra szerint. Egyensúlyi állapotban a rugó megnyúlása 12 cm. Egyszercsak a ragasztó elenged, és az alsó, m tömegű hasáb leesik, a $3m$ tömegű pedig rezegni kezd.*



a) A ragasztó elengedése utáni pillanatban mekkora gyorsulással indul el a $3m$ tömegű test?

b) Eredeti helyzetéhez képest milyen magasra emelkedik mozgása során a $3m$ tömegű test?

c) Mekkora a rezgő test legnagyobb sebessége?

Megoldás. A rugóban ébredő erő, amikor még mindkét test rajta függ $4mg$. Ennek hatására a megnyúlása $y = 12$ cm. Ezekkel kifejezhetjük a rugó rugóállandóját:

$$D = \frac{4mg}{y}.$$

a) Az alsó test leválása utáni pillanatban a rugó megnyúlása még nem változik meg, ezért a rugóerő ugyanúgy $4mg$, tehát a $3m$ tömegű testre:

$$4mg - mg = 3ma,$$

ahonnan a test kezdeti gyorsulása $a = g/3 = 3{,}3\ \mathrm{m/s^2}$. Iránya függőlegesen felfelé mutat.

b) A $3m$ tömegű test mozgására alkalmazhatjuk a mechanikaienergia-megmaradás törvényét. Az indulás pillanatában csak rugalmas energia van, a legmagasabb helyzetében pedig rugalmas és helyzeti energia. Ha a test a kezdeti helyzetéhez képest h magasságba jut el, akkor a rugó megnyúlása $y-h$ lesz (feltesszük, hogy a rugó még ekkor is nyújtva van).

$$\frac{1}{2}Dy^2 = 3mgh + \frac{1}{2}D(y-h)^2.$$

Elvégezve a négyzetre emelést:

$$0 = 3mgh + \frac{1}{2}Dh^2 - Dyh.$$

Ebből kifejezhetjük h-t: $h = \frac{2mg}{D}$. D fenti alakjával a $h = y/2 = 6$ cm magasságot kapjuk.

c) A test abban a helyzetben éri el a maximális sebességét, amikor gyorsulása nullává válik, azaz amikor az egyensúlyi helyzetén halad át. Ebben a helyzetben a rugó megnyúlása:

$$3mg = Dy_1 = 4mg\frac{y_1}{y} \quad\rightarrow\quad y_1 = \frac{3}{4}y = 9\ \text{cm}.$$

A mechanikaienergia-megmaradást a kezdeti és a maximális sebességű helyzetek között felírva:

$$\frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}\,3mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}Dy_1^2 + 3mg(y-y_1).$$

Ismét helyettesítsük be D kifejezését:

$$\frac{1}{2}\,4mgy = \frac{3}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}\,4mg\frac{y_1^2}{y} + 3mg(y-y_1).$$

Egyszerűsítve, majd felhasználva y_1 ismert értékét:

$$2gy = \frac{3}{2}v_{\max}^2 + \frac{9}{8}gy + \frac{3}{4}gy,$$

ahonnan a maximális sebesség:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{gy}{12}} = 0{,}32\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$