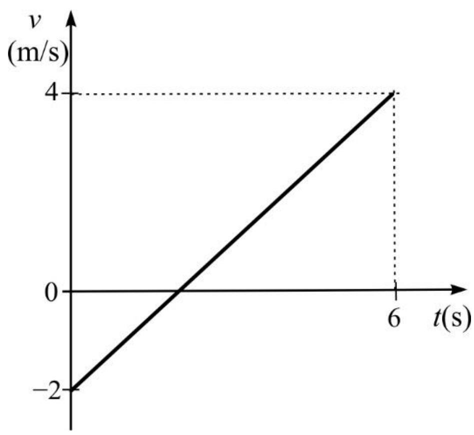
# 43. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
# I. forduló feladatainak megoldása
# I. kategória (gimnázium 9. évfolyam)

*A feladatok helyes megoldása maximálisan 10 pontot ér. A javító tanár belátása szerint a 10 pont az itt megadottól eltérő formában is felosztható. Egy-egy feladatra adott második megoldás vagy a probléma általánosítása nem honorálható további pontokkal. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldás természetesen értékelendő. Számolási hibáért – az érettségi dolgozatok javításánál megszokott módon – a (rész)pontszám 25%-ánál többet ne vonjunk le.* ***A továbbjutás feltétele legalább 25 pont elérése!***

**1.** a) A test gyorsulása az első hat másodpercben:




$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(-2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{6\ \mathrm{s}} = \mathbf{1\,\frac{m}{s^2}}.$$

**2 pont**

b) A test elmozdulása az első hat másodpercben:

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{a}{2}(\Delta t)^2.$$

Az értékeket behelyettesítve:

$$\Delta x = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6\ \mathrm{s} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 36\ \mathrm{s}^2 = \mathbf{6\ m}.$$

Tehát a test már az *x* tengely pozitív tartományán van. **3 pont**

c) Az út meghatározásához szükséges a fordulás időpontjának meghatározása:

$$0 = v_0 + a \cdot \Delta t = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \Delta t.$$

$$\Delta t = 2\ \mathrm{s}.$$

Az idő kiszámolása az ábrán felfedezhető hasonló háromszögek segítségével is történhet. Jelöljük *t*-vel a fordulás időpontját:

$$\frac{2}{t} = \frac{4}{6-t} \quad \rightarrow \quad t = 2\ \mathrm{s}.$$

**3 pont**

Az előzőeket felhasználva:

$$\Delta x_1 = v_0 \Delta t + \frac{a}{2}(\Delta t)^2.$$

A kiszámolt időt behelyettesítve:

$$\Delta x_1 = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\ \mathrm{s} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\ \mathrm{s}^2 = -2\ \mathrm{m}.$$

Így már az út meghatározható:

$$s = 2 \cdot |\Delta x_1| + \Delta x = 2 \cdot |-2|\ \mathrm{m} + 6\ \mathrm{m} = \mathbf{10\ m.}$$

Az út kiszámítása történhet az ábrán található háromszögek területének meghatározásával is:

$$s = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} = \mathbf{10\ m}.$$

**2 pont**

$\boxed{2.}$ Adatok: $s_1 = 3{,}45\ \mathrm{m},\ s_2 = 6{,}25\ \mathrm{m},\ v_0 = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ \frac{s_\mathrm{u}}{s_\mathrm{e}} = \frac{4}{3}$.

a) Alkalmazzuk a szabadesésre vonatkozó út-idő összefüggést a lőrés tetejére és aljára:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = 0{,}831\ \mathrm{s} \quad \text{és} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2s_2}{g}} = 1{,}118\ \mathrm{s}.$$

**2 pont**

A test átlagsebessége a lőrés előtt:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \mathbf{9{,}76\ \frac{m}{s}}.$$

**2 pont**

b) Az utolsó másodpercben megtett út a feltétel alapján:

$$s_\mathrm{u} = \frac{4}{3}s_\mathrm{e} = \frac{4}{3}\cdot\left(v_0\cdot t_\mathrm{e} + \frac{g}{2}t_\mathrm{e}^2\right) = \frac{4}{3}\cdot 15\ \mathrm{m} = 20\ \mathrm{m}.$$

Az utolsó másodpercben megtett út az út-idő összefüggés alapján ($v_\mathrm{u}$ a pillanatnyi sebesség az utolsó másodperc elején):

$$s_\mathrm{u} = v_\mathrm{u}\cdot t_\mathrm{u} + \frac{g}{2}t_\mathrm{u}^2 = v_\mathrm{u}\cdot 1\ \mathrm{s} + 5\ \mathrm{m}.$$

A két egyenlet alapján:

$$v_\mathrm{u} = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

**3 pont**

Az utolsó másodperc előtt eltelt idő:

$$\Delta t = \frac{v_\mathrm{u} - v_0}{g} = 0{,}5\ \mathrm{s}.$$

A hajítás teljes ideje és magassága pedig:

$$t = \Delta t + t_\mathrm{u} = 1{,}5\ \mathrm{s} \quad \text{és} \quad h = v_0\cdot t + \frac{g}{2}t^2 = \mathbf{26{,}25\ m}.$$

**3 pont**

$\boxed{3.}$ Adatok: $v_\mathrm{p0} = 3{,}45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ v_\mathrm{p} = 12{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ v_\mathrm{k0} = 7{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ v_\mathrm{k} = 12{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

A vízszintesen elhajított labda sebessége akkor a legkisebb, amikor elindítjuk, tehát a sebesség minimális értéke a hajítás kezdősebessége. A piros labda esetén: $v_\mathrm{p0} = 3{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, ami a labda mozgása során a vízszintes $v_\mathrm{px}$ sebességkomponense.

**1 pont**

A sebessége akkor lesz a legnagyobb, amikor a talajra ér. Ekkor a sebességét a $v_\mathrm{py}$ függőleges és a $v_\mathrm{px}$ vízszintes sebességkomponensekből Pitagorasz-tétellel kaphatjuk meg:

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{v_\mathrm{px}^2 + v_\mathrm{py}^2} \qquad \rightarrow \qquad v_\mathrm{py} = \sqrt{v_\mathrm{p}^2 - v_\mathrm{px}^2} = 12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

**2 pont**

A mozgás $t_\mathrm{p} = \frac{v_\mathrm{py}}{g} = 1{,}2\ \mathrm{s}$ ideig tartott, ezalatt $h_\mathrm{p} = \frac{g}{2} t_\mathrm{p}^2 = \mathbf{7{,}2\ m}$-t zuhant a piros labda, vízszintesen $d_\mathrm{p} = v_\mathrm{px} \cdot t_\mathrm{p} = \mathbf{4{,}2\ m}$-t tett meg.

**3 pont**

A kék labda esetén is elvégezhetjük a számításokat:

$$v_\mathrm{kx} = 7{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad v_\mathrm{ky} = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad t_\mathrm{k} = 1\ \mathrm{s}\,, \ \ h_\mathrm{k} = \mathbf{5\ m}\,, \ \ d_\mathrm{k} = \mathbf{7{,}5\ m}.$$

**3 pont**

**Tehát a piros labdát dobták el magasabbról, és a kék labda repült messzebbre**.

**1 pont**

**4.** Adatok: $m = 100\ \mathrm{kg},\ R = 6400\ \mathrm{km},\ T = 24\ \mathrm{h} = 86400\ \mathrm{s}.$

a) *Első megoldás*: Egy test súlya a test által az alátámasztásra vagy felfüggesztésre ható erő. A súlyerő ellenerejét, a *T* tartóerőt esetünkben az erőmérő fejti ki a testre. A két erő abszolút értéke tehát egyenlő.

**2 pont**

A sarkokon a testre ható $F_\mathrm{grav}$ gravitációs erő és a *T* tartóerő vektori összege nulla, mert ott nem számít a Föld forgása, ott nem gyorsul a test. Tehát a sarkokon ugyanannyit mutatna az erőmérő, ha megállna a Föld forgása.

**2 pont**

Az Egyenlítőn viszont a lefelé mutató $F_\mathrm{grav}$ gravitációs erő abszolút értéke nagyobb, mint a felfelé mutató *T* tartóerő nagysága, mert a kettő eredője szolgáltatja a test tömegének és gyorsulásának szorzatát (amit szerencsétlen elnevezéssel centripetális erőnek szoktak hívni), és ami a Föld középpontja felé mutat. Ha megszűnne a Föld forgása, akkor a tartóerő nagyobb lenne, és így az erőmérő is többet mutatna.

**2 pont**

*Második megoldás:* A rugós erőmérőre függesztett test súlya egyenlő nagyságú a rá ható nehézségi erővel. A Föld mint forgó rendszer valamely pontján a nehézségi erő a gravitációs erő és a forgás miatt fellépő tehetetlenségi (más néven centrifugális) erő eredője.

**(2 pont)**

Mivel a pólusokon nem lép fel centrifugális erő, ezért az erőmérő által mutatott érték ugyanaz maradna, ha semmi más nem változna, csak megszűnne a Föld tengely körüli forgása.

**(2 pont)**

Az Egyenlítőn a centrifugális erő ellentétes irányú a gravitációs erővel. Ezért, ha megszűnne a Föld tengely körüli forgása, akkor a nehézségi erő és emiatt a súly is megnövekedne.

**(2 pont)**

b) *Első megoldás*: Az eltérés a fentiek alapján éppen a centripetális erő nagyságával egyenlő:

$$\Delta F = mR\omega^2 = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 100\ \mathrm{kg} \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \cdot \left(\frac{2\pi}{86400\ \mathrm{s}}\right)^2 = \mathbf{3{,}4\ N.}$$

**Az erőmérő 3,4 N-nal mutatna többet az Egyenlítőn.** **4 pont**

*Második megoldás*: Forgó rendszerben gondolkodva, az eltérés az Egyenlítőn egyenlő a testre ható centrifugális erővel:

$$\Delta F = mR\omega^2 = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 100\ \mathrm{kg} \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \cdot \left(\frac{2\pi}{86400\ \mathrm{s}}\right)^2 = \mathbf{3{,}4\ N.}$$

**Az erőmérő 3,4 N-nal mutatna többet az Egyenlítőn.** **(4 pont)**

*Megjegyzés:* A Földön a Nap delelésétől deleléséig telik el átlagosan 24 óra, és ezalatt a Föld (a Nap körüli keringése miatt) nem 360°-ot, hanem jó közelítéssel 361°-ot fordul el az állócsillagokhoz képest. Ezért a Föld (sziderikus) forgásideje kissé kevesebb, mint 24 óra, mégpedig 23,9344699 óra. Szigorúan véve ezzel a forgásidővel kellene számolnunk, ami csekély eltérést okozna az eredményben.

5. Adatok: $M = 19{,}1$ kg, $m = 9{,}55$ kg, $s = 5$ m, $t = 4$ s.

a) A lendület-megmaradás törvényét az első kőtől való elrugaszkodásra és a másodikra történő érkezésre alkalmazva (előjelezés nélkül):

$$mv = Mu_1 \quad \text{és} \quad mv = (m+M)u_2.$$

ahol $v$ a kutya, $u_1$ és $u_2$ a kövek sebességét jelöli (a talajhoz képest). **4 pont**

Behelyettesítve:

$$Mu_1 = (m+M)u_2 \quad \rightarrow \quad u_1 = \frac{m+M}{M}u_2.$$

**1 pont**

A két kő egymáshoz viszonyított sebessége:

$$u_1 + u_2 = \frac{s}{t} = 1{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

**1 pont**

$u_1$ kiküszöbölésével a következőt kapjuk:

$$\frac{m+M}{M}u_2 + u_2 = \frac{s}{t},$$

$$u_2 = \frac{M}{m+2M} \cdot \frac{s}{t} = \mathbf{0{,}5\ \frac{m}{s}}.$$

**2 pont**

Visszahelyettesítve:

$$u_1 = \frac{m+M}{m+2M} \cdot \frac{s}{t} = \mathbf{0{,}75\ \frac{m}{s}}.$$

**1 pont**

b) A kutya jéghez viszonyított sebessége az ugrás közben:

$$v = \frac{M}{m}u_1 = \mathbf{1{,}5\ \frac{m}{s}}.$$

**1 pont**

# 43. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
# I. forduló feladatainak megoldása
# II. kategória (gimnázium 10. évfolyam)

*A feladatok helyes megoldása maximálisan 10 pontot ér. A javító tanár belátása szerint a 10 pont az itt megadottól eltérő formában is felosztható. Egy-egy feladatra adott második megoldás vagy a probléma általánosítása nem honorálható további pontokkal. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldás természetesen értékelendő. Számolási hibáért – az érettségi dolgozatok javításánál megszokott módon – a (rész)pontszám 25%-ánál többet ne vonjunk le.* ***A továbbjutás feltétele legalább 25 pont elérése!***

**1.** Adatok: $v_0 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Függőleges hajításkor a maximális emelkedési magasság:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = 20\ \mathrm{m}.$$

**2 pont**

A test pillanatnyi magassága tetszőleges *t* időpontban:

$$y = v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

A feladat feltétele szerint:

$$\frac{h}{2} = \frac{v_0^2}{4g} = v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

**3 pont**

Ezt az egyenletet $t_0$-ra megoldva a két megoldás éppen a két helyzethez tartozó időket adja.

$$g t^2 - 2 v_0 t + \frac{v_0^2}{2g} = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{2v_0 \mp \sqrt{4v_0^2 - 2v_0^2}}{2g} = \frac{2v_0 \mp v_0\sqrt{2}}{2g}.$$

A keresett $\Delta t$ idő:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \sqrt{2}\frac{v_0}{g} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{s} = \mathbf{2,83\ s.}$$

**5 pont**

*Második megoldás:* Függőleges hajításkor a maximális emelkedési magasság

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = 20\ \mathrm{m}.$$

**(2 pont)**

Határozzuk meg, hogy a test a pálya legfelső, $h$ magasságban lévő pontjáról mennyi idő alatt esik le $\frac{h}{2}$ magasságig:

$$\frac{h}{2} = \frac{g}{2} t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{2}\ \mathrm{s}.$$ **(4 pont)**

Mivel felfelé ugyanennyi idő alatt teszi meg ugyanezt az utat, a keresett $\Delta t$ idő:

$$\Delta t = 2t = 2 \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{v_0^2}{2g^2}} = \sqrt{2}\frac{v_0}{g} = 2\sqrt{2}\text{ s} = \mathbf{2,83\ s}.$$

**(4 pont)**

$\boxed{\textbf{2.}}$ <u>Adatok</u>: $R = 0{,}9$ m, $D = 2{,}4$ m, $r = 0{,}5$ m.

a) A sárdarab földet éréséig eltelt idő $t = \sqrt{\frac{4R}{g}} = 0{,}6$ s.

Jelölje a traktor sebességét $v$. A sárdarab traktorhoz viszonyított sebessége szintén $v$. Mivel a járműhöz viszonyítva épp a tengelytávot teszi meg a leválás helyétől vízszintes irányban egyenletesen távolodó sárdarab, ezért:

$$v = \frac{D}{t} = \mathbf{4\,\frac{m}{s}}.$$

**4 pont**

b) A kerék elfordulásának szöge a megtett út (az ívhossz) és a szög között fennálló egyenes arányosság alapján számítható ki:

$$\alpha = \frac{s}{K_{\text{kerék}}} \cdot 360° = \frac{D}{2r\pi} \cdot 360° \approx \mathbf{275°}.$$

**3 pont**

c) A sárdarab mindvégig függőlegesen lefelé gyorsul, ezért **a sárdarab sebességvektorának változása függőlegesen lefelé mutat**, nagysága pedig:

$$|\Delta\vec{v}| = g \cdot t = \mathbf{6\,\frac{m}{s}}.$$

**3 pont**

$\boxed{\textbf{3.}}$ <u>Adatok</u>: $M = 19{,}1$ kg, $m = 9{,}55$ kg, s $= 5$ m, t $= 4$ s.

a) A lendület-megmaradás törvényét az első kőtől való elrugaszkodásra és a másodikra történő érkezésre alkalmazva (előjelezés nélkül):

$$mv = Mu_1 \quad \text{és} \quad mv = (m + M)u_2.$$

ahol $v$ a kutya, $u_1$ és $u_2$ a kövek sebességét jelöli (a talajhoz képest).

**2 pont**

Behelyettesítve:

$$Mu_1 = (m + M)u_2 \quad \rightarrow \quad u_1 = \frac{m + M}{M}u_2.$$

**1 pont**

A két kő egymáshoz viszonyított sebessége:

$$u_1 + u_2 = \frac{s}{t} = 1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**1 pont**

$u_1$ kiküszöbölésével a következőt kapjuk:

$$\frac{m + M}{M}u_2 + u_2 = \frac{s}{t},$$

$$u_2 = \frac{M}{m+2M} \cdot \frac{s}{t} = \mathbf{0,5}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}.$$

**2 pont**

Visszahelyettesítve:

$$u_1 = \frac{m+M}{m+2M} \cdot \frac{s}{t} = \mathbf{0,75}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}.$$

**1 pont**

b) A kutya jéghez viszonyított sebessége az ugrás közben:

$$v = \frac{M}{m} u_1 = \mathbf{1,5}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}.$$

**1 pont**

c) A kutya munkája legalább akkora, mint az elrugaszkodást követően (de még a második kőre érkezés előtt) a rendszer mozgási energiája:

$$W = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M u_1^2 = \mathbf{16,1\ J}.$$

**2 pont**

$\boxed{\textbf{4.}}$ a) **A bal oldali a sima, a jobb oldali pedig az érdes lejtő.** Ha összehasonlítjuk a kiindulási és a megérkezési helyzetet, akkor mindkét esetben helyzeti energia csökkenést láthatunk, a kettő különbsége a felszabaduló hő. Ha az érdes lejtő tetejéről indul a test, akkor nagyobb a hőfejlődés, tehát a másik oldalon kevésbé tud felkapaszkodni a test.

**3 pont**

b) *Dinamikai tárgyalás*: Kezdjük a bal oldali indítással. A test $2h_0$ úton $g \sin 30° = g/2$ gyorsulással mozog, tehát az érdes lejtőt $\sqrt{2gh_0}$ sebességgel éri el. Az érdes lejtőn megtett útja $8h$, gyorsulása $g(\sin 30° + \mu \cos 30°) = \frac{g}{2}\left(1+\sqrt{3}\mu\right)$. Az út, a sebesség és a gyorsulás között a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$2gh_0 = 8hg\left(1+\sqrt{3}\mu\right).$$

**3 pont**

A jobb oldali indítás esetén lényegében ugyanígy járhatunk el. $2h_0$ úton $\frac{g}{2}\left(1-\sqrt{3}\mu\right)$ gyorsulással $\sqrt{2gh_0\left(1-\sqrt{3}\mu\right)}$ sebességet ér el a test a lejtő aljára érve, majd $2h$ úton $g/2$ lassulással veszti el ezt a sebességét:

$$2gh_0\left(1-\sqrt{3}\mu\right) = 2hg.$$

**2 pont**

Ha a fenti két kiemelt egyenletből kifejezzük a $h_0/h$ arányt, akkor a következő összefüggésre jutunk:

$$4\left(1+\sqrt{3}\mu\right) = \frac{1}{1-\sqrt{3}\mu}.$$

Az egyenlet megoldása $\mu = \mathbf{0,5}$.

**2 pont**

*Energetikai tárgyalás*: Az első esetben keletkező hő $Q_1 = mg(h_0 - 4h)$. A második esetben a keletkező hő $Q_2 = mg(h_0 - h)$. A két hő aránya a súrlódó részeken megtett utak arányával egyezik meg:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2h_0}{8h} = \frac{mg(h_0 - h)}{mg(h_0 - 4h)} = \frac{(h_0 - h)}{(h_0 - 4h)}\,.$$

**4 pont**

Ebből az egyenletből kifejezhetjük a $h$ magasságot: $h = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) h_0$ . Ezek után külön-külön kifejezhetjük $Q_1$-et és $Q_2$-t (bár az egyik is elég lenne a súrlódási együttható meghatározásához):

$$Q_1 = mg\left[h_0 - 4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) h_0\right] = (\mu mg \cos 30°)8h = \mu mg \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) h_0\,,$$

amiből $\mu = \mathbf{0,5}$ , illetve

$$Q_2 = mg\left[h_0 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) h_0\right] = (\mu mg \cos 30°)2h_0 = \mu mg \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2h_0\,,$$

amiből sokkal egyszerűbben, de nagyon megnyugtató módon következik, hogy $\mu = \mathbf{0,5}$ .

**3 pont**

*Megjegyzés*: Mivel $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} > \mu = \frac{1}{2}$, így a kisméretű test az érdes oldal tetejéről elengedve is gyorsulva mozog lefelé.

$\boxed{5.}$ <u>Adatok</u>: $T_1 = 293$ K, $p_1 = p_0 = 10^5$ Pa, $V_1 = 0{,}01\ \mathrm{m}^3$, $A = 10^{-2}\mathrm{m}^2$, $m = 25$ kg, $d = 0{,}2$ m, $\mu = \mu_0 = 0{,}8$.

a) A henger megindulásakor a $p_0$ külső és a $p_2$ belső nyomás különbségéből származó erő egyenlő a tapadási erő maximumával:

$$p_2 A - p_0 A = \mu_0 mg,$$

$$p_2 = p_0 + \frac{\mu_0 mg}{A} = \mathbf{1,2 \cdot 10^5\ Pa}.$$

**4 pont**

A henger megindulásáig a gáz melegítése állandó térfogaton zajlik, ezért:

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_0}{T_1} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2}{p_0} = \mathbf{352\ K = 79\ °C}.$$

**2 pont**

b) A henger megmozdulása után a külső erők nem változnak, így a folyamat állandó nyomású:

$$p_3 = p_2 = \mathbf{1,2 \cdot 10^5\ Pa},$$

**1 pont**

$$\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_1}{T_2} \quad \rightarrow \quad T_3 = T_2 \cdot \frac{V_3}{V_1} = T_2 \cdot \frac{V_1 + d \cdot A}{V_1} = \mathbf{422\ K = 149\ °C}.$$

**3 pont**

# 43. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
# I. forduló feladatainak megoldása
# III. kategória
# (akik ebben a tanévben kezdték tanulni a fizikát technikumban)

*A feladatok helyes megoldása maximálisan 10 pontot ér. A javító tanár belátása szerint a 10 pont az itt megadottól eltérő formában is felosztható. Egy-egy feladatra adott második megoldás vagy a probléma általánosítása nem honorálható további pontokkal. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldás természetesen értékelendő. Számolási hibáért – az érettségi dolgozatok javításánál megszokott módon – a (rész)pontszám 25%-ánál többet ne vonjunk le.* ***A továbbjutás feltétele legalább 25 pont elérése!***

$\boxed{1.}$ Adatok: $h = 3{,}58 \cdot 10^7$ m, $H = 1{,}44 \cdot 10^8$ m, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, $v_0 = 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$,

$T = 86400$ s.

a) A geostacionárius pálya eléréséig eltelt idő:

$$t = \frac{h}{v_0} = \mathbf{1{,}19 \cdot 10^6\ s = 13{,}8\ \text{nap} \approx 2\ \text{hét}}.$$

**3 pont**

b) Az ellensúlynak a Föld középpontjához viszonyított sebessége és gyorsulása egyenlő e pont kerületi sebességével és centripetális gyorsulásával:

$$v_{\text{k}} = r\omega = (R + H)\frac{2\pi}{T} = \mathbf{10935\,\frac{m}{s} \approx 10{,}9\,\frac{km}{s} \approx 39\,400\,\frac{km}{h}}.$$

**4 pont**

$$a_{\text{cp}} = v_{\text{k}} \cdot \omega = v_{\text{k}} \cdot \frac{2\pi}{T} = \mathbf{0{,}795\,\frac{m}{s^2}}.$$

**3 pont**

*Megjegyzés:* A Földön a Nap delelésétől deleléséig telik el átlagosan 24 óra, és ezalatt a Föld (a Nap körüli keringése miatt) nem 360°-ot, hanem jó közelítéssel 361°-ot fordul el az állócsillagokhoz képest. Ezért a Föld (sziderikus) forgásideje kissé kevesebb, mint 24 óra, mégpedig 23,9344699 óra. Szigorúan véve ezzel a forgásidővel kellene számolnunk, ami csekély eltéréseket okozna az eredményekben.

$\boxed{2.}$ Adatok: $v_1 = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $d = 125$ m, $v_2 = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_3 = 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = 1{,}25\,\frac{\text{m}}{s^2}$.

a) A gyorsítás ideje:

$$t = \frac{v_3 - v_1}{a} = 20\ \text{s}.$$

**1 pont**

A személygépkocsi gyorsítás közben megtett útja:

$$s = \frac{v_1 + v_3}{2}t = 350\ \text{m}.$$

**2 pont**

A nehézgépjármű által közben megtett út:

$$s_{\mathrm{n}} = v_2 t = 300\ \mathrm{m}.$$

A személyautó még nem tudta behozni a 125 méteres hátrányát, tehát **előzéskor a sebessége 108 km/h**.

**2 pont**

b) Az egyenletes mozgás közben a találkozásig eltelt idő legyen $t_1$. A parkolótól az autópályán mért távolságok egyenlősége miatt (mértékegységek SI-ben):

$$350 + 30t_1 = 300 + 15t_1 + 125,$$

ebből

$$t_1 = 5\ \mathrm{s}.$$

(Másként: a fennmaradó 75 m hátrányát 15 m/s relatív sebességgel 5 s alatt dolgozza le a személyautó.)

Tehát a személyautó 25 s ideig haladt az autópályán, mire utolérte a nehézgépjárművet.

**3 pont**

A személyautó által közben megtett út:

$$s_{\mathrm{ö}} = s + v_3 t_1 = 500\ \mathrm{m}.$$

**Tehát a parkolótól haladva 500 m utat tett meg a személyautó, mire utolérte a nehézgépjárművet.**

**2 pont**

$\boxed{\textbf{3.}}$ Adatok:

$$\frac{m_{\mathrm{a}}}{m_{\mathrm{ö}}} = \frac{18}{24},\ m_{\mathrm{u}} = \ 31{,}1035\ \text{gramm},\ \rho_{\mathrm{a}} = 19{,}32\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3},\ \rho_{\mathrm{r}} = 8{,}93\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3},\ \rho_{\mathrm{ö}} = 15{,}18\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

a) Egy uncia vörös aranyban lévő arany és réz tömege:

$$m_{\mathrm{a}} = \frac{18}{24}\cdot m_{\mathrm{u}} = \mathbf{23{,}33\ g} \quad \text{és} \quad m_{\mathrm{r}} = \frac{6}{24}\cdot m_{\mathrm{u}} = \mathbf{7{,}776\ g}.$$

**3 pont**

b) Az arany és a réz eredeti térfogata 1 uncia 18 karátos vörös arany esetén:

$$V_{\mathrm{a}} = \frac{m_{\mathrm{a}}}{\rho_{\mathrm{a}}} = \mathbf{1{,}207\ cm^3} \quad \text{és} \quad V_{\mathrm{r}} = \frac{m_{\mathrm{r}}}{\rho_{\mathrm{r}}} = \mathbf{0{,}8708\ cm^3}.$$

**3 pont**

c) Egy uncia 18 karátos vörös arany térfogata:

$$V_{\mathrm{ö}} = \frac{m_{\mathrm{u}}}{\rho_{\mathrm{ö}}} = \mathbf{2{,}049\ cm^3}.$$

Az összetevők össztérfogata (1,207 + 0,871) $\mathrm{cm}^3$ = 2,078 $\mathrm{cm}^3$ > 2,049 $\mathrm{cm}^3$. **Az ötvözet térfogata kisebb, mint az alkotóelemek térfogata** (majdnem másfél százalékkal).

**4 pont**

$\boxed{\textbf{4.}}$ Adatok: üveggyöngy: 1; fagyöngy: 2;

$m_1 = 20$ g; $\mu_1 = 0{,}25$ ; $m_2 = 10$ g; $\mu_2 = 0{,}1$; $d = 3$ m; $v_0 = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

a) A gyöngyök gyorsulása az ütközés előtt:

$$a_1 = -\mu_1 g = -2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \text{és} \quad a_2 = -\mu_2 g = -1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

**1 pont**

A testek által az ütközésig megtett utak:

$$s_1 = v_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 \quad \text{és} \quad s_2 = v_0 t + \frac{a_2}{2} t^2.$$

Az utakra érvényes, hogy $s_1 + d = s_2$, ezért

$$v_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + d = v_0 t + \frac{a_2}{2} t^2,$$

$$2d = (a_2 - a_1) t^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_2 - a_1}} = 2\ \mathrm{s}.$$

**2 pont**

A testek sebessége az ütközés pillanatában:

$$v_1 = v_0 + a_1 t = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \text{és} \quad v_2 = v_0 + a_2 t = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

**1 pont**

Az ütközésre felírhatjuk a lendületmegmaradás törvényét:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{\mathrm{k}}.$$

Ebből az ütközés utáni közös sebesség:

$$\boldsymbol{v_{\mathrm{k}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}.$$

**2 pont**

b) A közös csúszás gyorsulása:

$$a_{\mathrm{k}} = -\frac{\mu_1 m_1 g + \mu_2 m_2 g}{m_1 + m_2} = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Az ütközéstől a megállásig eltelt idő:

$$t_{\mathrm{k}} = \frac{0 - v_{\mathrm{k}}}{a_{\mathrm{k}}} = 1\ \mathrm{s}.$$

Az ütközéstől a megállásig közösen megtett út:

$$s_{\mathrm{k}} = \frac{v_{\mathrm{k}} + 0}{2} t_{\mathrm{k}} = 1\ \mathrm{m}.$$

A fagyöngy által az ütközésig megtett út:

$$s_2 = \frac{v_0 + v_2}{2} t = 10\ \mathrm{m}.$$

**A fagyöngy által megtett összes út: $s_2 + s_{\mathrm{k}} = 11$ m.** **4 pont**

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Adatok: $m_1 = 0{,}008\ \mathrm{kg},\ v_1 = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ m_2 = 0{,}01\ \mathrm{kg},\ v_2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ d = 0{,}45\ \mathrm{m}.$

a) A rendszer teljes lendülete:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0{,}008\ \mathrm{kg} \cdot 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0{,}01\ \mathrm{kg} \cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathbf{0}.$$

**2 pont**

b) A korongok **egyenletes körmozgást** végeznek.

**2 pont**

c) A korongok körpályáinak sugara megegyezik a tömegközépponttól mért távolságukkal:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot d = 0{,}25\ \mathrm{m},\ r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot d = 0{,}2\ \mathrm{m}.$$

**3 pont**

A fonalat feszítő erő:

$$F = m \cdot a_{\mathrm{cp}} = m_1 \cdot \frac{v_1^2}{r_1} = m_2 \cdot \frac{v_2^2}{r_2} = \mathbf{0{,}2\ N}.$$

**3 pont**

**43. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny**

**I. forduló feladatainak megoldása**
**IV. kategória**
**(akik ebben a tanévben második éve tanulják a fizikát technikumban)**

*A feladatok helyes megoldása maximálisan 10 pontot ér. A javító tanár belátása szerint a 10 pont az itt megadottól eltérő formában is felosztható. Egy-egy feladatra adott második megoldás vagy a probléma általánosítása nem honorálható további pontokkal. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldás természetesen értékelendő. Számolási hibáért – az érettségi dolgozatok javításánál megszokott módon – a (rész)pontszám 25%-ánál többet ne vonjunk le.* ***A továbbjutás feltétele legalább 25 pont elérése!***

$\boxed{\textbf{1.}}$ Adatok: $m = 0{,}1\ \text{kg},\ M = 0{,}2\ \text{kg},\ L = 0{,}6\ \text{m},\ \mu = \mu_0 = 0{,}2\,.$

a) Ha megcsúszik a hasáb a kiskocsin, akkor a kiskocsit a csúszási súrlódási erő gyorsítja:

$$a = \frac{\mu m g}{M} = 1\ \text{m/s}^2.$$

**2 pont**

Ha megcsúszik a hasáb a kiskocsin, akkor a kiskocsi gyorsulása mindig ekkora lesz, függetlenül az $F$ erő nagyságától. Határesetben (vagyis a legkisebb $F$ erő esetében) ugyanekkora lesz a hasáb gyorsulása is:

$$a = \frac{F - \mu m g}{m} = 1\ \text{m/s}^2 \qquad \rightarrow \qquad F = ma + \mu m g = \mathbf{0{,}3\ N}.$$

**3 pont**

b) Ha $2F$ = 0,6 N erővel húzzuk a hasábot, akkor a hasáb gyorsulása:

$$a' = \frac{2F - \mu m g}{m} = 4\ \text{m/s}^2\,,$$

míg a kiskocsi gyorsulása $a$ = 1 m/s$^2$.

**2 pont**

A kocsihoz képest a hasáb gyorsulása $a' - a$ = 3 m/s$^2$. A hasáb ezzel a gyorsulással $s = \frac{L}{2} =$ 0,3 m utat tesz meg a kiskocsin a lecsúszásig, tehát a közben eltelt idő:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a' - a}} = \mathbf{0{,}447\ s.}$$

**3 pont**

$\boxed{\textbf{2.}}$ Adatok: $v_0 = 18\ \frac{\text{m}}{\text{s}},\ s = 18\ \text{m},\ \alpha = 30°.$

A kinematikai adatokból meghatározható a jármű lassulása vízszintes úton abban az esetben, amikor a legrövidebb úton áll meg:

$$s = \frac{v_0}{2}t, \;\; a = -\frac{v_0}{t} \quad \rightarrow \quad a = -\frac{v_0^2}{2s} = -9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$ **2 pont**

Dinamikai szempontból a lassulás legnagyobb értéke:

$$a = -\mu_0 g, \;\; \text{ahonnan} \;\; \mu_0 = -\frac{a}{g} = 0{,}9.$$

**2 pont**

Lejtős úton lefelé, illetve felfelé haladva a lassulás legnagyobb értéke:

$$a_{\mathrm{le}} = (\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha)g = -2{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad \text{illetve} \quad a_{\mathrm{fel}} = -(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha)g = -12{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

**4 pont**

A fékutak pedig:

$$s_{\mathrm{le}} = -\frac{v_0^2}{2a_{\mathrm{le}}} = \mathbf{58\ m}, \quad \text{illetve} \quad s_{\mathrm{fel}} = -\frac{v_0^2}{2a_{\mathrm{fel}}} = \mathbf{12{,}7\ m}.$$

**2 pont**

$\boxed{\textbf{3.}}$ Adatok: $R = 5 \cdot 10^6$ m, $T_\mathrm{B} = 14400$ s, $h = 10^7$ m, $T_\mathrm{H} = 25200$ s, $m = 1$ kg.

a) Legyen a bolygó holdjának pályasugara $r = R + h = 1{,}5 \cdot 10^7$m.
A hold mozgásegyenlete:

$$\gamma \frac{m_\mathrm{H} M}{r^2} = m_\mathrm{H} r \left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{H}}\right)^2.$$

Innen a bolygó tömege:

$$M = \frac{r^3}{\gamma}\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{H}}\right)^2 = \mathbf{3{,}14 \cdot 10^{24}\ kg.}$$ **4 pont**

b) Egy test súlya a test által az alátámasztásra vagy felfüggesztésre kifejtett erő. A súlyerő ellenereje a *T* tartóerő. A két erő abszolút értéke tehát egyenlő.
A sarkok közelében a bolygó forgásából származó hatás elhanyagolható, ezért a tartóerő és így testek súlya is megegyezik a rájuk ható gravitációs erővel:

$$m g_\mathrm{P} = \gamma \frac{mM}{R^2} = \mathbf{8{,}39\ N.}$$ **3 pont**

c) A bolygó egyenlítőjén a testre ható gravitációs erő nem egyenlő a test súlyával. Ennek oka az, hogy a bolygóval együtt forgó test gyorsul, ezért a rá ható erők eredője nem nulla. A nyugalomban lévő testre a függőlegesen lefelé mutató gravitációs erő és a *T* tartóerő hat. Ezek eredője szolgáltatja a szerencsétlenül elnevezett centripetális erőt, vagyis a tömeg és a gyorsulás szorzatát:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} + T = mR\omega^2 \quad \rightarrow \quad -T = \gamma \frac{mM}{R^2} - mR\omega^2 = \gamma \frac{mM}{R^2} - mR\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{B}}\right)^2 = \mathbf{7{,}44\ N.}$$

**3 pont**

Ha a versenyző érvelése nem korrekt (hanem inkább kissé zavarosnak nevezhető), de jó eredményt hoz ki, akkor megadhatjuk számára a teljes pontszámot.

$\boxed{4.}$ Adatok: $T_1 = 20°\text{C},\ t_1 = 300\ \text{s},\ T_2 = 50°\text{C},\ t_2 = 900\ \text{s},\ T_3 = 100°\text{C},\ m = 2\ \text{kg}$,

$c = 4{,}2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg°C}},\ \ L = 2256\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

Mivel a hőközlés állandó ütemben történik, a víz hőmérsékletváltozása mindaddig egyenesen arányosan nő az eltelt idővel, amíg fel nem forr. Kihasználva ezt az egyenes arányosságot, meghatározható, hogy mennyi idő alatt éri el a víz hőmérséklete 50°C-ról a 100°C-ot:

$$\frac{t_3}{T_3 - T_2} = \frac{t_1}{T_2 - T_1} \quad \rightarrow \quad \frac{t_3}{100°\text{C} - 50°\text{C}} = \frac{300\ \text{s}}{50°\text{C} - 20°\text{C}} \quad \rightarrow \quad t_3 = 500\ \text{s}.$$

**5 pont**

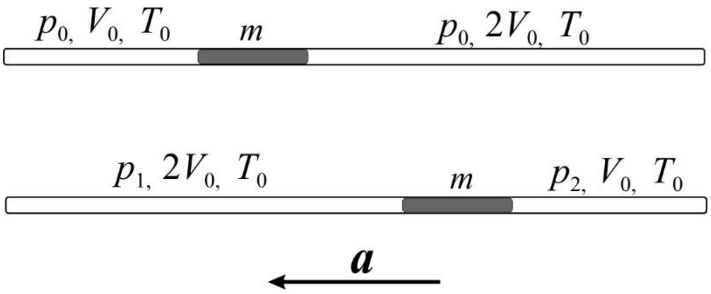
A hátralévő $t_4 = t_2 - t_3 = 400$ s során a víz egy része elforr. A teljesítmény állandósága miatt:

$$\frac{c \cdot m \cdot (T_2 - T_1)}{t_1} = \frac{L \cdot m_\text{x}}{t_4},$$
$$m_\text{x} = \frac{c \cdot m \cdot (T_2 - T_1)}{L} \cdot \frac{t_4}{t_1} = 0{,}15\ \text{kg}.$$

**Tehát az edényben 1,85 kg 100 °C-os víz marad.** **5 pont**

$\boxed{5.}$ Adatok: $p_0 = 10^3\ \text{Pa},\ A = 8\ \text{mm}^2,\ m = 0{,}02\ \text{kg}$.

Jelöljük a gázok állapotjelzőit az ábrákon látható módon:




A gázok mennyisége és hőmérséklete állandó, így alkalmazható a Boyle–Mariotte-törvény:

$$p_0V_0 = p_1 \cdot 2V_0, \quad \text{illetve} \quad p_0 \cdot 2V_0 = p_2V_0.$$

Ezekből:

$$p_1 = \frac{1}{2}p_0 = 500\ \text{Pa}, \quad \text{illetve} \quad p_2 = 2p_0 = 2000\ \text{Pa}.$$

**4 pont**

Az *m* tömegű higanyszál mozgására felírva a dinamika alapegyenletét:

$$ma = (p_2 - p_1)A = \frac{3}{2}p_0A.$$

A keresett gyorsulás:

$$a = \frac{3}{2} \cdot \frac{p_0A}{m} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10^3\text{Pa} \cdot 8 \cdot 10^{-6}\text{m}^2}{0{,}02\ \text{kg}} = \mathbf{0,6}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}.$$

**6 pont**