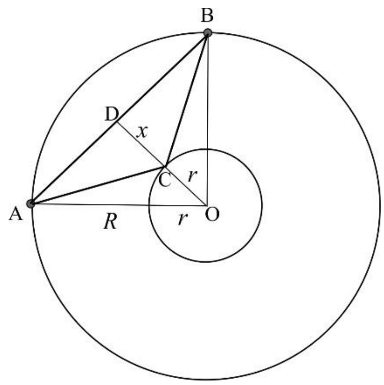
42. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
I. forduló feladatainak megoldása
I. kategória (gimnázium 9. évfolyam)

A feladatok helyes megoldása maximálisan 10 pontot ér. A javító tanár belátása szerint a 10 pont az itt megadottól eltérő formában is felosztható. Egy-egy feladatra adott második megoldás vagy a probléma általánosítása nem honorálható további pontokkal. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldás természetesen értékelendő. Számolási hibáért – az érettségi dolgozatok javításánál megszokott módon – a (rész)pontszám 25%-ánál többet ne vonjunk le. ***A továbbjutás feltétele legalább 25 pont elérése!***

1. Adatok: $R = 4468$ km; $t_1 = 14$ óra 52 perc 23 s; $t_2 = 15$ óra 12 perc 43 s; $t_3 = 15$ óra 19 perc 23 s.

Készítsünk vázlatot! Jelöljük a becsapódási pontot az egyenlítőn A-val, a műszert a póluson B-vel, az égitest sugara legyen R, belső magjának sugara pedig r. Az elsőként észlelt hullámok az AB úton, a később észleltek az ACB úton, a magról visszaverődve érnek a műszerhez.



Az AB úton terjedő hullámok
$\Delta t_1 = t_1 - t_2 = 20$ perc 20 s $= 1220$ s,
az ACB úton terjedők
$\Delta t_2 = t_1 - t_3 = 27$ perc $= 1620$ s alatt érnek a műszerhez.

2 pont

Az AB távolság az AOB derékszögű háromszögből $\sqrt{2} \cdot R = 6319$ km, a hullámok sebessége pedig:

$$v = \frac{\sqrt{2} \cdot R}{\Delta t_1} = \frac{6319\text{km}}{1220s} = 5{,}18\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

2 pont

A magról visszaverődő hullámok tehát az ACB útvonalon haladva
$v \cdot \Delta t_2 = 5{,}18\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 1620\ s = 8390$ kilométert tesznek meg, így AC $= 4195$ km.

2 pont

Az ACD háromszögre felírhatjuk a Pitagorasz-tételt**.**
Használjuk fel, hogy AD $= \frac{\sqrt{2}}{2} R = 3159$ km, így $x = \sqrt{4195^2 - 3159^2} = 2760$ km.
Mivel az AOD háromszög egyenlő szárú, ezért DO = AD $= x + r = 3159$ km.
Ebből **az égitest magjának sugara** $r = 3159\text{ km} - 2760\text{ km} = 399\text{ km} \approx \mathbf{400\ km}$.

4 pont

$\boxed{2.}$ Adatok: $h_1 = 2{,}54$ m; $h_2 = 1{,}35$ m; $h_3 = 1{,}47$ m; $h = 0{,}8$ m; $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

a) A szabványos labda $h_1 = 2{,}54$ m magasról leejtve legalább $h_2 = 1{,}35$ m magasra pattan fel. Ekkor a labda becsapódási sebessége $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 7{,}059\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a visszapattanási sebessége $v_2 = \sqrt{2gh_2} = 5{,}147\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a minimális ütközési szám pedig $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = 0{,}729 \approx \mathbf{0,73}$.
Ugyanekkora magasságból a szabványos labda legfeljebb $h_3 = 1{,}47$ m magasra pattan. Ekkor a labda becsapódási sebessége ugyanúgy $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 7{,}059\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a visszapattanási sebessége viszont $v_3 = \sqrt{2gh_3} = 5{,}370\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a maximális ütközési szám pedig $\frac{v_3}{v_1} = \sqrt{\frac{h_3}{h_1}} = 0{,}761 \approx \mathbf{0,76}$.

2 + 2 pont

b) Amikor $h = 0{,}8$ m magasságból v_0 kezdősebességgel ledobjuk a labdát, a visszapattanás kezdősebessége legalább $v_{2,\mathrm{h}} = \sqrt{2gh} = 3{,}962\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ kell legyen, hogy a kezünkbe érkezzen vissza. A becsapódás sebessége ekkor (minimális ütközési szám esetén) $v_{1,\mathrm{h}} = \frac{v_{2,\mathrm{h}}}{0{,}729} = 5{,}435\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

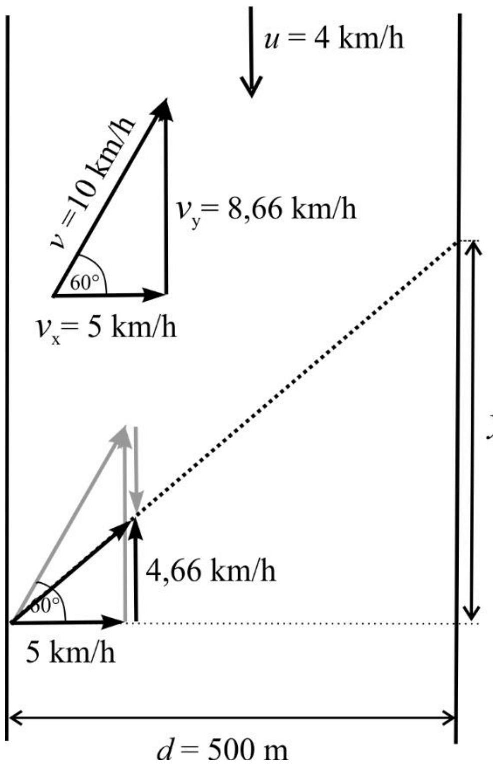
3 pont

Ebben az esetben a labda $h = \frac{v_0 + v_{1,\mathrm{h}}}{2} t_{\mathrm{le}}$ utat tesz meg $t_{\mathrm{le}} = \frac{v_{1,\mathrm{h}} - v_0}{g}$ idő alatt.

Behelyettesítés és átrendezés után **a kezdősebesség** $v_0 = \sqrt{v_{1,\mathrm{h}}^2 - 2gh} = \mathbf{3,72\,\frac{m}{s}}$.

3 pont

$\boxed{3.}$ Adatok: $d = 500$ m = 0,5 km; $u = 4$ km/h; $v = 10$ km/h; $\alpha = 60°$.



a) Ábrázoljuk vektorokkal a víznek a parthoz viszonyított sebességét, a csónaknak a vízhez viszonyított sebességét, valamint ennek a partra merőleges, illetve azzal párhuzamos összetevőit. Az ábra segítségével meghatározható a csónak parthoz viszonyított sebességének partra merőleges, illetve azzal párhuzamos összetevőinek nagysága.

4 pont

Az ábra alapján az átérés ideje

$$t = \frac{d}{\frac{1}{2}v} = \mathbf{0,1\ h} = \mathbf{6\ min} = \mathbf{360\ s}.$$

A csónak a szemközti ponthoz képest a folyón felfelé y távolságra köt ki:

$$y = t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v - u\right) = \mathbf{0,466\ km} = \mathbf{466\ m}.$$

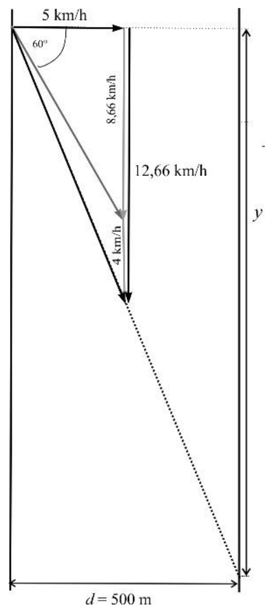
2 pont

b) Az előbbihez hasonló ábra alapján, hasonló meggondolással, az átérés ideje most is

$$t = \frac{d}{\frac{1}{2}v} = \mathbf{0{,}1\ h = 6\ min = 360\ s}.$$

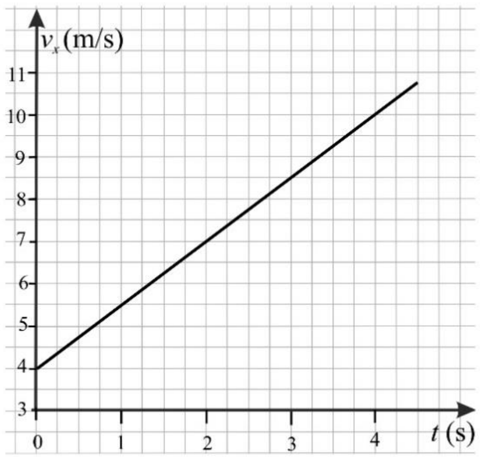
A kikötés helye az indulással szemközti ponttól lefelé

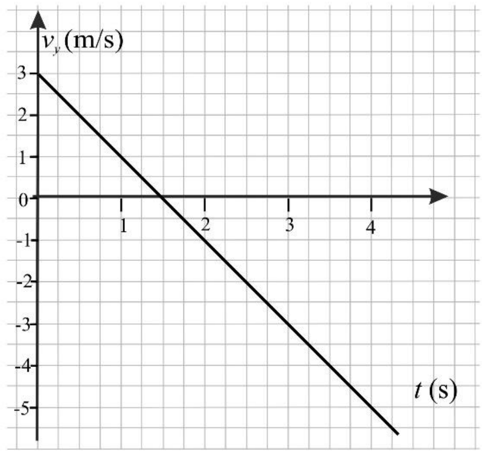
$y = t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v + u\right) = \mathbf{1{,}266\ km = 1266\ m}$ távolságra van.



4 pont

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Adatok: $m = 1{,}2$ kg.





a) A grafikonokról leolvasható adatok alapján keleti irányban a modellautó gyorsulása $a_\mathrm{x} = 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, északi irányban pedig $a_\mathrm{y} = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Az eredő gyorsulás $a = \sqrt{a_\mathrm{x}^2 + a_\mathrm{y}^2} = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Az eredő erő $F = ma = 3$ N. **4 pont**

b) Amikor az autó éppen délkelet felé mozog, akkor a keleti és északi irányba mutató pillanatnyisebesség-komponenseinek nagysága azonos, előjele ellentétes: $v_\mathrm{x}(t) = -v_\mathrm{y}(t)$. Behelyettesítve a sebességkomponensek időfüggő kifejezéseit, a következő egyenletet kapjuk:

$$4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t = -\left(3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t\right).$$

Az egyenlet megoldása alapján ez **14 s elteltével következik be**.

4 pont

Ebben a pillanatban a kisautó sebessége:

$$v = \sqrt{v_\mathrm{x}^2 + v_\mathrm{y}^2} = \sqrt{2v_\mathrm{x}^2} = \sqrt{2}|v_x| = \sqrt{2}\cdot\left|4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 14\ \mathrm{s}\right| = \mathbf{25\sqrt{2}\,\frac{m}{s} \approx 35{,}4\,\frac{m}{s}}.$$

2 pont

$\boxed{5.}$ Adatok: $F = 12\ \text{N}$.

1. megoldás:

a) A kötél felénél ébredő feszítőerő ugyanakkora gyorsulást kell, hogy okozzon a hátsó fél kötéldarabnak, mint a kötélre ható húzóerő a teljes kötélnek. Feleakkora tömeg adott mértékű gyorsításához feleakkora erő szükséges, tehát **a kötél felénél 6 N feszítőerő lép fel**. Hasonlóan adódik, hogy **a kötél első harmadoló pontjánál 8 N, hátsó harmadoló pontjánál 4 N feszítőerő ébred. Láthatjuk, hogy a feszítőerők meghatározásához nincs szükségünk más mennyiségek ismeretére.**

4+1 pont

b) Mivel a súrlódási erő nagysága egyenesen arányos a nyomóerővel (amely esetünkben egyenesen arányos a tömeggel), a hátsó fél kötéldarab gyorsítását feleakkora súrlódási erő akadályozza, mint a teljes kötélét. Emiatt az a) pontban a feszítőerőre megállapított arányosság érvényes marad. **A kötél felénél tehát most is 6 N erő ébred, és a harmadoló pontoknál sem változik az értéke.** (Csak a kötél gyorsulása változik a súrlódás miatt.) **Láthatjuk, hogy a feszítőerők meghatározásához most sincs szükségünk más mennyiségek ismeretére.**

4+1 pont

2. megoldás: A kötél hossza legyen L, és vizsgáljuk az elejétől x távolságra lévő helyen a K feszítőerőt. Legyen a kötél tömege m és a súrlódási együttható μ. A kötél elejére és végére ezeket az egyenleteket írhatjuk fel:

$$F - \mu \frac{x}{L} mg - K = \frac{x}{L} ma\,,$$

$$K - \mu \frac{L-x}{L} mg = \frac{L-x}{L} ma\,.$$ **4 pont**

A két egyenletet összeadva (vagy a szokásos módon) kapjuk a kötél gyorsulását:

$$F - \mu mg = ma \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{F}{m} - \mu g\,.$$

A gyorsulást akár az első, akár a második egyenletbe helyettesítjük be, ugyanazt az eredményt kapjuk:

$$F - \mu \frac{x}{L} mg - K = \frac{x}{L} m\left(\frac{F}{m} - \mu g\right) \quad \rightarrow \quad F - K = \frac{x}{L} F \quad \rightarrow \quad K = \frac{L-x}{L} F\,,$$

vagy

$$K - \mu \frac{L-x}{L} mg = \frac{L-x}{L} m\left(\frac{F}{m} - \mu g\right) \quad \rightarrow \quad K = \frac{L-x}{L} F\,.$$ **4 pont**

Láthatjuk tehát, hogy akár van súrlódás, akár nincs, a kötélben a feszítőerő csak az adott pont helyétől és a húzóerőtől függ, és nem függ a kötél tömegétől sem. Még az sem számít, hogy a kötél gyorsul vagy lassul, esetleg állandó sebességgel mozog; csak az a fontos, hogy az udvar felülete egyenletes (állandó súrlódású) és vízszintes legyen. **A kötél felénél a feszítőerő 6 N, a harmadoló pontokban 8 N és 4 N.** **2 pont**

Megjegyzés: Elfogadható, ha a versenyző próbálgatással jön rá, hogy a feszítőerő csak a húzóerőtől függ. Azonban, ha nem mondja ki az általános összefüggést, viszont felvett adatokkal jól számol, akkor 10-ből maximum 6 pontot kapjon.

42. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
I. forduló feladatainak megoldása
II. kategória (gimnázium 10. évfolyam)

A feladatok helyes megoldása maximálisan 10 pontot ér. A javító tanár belátása szerint a 10 pont az itt megadottól eltérő formában is felosztható. Egy-egy feladatra adott második megoldás vagy a probléma általánosítása nem honorálható további pontokkal. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldás természetesen értékelendő. Számolási hibáért – az érettségi dolgozatok javításánál megszokott módon – a (rész)pontszám 25%-ánál többet ne vonjunk le. ***A továbbjutás feltétele legalább 25 pont elérése!***

1. Adatok: $h = 10\text{ m}, L = 4\text{ m}, t_0 = 2\text{ s}$.

Legyen a kezdősebesség vízszintes és függőleges komponense $v_{0\mathrm{x}}$ és $v_{0\mathrm{y}}$.
Az ugró vízfelszín feletti y magassága a tetszőleges t időpillanatban:

$$y = h + v_{0\mathrm{y}}t - \frac{g}{2}t^2.$$

A vízbe érkezés pillanatában:

$$0 = h + v_{0\mathrm{y}}t_0 - \frac{g}{2}t_0^2.$$

A vízszintes irányú elmozdulás:

$$x = L = v_{0\mathrm{x}}t_0.$$

4 pont

Ezekből a kezdősebesség-komponenseket kifejezve:

$$v_{0\mathrm{y}} = \frac{\frac{g}{2}t_0^2 - h}{t_0} = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$v_{0\mathrm{x}} = \frac{L}{t_0} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

3 pont

Az elugrás sebessége:

$$v_0 = \sqrt{v_{0\mathrm{x}}^2 + v_{0\mathrm{y}}^2} = \mathbf{5{,}4}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}.$$

3 pont

Megjegyzés: A kezdősebesség függőleges összetevőjét a sebességvektor átlagának a segítségével is kiszámíthatjuk. Ha a függőlegesen felfelé irányt tekintjük pozitívnak, akkor a mozgás átlagsebessége $-\frac{h}{t_0} = -5\text{ m/s}$. Ez a v_{0y} kezdősebesség és a $v_y = v_{0y} - 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ végsebesség számtani közepe:

$$-5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{v_{0y} + \left(v_{0y} - 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{2} \qquad \rightarrow \qquad v_{0y} = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(4 pont)

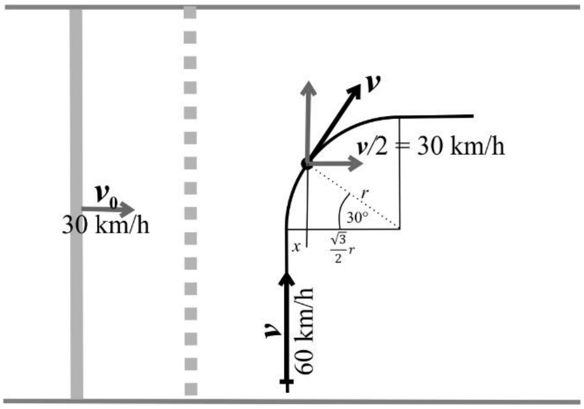
$\boxed{2.}$ Adatok: $v_0 = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 8{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}},\, v = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 16{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}},\, r = 40\ \text{m},\, d = 25\ \text{m},\, t = 5\ \text{s}.$

a) A jetski-s a negyedkörös fordulatot $t_1 = \frac{2\cdot r\cdot \pi}{4\cdot v} = 3{,}77$ s alatt teszi meg, miközben 40 métert távolodik a vízfaltól, a hátralévő $t_2 = 1{,}23$ s alatt pedig további $v \cdot t_2 = 20{,}5$ métert.

Közben a vízfal $v_0 \cdot t = 41{,}7$ métert halad a jetski-s felé.

Tehát 5 s elteltével a távolságuk 25 m + 40 m + 20,5 m – 41,7 m = **43,8 méter**. **5 pont**

b) A vízfal és a jetski-s akkor van egymáshoz legközelebb, amikor utóbbinak a fordulás során a vízfal haladási irányával párhuzamos sebességkomponense pontosan $v_0 = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ez éppen 30°-os szögelfordulásnál következik be.
Eddig a pillanatig $t' = \frac{2\cdot r\cdot \pi}{12\cdot v} = 1{,}26$ s telik el, mely idő alatt a vízfal $v_0 \cdot t' = 10{,}5$ métert közeledik.
Eközben a jetski-s $x = r\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5{,}4$ métert távolodik a vízfaltól (lásd az ábrát).



A legkisebb távolság 25 m + 5,4 m – 10,5 m = **19,9 méter**.

5 pont

$\boxed{3.}$ Adatok: $L = 1\ \text{m},\, h = 0{,}7\ \text{m}.$

A rendszert a homokzsákra ható nehézségi erő gyorsítja addig, amíg a zsák a talajra nem ér. A mechanikaienergia-megmaradást használva kiszámíthatjuk a kocsi és a homokzsák sebességét a talajra érés pillanatában:

$$mgh = 2\frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{gh} = 2{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2 pont

A homokzsák a talajra érésekor tökéletesen rugalmatlanul ütközik a talajjal, elveszti a sebességét. A kiskocsi ezután már nem gyorsul, ezzel a v sebességgel pattan vissza a sín végéről, és egészen addig ezzel a sebességgel halad, amíg a fonál újra meg nem feszül.
Amikor a fonál megfeszül, a kiskocsi megrántja a fonalat, a fonálerő a kiskocsit lassítja, a zsákot gyorsítja. A fonálerő a két testre azonos ideig hat, ezért amennyit veszít a kocsi a lendületéből, annyi lendületre tesz szert a zsák (lényegében rugalmatlan ütközés történik). A kocsi és a zsák u sebessége a rántás után azonos lesz, amit így számíthatunk ki:

$$\Delta I_{\text{kocsi}} = mv - mu = mu = \Delta I_{\text{zsák}}$$

vagyis

$$u = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{gh}}{2} = 1{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4 pont

Ezek után a két test mozgási energiája alakul át a zsák helyzeti energiájává azalatt, amíg h' magasságig emelkedik:

$$2\frac{1}{2}mu^2 = mgh',$$

ahonnan

$$m\frac{gh}{4} = mgh' \quad \rightarrow \quad h' = \frac{h}{4} = 17{,}5 \text{ cm}.$$

A kiskocsi visszafelé megtett útja $s = L - h + h' = \mathbf{47{,}5\ cm}$.

4 pont

4.

a) Mivel a kezdő pillanatban $\Sigma F = mg = 10$ N, ezért a test tömege $\boldsymbol{m = 1}$ **kg**.

1 pont

b) Az egyensúlyi helyzetben:

$$D \cdot \Delta l = m \cdot g \quad \rightarrow \quad D = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{10\text{ N}}{0{,}1\text{ m}} = \mathbf{100\ \frac{N}{m}}.$$

2 pont

c) A vízszintes tengely alatt a $\Sigma F(\Delta l)$ grafikon olyan derékszögű háromszöget rajzol ki, amelynek területe a munkatétel alapján megegyezik a felső háromszög területével, továbbá hasonló hozzá. Ha két hasonló háromszög területe egyenlő, akkor azok egybevágók. Ezt kihasználva $\Delta l' = \Delta l$ a legalsó pontban is (valamint $|\Sigma F| = mg$).
A rugó legnagyobb megnyúlása:

$$\boldsymbol{\Delta l_{\max}} = \Delta l + \Delta l' = \mathbf{0{,}2\ m}.$$

3 pont

<u>*Megjegyzés:*</u> A rugó maximális megnyúlását az energiamegmaradás törvényéből is megkaphatjuk:

$$mg\Delta l_{\max} = \frac{1}{2}D(\Delta l_{\max})^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta l_{\max}} = \frac{2mg}{D} = \mathbf{0{,}2\ m}.$$

d) A sebesség ott maximális, ahol az erők eredője felveszi a zérus értéket. Az első szakaszra a munkatételt alkalmazva az eredő erő munkája egyenlő a mozgási energia változásával:

$$\frac{mg + 0}{2} \cdot \Delta l = \frac{1}{2}\, m\, v_{\max}^2 - 0,$$

$$\boldsymbol{v_{\max}} = \mathbf{1\ \frac{m}{s}}.$$

3 pont

e) Az erők eredője az indulás helyén maximális, tehát itt a legnagyobb a gyorsulás.
Mivel $\Sigma F = ma$, és az indulás helyén $\Sigma F = mg$, ezért

$$\boldsymbol{a = g = 10\ \frac{m}{s^2}}.$$

(A c) pont alapján a legalsó pontban is ekkora a gyorsulás nagysága, iránya viszont felfelé mutat.)

1 pont

$\boxed{5.}$

Adatok: $h_1 = 0{,}6$ m; $h_2 = 0{,}9$ m; $A = 0{,}01$ m^2; $m_\mathrm{d} = 0{,}8$ kg; $m = 4{,}2$ kg; $p_0 = 10^5$ Pa.

Az alsó rész vízszintes helyzete miatt a két gázrészben egyenlő a nyomás kezdetben is, és a végállapotban is.

A kezdeti nyomás: $p_1 = p_0 + \frac{m_\mathrm{d} g}{A} = 1{,}008 \cdot 10^5$Pa.

Végső nyomás: $p_2 = p_0 + \frac{(m_\mathrm{d}+m)g}{A} = 1{,}05 \cdot 10^5$Pa.

3 pont

A feltételek szerint a nehezék ráhelyezése miatti változás állandó hőmérsékletű folyamatnak tekinthető.

1 pont

Az alsó dugattyú elmozdulása legyen *x*, a felsőé *y*. A Boyle–Mariotte-törvényt az alsó gázrészre felírva:

$$p_1 \cdot A \cdot h_2 = p_2 \cdot A \cdot (h_2 - x),$$
$$p_1 \cdot h_2 = p_2 \cdot (h_2 - x),$$
$$1{,}008 \cdot 10^5 \cdot 0{,}9 = 1{,}05 \cdot 10^5 \cdot (0{,}9 - x),$$
$$\boldsymbol{x = 0{,}036\ \mathrm{m}}.$$

Az alsó dugattyú **3,6 cm-rel jobbra** mozdul el.

3 pont

A Boyle–Mariotte-törvényt a függőleges gázrészre felírva:

$$p_1 \cdot A \cdot h_1 = p_2 \cdot A \cdot (h_1 - y + x),$$
$$p_1 \cdot h_1 = p_2 \cdot (h_1 - y + x),$$
$$1{,}008 \cdot 10^5 \cdot 0{,}6 = 1{,}05 \cdot 10^5 \cdot (0{,}6 - y + 0{,}036),$$
$$\boldsymbol{y = 0{,}06\ \mathrm{m}}.$$

A felső dugattyú **6 cm-rel lefelé** mozdul el.

3 pont

42. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
I. forduló feladatainak megoldása
III. kategória
(akik ebben a tanévben kezdték tanulni a fizikát technikumban)

A feladatok helyes megoldása maximálisan 10 pontot ér. A javító tanár belátása szerint a 10 pont az itt megadottól eltérő formában is felosztható. Egy-egy feladatra adott második megoldás vagy a probléma általánosítása nem honorálható további pontokkal. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldás természetesen értékelendő. Számolási hibáért – az érettségi dolgozatok javításánál megszokott módon – a (rész)pontszám 25%-ánál többet ne vonjunk le. ***A továbbjutás feltétele legalább 25 pont elérése!***

$\boxed{1.}$ Adatok: $\Delta t = 15 \text{ min}$, $\Delta t_2 = 10 \text{ min}$, $v_1 = 150 \ \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

A feladat szövegéből kiderül, hogy Anna $\Delta t_1 = 5 \text{ min}$ ideig haladt gördeszkával.

1 pont

A történetet elemezve a következő egyenleteket írhatjuk fel:

(1) Bence mozgására $s = v \cdot \Delta t$,

(2) Anna görkorcsolyázására $\frac{2}{3} \cdot s = v_1 \cdot \Delta t_1$,

(3) Anna sétálására $\frac{1}{3} s = v_2 \cdot \Delta t_2$.

6 pont

a) A nyaralótól a partig vezető út hossza (2) alapján:

$$s = \frac{3}{2} v_1 \cdot \Delta t_1 = \mathbf{1125\ m}.$$

1 pont

b) Az (1) egyenletből adódik Bence sebessége:

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \mathbf{75 \frac{m}{min}}.$$

1 pont

c) Anna sebessége a séta alatt (3) alapján:

$$v_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{\Delta t_2} = \mathbf{37{,}5 \frac{m}{min}}.$$

1 pont

$\boxed{2.}$ Adatok: $r_\text{p} = 110 \text{ cm}$, $r_\text{k} = 183{,}3 \text{ cm}$, $v = 23 \ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

a) A piros autó egy kör megtételekor éri el először a startvonalat, a befutott ívhossz $i_\text{p} = 2\pi r_\text{p}$. Eközben a kék autó ugyanekkora ívet fut be, szögelfordulása tehát:

$$\alpha_\text{k} = \frac{i_\text{p}}{r_\text{k}} = 2\pi \frac{r_\text{p}}{r_\text{k}} = \frac{r_\text{p}}{r_\text{k}} \cdot 360° = \mathbf{216}°.$$

Helyes az a válasz is, hogy a kék autó a startvonalhoz képest 144°-os lemaradásban van.

2 pont

b) Az a) esethez hasonlóan a piros autó szögelfordulása:

$$\alpha_\mathrm{p} = \frac{i_\mathrm{k}}{r_\mathrm{p}} = \frac{r_\mathrm{k}}{r_\mathrm{p}} \cdot 360° = 600°.$$

A piros autó több, mint egy kört tett meg, a helyzetét jellemző szög $600° - 360° = \mathbf{240}°$.

2 pont

c) A piros autó szögsebessége nagyobb, tehát az körözi le a másikat. Keressük azt az időpillanatot, amikor a piros autó szögelfordulása éppen egy teljes szöggel nagyobb a kék autóénál:

$$\alpha'_\mathrm{p} = \alpha'_\mathrm{k} + 2\pi$$

$$\omega_\mathrm{p} t = \omega_\mathrm{k} t + 2\pi$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{p} - \omega_\mathrm{k}} = \frac{2\pi}{\frac{v}{r_\mathrm{p}} - \frac{v}{r_\mathrm{k}}} = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{r_\mathrm{k} \cdot r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{k} - r_\mathrm{p}} = \mathbf{75\ s}.$$

3 pont

Ebben a pillanatban a kék autó szögelfordulása:

$$\alpha'_\mathrm{k} = \omega_\mathrm{k} t = \frac{v}{r_\mathrm{k}} t = 2\pi \frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{k} - r_\mathrm{p}} = \frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{k} - r_\mathrm{p}} \cdot 360° = \mathbf{540}°.$$

Éppen a starthellyel szemben történik az első lekörözés, a kék autó másfél, a piros autó pedig két és fél kört tett meg..

2 pont

d) A második lekörözés kétszer ennyi idő elteltével és kétszeres szögelfordulásnál következik be, azaz **150 s elteltével és 1080°-os szögelfordulásnál, a startvonalon**.

1 pont

$\boxed{\textbf{3.}}$ Adatok: $m = 1{,}2\ \mathrm{kg}$, $h = 12{,}8\ \mathrm{m}$, $F = 2{,}4$ N.

a) A párnára ható erők iránya és nagysága időben állandó, tehát az erők eredője is. Mivel nincs kezdősebesség, ezért **egyenes vonalú** (egyenletesen gyorsuló) **mozgás jön létre** az eredő erővel párhuzamosan.

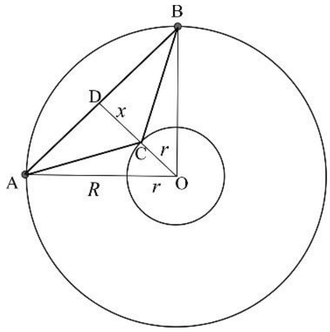
4 pont

b) A párna $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}6$ s alatt esik le. **2 pont**

Eközben vízszintes irányba $a = \frac{F}{m} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{s^2}$ gyorsulással $x = \frac{a}{2} t^2 = \mathbf{2{,}56}$ **m-t mozdul el a fallal párhuzamosan**.

4 pont

$\boxed{4.}$ Adatok: $R = 4468$ km; $t_1 = 14$ óra 52 perc 23 s; $t_2 = 15$ óra 12 perc 43 s; $t_3 = 15$ óra 19 perc 23 s.



Készítsünk vázlatot! Jelöljük a becsapódási pontot az egyenlítőn A-val, a műszert a póluson B-vel, az égitest sugara legyen R, belső magjának sugara pedig r. Az elsőként észlelt hullámok az AB úton, a később észleltek az ACB úton, a magról visszaverődve érnek a műszerhez.

Az AB úton terjedő hullámok
$\Delta t_1 = t_1 - t_2 = 20$ perc 20 s $= 1220$ s,
az ACB úton terjedők
$\Delta t_2 = t_1 - t_3 = 27$ perc $= 1620$ s alatt érnek a műszerhez.

2 pont

Az AB távolság az AOB derékszögű háromszögből $\sqrt{2} \cdot R = 6319$ km, a hullámok sebessége pedig:

$$v = \frac{\sqrt{2} \cdot R}{\Delta t_1} = \frac{6319\text{km}}{1220s} = 5{,}18\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

2 pont

A magról visszaverődő hullámok tehát az ACB útvonalon haladva
$v \cdot \Delta t_2 = 5{,}18\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 1620\ s = 8390$ kilométert tesznek meg, így AC = 4195 km.

2 pont

Az ACD háromszögre felírhatjuk a Pitagorasz-tételt**.**
Használjuk fel, hogy AD $= \frac{\sqrt{2}}{2}R = 3159$ km, így $x = \sqrt{4195^2 - 3159^2} = 2760$ km.
Mivel az AOD háromszög egyenlő szárú, ezért DO = AD $= x + r = 3159$ km.
Ebből **az égitest magjának sugara** $r = 3159\text{ km} - 2760\text{ km} = 399\text{ km} \approx \mathbf{400\ km}$.

4 pont

$\boxed{5.}$ Adatok: $v_0 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}},\ h = 1{,}8\text{ m},\ \mu = 0{,}45,\ a = 5\frac{\text{m}}{s^2}$.

a) A fékező teherautóban addig nem csúszik meg az anyacsavar, amíg a tapadási erő biztosítani tudja számára a járművével megegyező lassulást. Mivel a tapadási erő legnagyobb értéke esetünkben μmg, ezért az általa elérhető legnagyobb lassulás $\mu g = 4{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
4,5 m/s²-nél nagyobb lassulás esetén az anyacsavar megcsúszik. **3 pont**

b) Az anyacsavar $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}6$ s alatt esik le, esése közben a szabadon mozgó anyacsavar $v_0 t = 3$ m-rel jut előbbre. **3 pont**

A teherautó sebessége $v_0 = 5\text{ m/s}$-ról $v_0 - at = 2\text{ m/s}$-ra csökken, vagyis az átlagsebessége $\bar{v} = 3{,}5\text{ m/s}$ az anyacsavar esési ideje alatt. Tehát a teherautó csak $\bar{v}t = 2{,}1$ m-t tesz meg.
Így az anyacsavar **a polc lábától 90 cm-re ér talajt**.

4 pont

Megjegyzés: gyorsuló rendszerben gondolkodva az 5 m/s²-tel előrefelé gyorsuló anyacsavar vízszintes irányú elmozdulása $\frac{a}{2}t^2 = 0{,}9$ m, megegyezően az inerciarendszerbeli megoldással. **(4 pont)**

42. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
I. forduló feladatainak megoldása
IV. kategória
(akik ebben a tanévben második éve tanulják a fizikát technikumban)

A feladatok helyes megoldása maximálisan 10 pontot ér. A javító tanár belátása szerint a 10 pont az itt megadottól eltérő formában is felosztható. Egy-egy feladatra adott második megoldás vagy a probléma általánosítása nem honorálható további pontokkal. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldás természetesen értékelendő. Számolási hibáért – az érettségi dolgozatok javításánál megszokott módon – a (rész)pontszám 25%-ánál többet ne vonjunk le. ***A továbbjutás feltétele legalább 25 pont elérése!***

1. Legyen az esés ideje *t*. A szabadesés törvényét három esetre felírva (az időegység másodperc):

$$h = \frac{g}{2}t^2,$$
$$h_1 = \frac{g}{2}(t-2)^2,$$
$$h_2 = \frac{g}{2}(t-1)^2.$$

A feltétel szerint:

$$\frac{5}{16}h = h_2 - h_1.$$

4 pont

Ezekből:

$$\frac{5}{16}\cdot\frac{g}{2}t^2 = \frac{g}{2}(t-1)^2 - \frac{g}{2}(t-2)^2,$$
$$\frac{5}{16}t^2 = 2t - 3,$$
$$5t^2 - 32t + 48 = 0 \qquad \rightarrow \qquad (t-4)(t-2{,}4) = 0.$$

A két lehetséges megoldás:

$$t_1 = 4\ \text{s} \quad \text{és} \quad t_2 = 2{,}4\ \text{s}.$$

4 pont

A lehetséges átlagsebességek:

$$v_{1á} = \frac{h}{t_1} = \frac{gt_1}{2} = \mathbf{20\ \frac{m}{s}} \qquad \text{és} \qquad v_{2á} = \frac{h}{t_2} = \frac{gt_2}{2} = \mathbf{12\ \frac{m}{s}}.$$

2 pont

<u>Megjegyzések</u>*:* (1) Az egyik megoldást találgatással is megkaphatjuk, ha felhasználjuk Galilei szabályát a kezdősebesség nélkül indított, egyenletesen gyorsuló testek mozgására: az egymást követő másodpercekben megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok. Az első négy páratlan szám: 1, 3, 5 és 7, ezek összege 16, vagyis a harmadik másodpercben a teljes út 5/16 részét teszi meg a test. Így teljesül a példában leírt feltétel, a mozgás 4 s-ig tart, a végsebesség 40 m/s, az átlagsebesség pedig ennek a fele.

(5 pont)

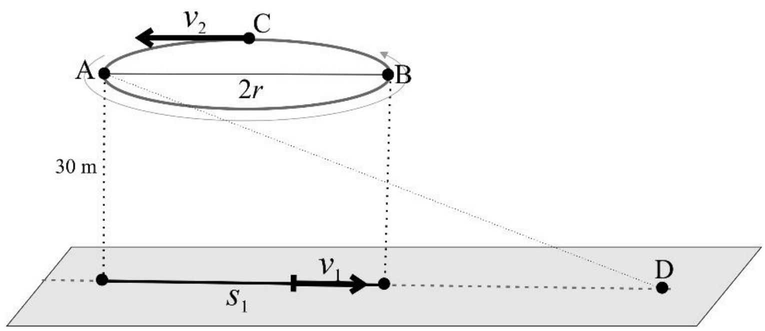
(2) Mindkét megoldást megkaphatjuk az általánosan felírt három egyenlet nélkül, ha lépésről lépésre haladunk. A leérkezéskor a végsebesség $v = \sqrt{2gh}$ (ennek fele a kérdéses átlagsebesség), és ebből a h magasságot így fejezhetjük ki: $h = \frac{v^2}{2g}$. Ha a sebességet m/s-ban értjük, akkor 1 s-mal a leérkezés előtt a sebesség $v - 10$, míg 2 s-mal a becsapódás előtt $v - 20$. Ezek szerint az utolsó előtti másodpercben a test átlagsebessége $v - 15$ volt, ami számértékre megegyezik $\frac{5}{16}h$-val (hiszen 1 s-mal kell osztanunk). Így a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$v - 15 = \frac{5}{16}h = \frac{5}{16}\cdot\frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{64} \quad \rightarrow \quad v^2 - 64v + 960 = 0 \quad \rightarrow \quad (v-40)(v-24) = 0,$$

melynek két megoldása van, és ezeknek az értékeknek a fele adja a feladat két lehetséges megoldását m/s egységben.

(10 pont)

2. Adatok: $v_1 = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ h = 30\ \mathrm{m},\ t = 9\ \mathrm{s}.$



a) A kezdeti pillanatban és 9 másodperccel később a sólyom éppen a gyerek fölött van. Ez a két pont a körpálya út fölé eső átmérőjének két végpontja (A és B). Ezért az átmérő egyenlő a gyerek által megtett úttal:

$$2r = s_1 = v_1 \cdot t = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 9\ \mathrm{s} = 36\ \mathrm{m}\,.$$

2 pont

A vizsgált időtartam alatt a sólyom az A-B-C körüljárási irány szerint az A-ból a B pontba jut úgy, hogy közben fél vagy másfél kört tesz meg. Újabb 9 s elteltével – mindkét esetben – az A pontban lesz. Eközben a gyerek további 36 métert megtéve a D pontba jut.
A görkorcsolyák a talajon vannak, ezért a madártól való távolságuk Pitagorász tételével határozható meg:

$$d = \sqrt{h^2 + (2\cdot s_1)^2} = \mathbf{78\ m.}$$

3 pont

b) A legnagyobb relatív sebesség akkor adódik, amikor a vándorsólyom a C ponton halad át, hiszen ekkor a sebességvektora a gyerekével ellentétes irányú.

1 pont

Meghatározásához külön kell kezelni azt a két esetet, melyek szerint fél, illetve másfél kört tesz meg addig a madár.
- Fél kör esetén a sólyom sebessége: $v_2 = \frac{r\pi}{t} \approx 6{,}28\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$

A madár gyerekhez viszonyított sebessége: $v_{2,1} = v_1 + v_2 \approx \mathbf{10,28}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$.

2 pont

- Másfél kör esetén a sólyom sebessége: $v_2' = \frac{3 \cdot r\pi}{t} \approx 18{,}85\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Ekkor a madár gyerekhez viszonyított sebessége: $v_{2,1}' = v_1 + v_2' \approx \mathbf{22,85}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$. **2 pont**

$\boxed{3.}$ Adatok: $m_\mathrm{p} = 9$ kg, $m_\mathrm{t} = 6$ kg, $m_\mathrm{k} = 1$ kg, $h = 1{,}25$ m, $d = 8$ m, $\Delta t = 10$ s.

a) A vízszintes hajítás adataiból meghatározható az oltóanyag indulási sebessége.

A hajítás ideje $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}5$ s, a hajítás sebessége $v_0 = \frac{d}{t} = 16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. **3 pont**

Vízszintes irányban az oltóanyag lendületváltozásáért felelős erő ellenerejét kell ellensúlyozni:

$$F_\mathrm{x} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{m_\mathrm{t} \cdot v_0}{\Delta t} = \mathbf{9,6\ N}.$$

3 pont

b) Amikor a palackot a súrlódásmentesen mozgó kocsira szereljük, a rendszer gyorsulása az állandó tolóerő és a pillanatnyi össztömeg hányadosa.

A kezdeti pillanatban: $a_0 = \frac{F_\mathrm{x}}{m_\mathrm{p} + m_\mathrm{k}} = \frac{9{,}6\ \mathrm{N}}{10\ \mathrm{kg}} = \mathbf{0,96}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$.

A palack teljes kiürülését megelőző pillanatban: $a_1 = \frac{F_\mathrm{x}}{m_\mathrm{p} + m_\mathrm{k} - m_\mathrm{t}} = \frac{9{,}6\ \mathrm{N}}{4\ \mathrm{kg}} = \mathbf{2,4}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$. **4 pont**

$\boxed{4.}$ Adatok: $D = 100$ N/m, $\rho_\mathrm{v} = 1000$ kg/m^3, $\rho_\mathrm{a} = 2700$ kg/m^3, $\Delta x = 5$ cm.

a) Az alumíniumdarabot vízbe lógatva a rugóerő növekedése egyenlő a felhajtóerővel:

$$D \cdot \Delta x = \rho_\mathrm{v} V g.$$

Innen az alumíniumdarab térfogata:

$$V = \frac{D \cdot \Delta x}{\rho_\mathrm{v} g} = 0{,}0005\ \mathrm{m}^3.$$

5 pont

Az alumíniumdarab tömege pedig $m = \rho_\mathrm{a} V = \mathbf{1,35\ kg}$. **2 pont**

b) A fonálerő az alumíniumdarabra ható nehézségi és felhajtóerő különbsége:

$$F = mg - \rho_\mathrm{v} V g = \mathbf{8,5\ N}.$$ **3 pont**

$\boxed{5.}$ Adatok: $p_1 = 1{,}2$ atm, $T_1 = 7$ °C $= 280$ K, $T_2 = 27$ °C $= 300$ K, $p_3 = 1{,}25$ atm.

a) A lufiba zárt levegő izochor állapotváltozáson menne keresztül, ha a bezárt gáz térfogata nem változna. Gay-Lussac második törvénye alapján:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \rightarrow \quad p_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot p_1 = \mathbf{1,29\ atm}.$$

5 pont

b) Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt és fejezzük ki a $\frac{V_2}{V_1}$ arányt:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_2}{T_2} \quad \rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_3} \cdot \frac{T_2}{T_1} \approx 1{,}029.$$

A lufi térfogata kb. **2,9%-kal nőtt**. **5 pont**