A 2023. évi Mikola 2. forduló megoldásai:

I. kategória, 9. gimnázium

1)

Megoldás:

Adatok: $F_1 = 50$ N, $F_2 = 150$ N, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 45°$, $\alpha_3 = 60°$.

a) A ferdén lefelé kifejtett F erő függőleges komponense növeli a nyomóerőt, és így a tapadási súrlódási erő maximális értékét:

$$F_{\mathrm{ny}} = mg + F \cdot \sin\alpha,$$

$$F_{\mathrm{ts,max}} = \mu_0 F_{\mathrm{ny}} = \mu_0(mg + F \cdot \sin\alpha).$$

A láda akkor mozdul meg, ha az F erő vízszintes komponense eléri a tapadási súrlódási erő maximumát:

$$F \cdot \cos\alpha = \mu_0(mg + F \cdot \sin\alpha)\,. \qquad (1)$$

Helyettesítsük be két esetben a megadott adatokat ebbe az összefüggésbe!

$$50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \mu_0\left(10 \cdot m + 50 \cdot \frac{1}{2}\right),$$

$$150 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \mu_0\left(10 \cdot m + 150 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

A két egyenletet elosztva egymással meghatározható a láda tömege:

$$m = \frac{6\sqrt{3} - 6 + 3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \approx 3{,}1 \text{ kg}.$$

Visszahelyettesítéssel pedig megkapjuk a tapadási súrlódási együttható értékét:

$$\mu_0 \approx 0{,}77.$$

b) Ebben az esetben fejezzük ki az (1) egyenletből az F erőt:

$$F = \frac{\mu_0 mg}{\cos\alpha - \mu_0 \sin\alpha} \approx -143 \text{ N}.$$

Ez ellentmondás, tehát a vízszinteshez képest ferdén lefelé 60°-os szögben irányuló erővel nem lehet megmozdítani a ládát!

2)

Megoldás:

Adatok: L = 30 cm, M = 0,2 kg, l = 60 cm, m = 0,1 kg, α = 30°.

Az m tömeg mozgását kúpinga mozgásnak nevezzük, mert a fonál egy egyenes kúp palástjának alkotójaként „rajzolja körbe” egy képzeletbeli kúp felszínét. Az m tömegre a nehézségi erőn kívül csak a fonálerő hat, a két erő vektori összege biztosítja az m tömegű test vízszintes síkú, egyenletes körmozgását:

$$mg\mathrm{tg}\alpha = mg\frac{1}{\sqrt{3}} = m\frac{v_1^2}{l\sin\alpha} = m\frac{v_1^2}{l/2} \qquad \to \qquad v_1 = \sqrt{\frac{gl}{2\sqrt{3}}} = 1{,}316\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A fentiek alapján a fonálerőt is meghatározhatjuk:

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\sqrt{3}/2} = 1{,}155\ \mathrm{N}.$$

Ugyanez a fonálerő biztosítja a $M = 2m$ tömegű test körmozgását ($l = 2L$):

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\sqrt{3}/2} = M\frac{v_2^2}{L} \qquad \to \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2mgL}{\sqrt{3}M}} = \sqrt{\frac{gl}{2\sqrt{3}}} = 1{,}316\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Láthatjuk, hogy mindkét test azonos sugarú körpályán, azonos sebeséggel mozog.

Megjegyzés: Általánosan is megoldhatjuk a feladatot:

$$mg\mathrm{tg}\alpha = m\frac{v_1^2}{l\sin\alpha} \qquad \to \qquad v_1 = \sin\alpha\sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}},$$

illetve

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha} = M\frac{v_2^2}{L} \qquad \to \qquad v_2 = \sqrt{\frac{mgL}{M\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{mL}{M}} \cdot \frac{v_1}{\sqrt{l}\sin\alpha}.$$

Látszik, hogy a két sebesség akkor egyezik meg, ha

$$\frac{mL}{Ml} = \sin^2\alpha\ .$$

Ahhoz, hogy a két körpálya sugara megegyezzen, az $L = l\sin\alpha$ feltételnek kell teljesülnie. Ha ez teljesül, és még a sebességeknek az egyezését is szeretnénk, akkor az $m = M\sin\alpha$ feltételnek is fenn kell állnia. Ez tehát azt jelenti, hogy ha a két test azonos körpályán azonos sebességgel mozog, akkor a m/M és a L/l

arányoknak meg kell egyezni, és ennek az aránynak kisebbnek kell lenni, mint 1. Ha megadjuk ezt az arányt, akkor a kúppalást fél nyílásszöge így fejezhető ki:

$$\alpha = \arcsin\frac{m}{M} = \arcsin\frac{L}{l}.$$

3)

Megoldás:

Adatok: v_0 = 2 m/s, s = 1,33 m.

a) A vizsgált szakaszon a testre változó nagyságú erő hat.
Az elején $F_{s1} = \mu mg$; a végén $F_{s2} = 2\mu mg$.
Alkalmazzuk a testre a munkatételt:

$$\sum W = \Delta E_{\text{mozgási}}.$$

A testre változó nagyságú erő hat:

$$-\frac{\mu mg + 2\mu mg}{2} \cdot s = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

A keresett csúszási súrlódási együttható értéke:

$$\mu = \frac{v_0^2}{3 \cdot s \cdot g} = 0{,}1.$$

A vizsgált szakasz elején 0,1; a végén 0,2 a csúszási súrlódási együttható.

b) A vizsgált útszakasz közepén a csúszási súrlódási erő $F_{\text{sk}} = 1{,}5 \cdot \mu mg$.
Alkalmazzuk ismét a munkatételt:

$$-\frac{\mu mg + 1{,}5 \cdot \mu mg}{2} \cdot s = \frac{1}{2}mv_k^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Fejezzük ki a keresett v_{k} sebességet:

$$v_{\text{k}} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2{,}5}{2} \cdot \mu g s} \approx 1{,}52\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Ismét használjuk a munkatételt:

$$\sum W = \Delta E_{\text{mozgási}}.$$

Felhasználhatjuk, hogy a végzett munka most ugyanannyi, mint az a) feladatrészben:

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2,$$

$$v^2 = 2v_0^2,$$

$$v = \sqrt{2} \cdot v_0 \approx 2{,}83\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4)

Megoldás:

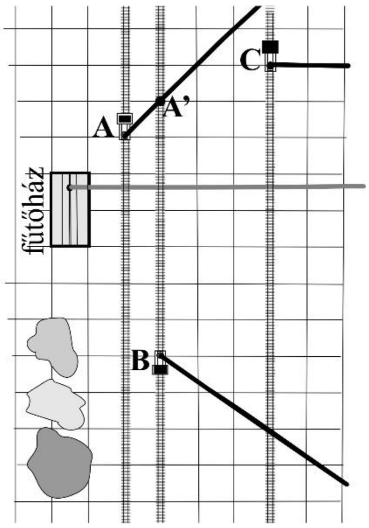
A füstcsíkok irányából a 30 méteres beosztású négyzetrács segítségével meghatározhatjuk a mozdonyok sebességét a szélsebesség ismeretében.

A szél egy rácsosztásnyit, azaz 30 métert 5 másodperc alatt tesz meg. Ez alatt az idő alatt az A mozdony is 30 métert halad előre, vagyis a sebessége

$$v_{\mathrm{A}} = 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A B mozdony 60 métert halad, amíg a szél 90 méterrel sodorja oldalra a füstöt, vagyis 15 másodperc alatt. A sebessége:

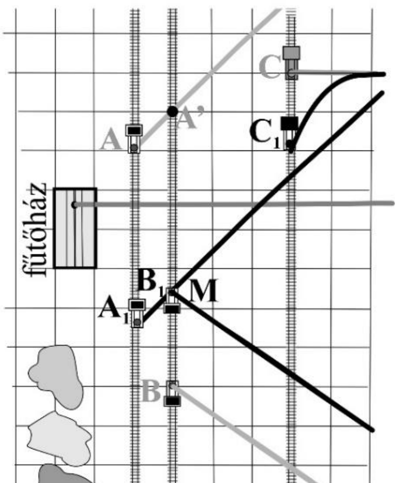
$$v_{\mathrm{B}} = \frac{60\ \mathrm{m}}{15\ \mathrm{s}} = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$



a) A füstcsíkok a mozdonyok sebességével mozogva egymás felé haladnak. A két füstcsík metszéspontja akkor jön létre, amikor a rajzon A'-vel jelölt pont találkozik a B mozdony kéményével. Mivel ezek kezdeti távolsága 210 méter, relatív sebességük a két mozdony sebességének összege, a keresett időpont:

$$t = \frac{210\ \mathrm{m}}{6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 21\ \mathrm{s}.$$

Tehát a két füstcsík a kép elkészülte után 21 másodperccel keresztezte egymást.



b) Az M metszéspont kialakulásának pillanatáról az alábbi vázlatos képet készíthetjük, halványan jelölve a kiinduló állapotot:

Az M és A' távolsága annyi, amekkora utat 21 másodperc alatt az A mozdony megtett az A_1 pontba érve:

$$MA' = 6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 21\mathrm{s} = 126\ \mathrm{m}.$$

Ezután az M pont jobbra sodródik. A három füstcsík akkor keresztezheti egymást egy pontban, ha a C mozdony abban a pillanatban, amikor az M pont eléri a C vágányt, maga is ebbe a pontba ér.

Az M pont a C vágányt 90 méter megtétele után, 15 másodperc alatt éri el. A C mozdony indulása óta eddig a pillanatig eltelt idő:

$$t_{\mathrm{C}} = 21\ \mathrm{s} + 15\ \mathrm{s} = 36\ \mathrm{s}$$

A C mozdony összes megtett útja:

$$s_{\mathrm{C}} = MA' + 30\ \mathrm{m} = 156\ \mathrm{m}.$$

A C mozdony ez idő alatt nyugalomból indulva egyenletesen gyorsult, így a négyzetes úttörvényből meghatározhatjuk a gyorsulását:

$$\mathrm{a_C} = \frac{2s_C}{t_C^2} = 0{,}24\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Megjegyezhetjük, hogy a C mozdony füstcsíkja parabola alakú lesz, de ennek nincs szerepe a megfontolásainkban.

II. kategória, 10. gimnázium

1)

Megoldás:

Adatok: P = 120 W, m = 80 kg, $\mu_g = 0{,}05$, v_0 = 2 m/s, s = 0,75 m.

a) Vízszintes terepen egyenletesen haladva a megadott feltételek mellett csak a gördülési súrlódás ellenében kell munkát végezni, ezért

$$v_1 = \frac{P_1}{F_1} = \frac{P_1}{\mu m g} = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) A 10%-os emelkedőn kifejtett erő:

$$F_2 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha.$$

A szögfüggvényértékek:

$$\sin\alpha = \frac{10}{100} = 0{,}1\,; \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{100^2 - 10^2}}{100} \approx 1.$$

Amennyiben a sebesség változatlan, a teljesítmények aránya:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\mu} \approx 3.$$

c) Amikor a teljesítmény visszaesik az eredeti értékre:

$$P_3 = P_1,$$

$$(mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)v_3 = \mu mg v_1,$$

$$v_3 = \frac{\mu v_1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

2)

Megoldás:

a) A süllyedésre felírva a munkatételt:

$$\Sigma W = \Delta E_{\mathrm{kin.}},$$

$$mgl_0 - \tfrac{1}{2} D\,(\Delta l)^2 = 0 - 0,$$

$$m = \frac{D(\Delta l)^2}{2gl_0}\,.$$

Δl meghatározása:

$$\Delta l = \sqrt{2}\, l_0 - l_0 = l_0\,(\sqrt{2} - 1),$$

$$\Delta l = 0{,}166 \text{ m}.$$

Ezt az előző egyenletbe helyettesítve:

$$m = 0{,}034 \text{ kg}.$$

b) Az emelkedésre felírva a munkatételt

$$\Sigma W = \Delta E_{\text{kin.}},$$

$$-mg2l_0 + \tfrac{1}{2}D\,(\Delta\, l)^2 - \tfrac{1}{2}D\,(\Delta\, l)^2 + EQ2l_0 = 0 - 0,$$

$$Q = \frac{mg}{E}\,.$$

$$Q = 8{,}5 \cdot 10^{-7}\text{C}.$$

c) Mivel $mg = EQ$, ez az előző egyenletből látszik, és az irányuk ellentétes, az erők eredője a rugó vízszintes helyzetében lesz zérus, tehát itt lesz az emelkedés során a sebesség maximális. A munkatételt alkalmazva a legalsó pont és a középső pont által meghatározott szakaszra az emelkedés során:

$$\Sigma W = \Delta E_{\text{kin.}},$$

$$\tfrac{1}{2}D\,(\Delta\, l)^2 = \frac{1}{2}\,mv_{\text{max.}}^2,$$

$$v_{\text{max.}} = \Delta l\,\sqrt{\frac{D}{m}}\,,$$

$$v_{\text{max.}} = 2{,}85\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Az előző egyenletekben felhasználtuk, a gravitációs és az elektromos erő munkája egymásnak ellentettje.

Az emelkedés indulási gyorsulásának meghatározásához írjuk fel a dinamika alapegyenletét az úttal párhuzamosan:

$$D\Delta l\cos 45^\circ = ma_{\text{ind..}},$$

$$a_{\text{ind.}} = \frac{D\Delta l\cos 45^{\text{o}}}{m}\,,$$

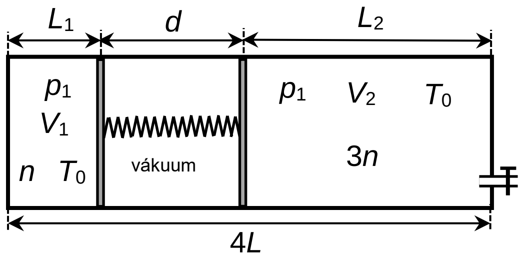
$$a_{\text{ind.}} = 34{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

Az egyenlet felírásánál felhasználtuk $mg = EQ$.

3)

Megoldás:

a) A rugó minden helyzetben azonos nagyságú erőt fejt ki a dugattyúkra, ezért a gázok nyomásai minden helyzetben azonosak. Legyen ez kezdetben p_0, a levegő befújása után p_1! Legyen kezdetben a gázok térfogata $V_0 = LA$, a végállapotban $V_1 = L_1 A$ és $V_2 = L_2 A$, rugó összenyomódása kezdetben y_0, a végállapotban $y_1 = 1{,}5 y_0$. A rendszer állandó T_0 hőmérsékleten van. A gázok nyomása, térfogata, hőmérséklete a kezdő állapotban megegyezik, ezért azonos az anyagmennyisége is. Legyen ez n mól!



Az állapotegyenleteket felírva:

$$p_0 V_0 = nRT_0,$$

$$p_1 V_1 = nRT_0,$$

$$p_1 V_2 = 3nRT_0.$$

A térfogatok aránya:

$$\frac{V_2}{V_1} = 3.$$

b) Legyen a dugattyúk távolsága d! Igaz, hogy

$$L_1 + d + L_2 = 4L, \text{ továbbá } L_2 = 3L_1,$$

$$d = 4(L - L_1).$$

A dugattyúk egyensúlyi helyzetéből:

$$p_0 A = D y_0, \text{ és } p_1 A = D \cdot 1{,}5 y_0,$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{3}{2}.$$

A bal oldali gázra felírt Boyle – Mariotte-törvényből:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{LA}{L_1A} = \frac{3}{2},$$

$$L_1 = \frac{2}{3}L = 20\ \text{cm}.$$

A dugattyúk keresett távolsága:

$$d = 4(L - L_1) = \frac{4}{3}L = 40\ \text{cm}.$$

4)

Megoldás:

a) A hasáb hirtelen meglökése után a m tömegű test szabadon kezd esni, tehát a függőleges elmozdulását így írhatjuk le:

$$y = \frac{g}{2}t^2.$$

A 6m tömegű hasáb elmozdulása pedig így adható meg:

$$x = v_0t - \frac{a}{2}t^2 = v_0t - \frac{\mu g}{2}t^2.$$

A fonál akkor feszül meg, ha a két elmozdulás egyenlővé válik ($x = y$):

$$\frac{g}{2}t^2 = v_0t - \frac{\mu g}{2}t^2 \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{2v_0}{g(1+\mu)} = 0{,}2\ \text{s}.$$

b) A fonál megfeszüléséig mindkét test

$$x = y = \frac{g}{2}t^2 = v_0t - \frac{\mu g}{2}t^2 = 0{,}2\ \text{m} = 20\ \text{cm}$$

utat tesz meg. Ezután már egy rendszerként mozognak, tehát közös gyorsulásukat így számíthatjuk ki:

$$mg - 6\mu mg = 7ma_\text{k} \qquad \rightarrow \qquad a_\text{k} = \frac{(1-6\mu)g}{7} = -2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a rendszer lassulni fog, végül megáll.

A feladat legnehezebb része azt meghatározni, hogy a fonál megfeszülésekor mekkora lesz a rendszer közös sebessége. A szabadon eső test 0,2 s alatt $v_1 = gt = 2$ m/s sebességre tesz szert, míg a 6m tömegű hasáb 1,4 m/s-ról indul, lassulása $-\mu g = -4$ m/s^2, vagyis 0,2 s alatt 0,8 m/s-ot veszít a sebességéből, tehát a fonál megfeszülésekor a hasáb sebessége

$$v_2 = v_0 - \mu g t = 0{,}6 \text{ m/s}.$$

Azt kell észrevennünk, hogy a két test között a fonál közvetíti a kölcsönhatást, a m tömegű test lelassul, a $6m$ tömegű pedig felgyorsul, az egész folyamat lényegében egy tökéletesen rugalmatlan ütközésnek felel meg, így a kialakuló közös sebességet így kaphatjuk meg:

$$mv_1 + 6mv_2 = 7mv_\mathrm{k} \qquad \rightarrow \qquad v_\mathrm{k} = \frac{v_1 + 6v_2}{7} = 0{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A közös mozgás időtartama így adható meg:

$$t_\mathrm{k} = \frac{v_\mathrm{k}}{|a_\mathrm{k}|} = 0{,}4 \text{ s}.$$

Ennyi ideig az előzőekben kiszámított közös sebesség fele lesz a rendszer átlagsebessége, tehát a közös mozgás elmozdulása:

$$\Delta s = \frac{v_\mathrm{k}}{2} t_\mathrm{k} = 0{,}16 \text{ m} = 16 \text{ cm}.$$

A hasáb teljes elmozdulása $x + \Delta s = 36$ cm, tehát a hasáb 50 cm – 36 cm = 14 cm-re áll meg a csigától.

III. kategória,

akik ebben a tanévben kezdték tanulni a fizikát technikumban

1)

Megoldás:

Adatok: $g_1 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $g_2 = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Egy elengedett, szabadon eső test által egy bizonyos t idő alatt megtett út:

$$h_1 = \frac{g_1}{2} \cdot t^2,$$

$$h_2 = \frac{g_2}{2} \cdot t^2.$$

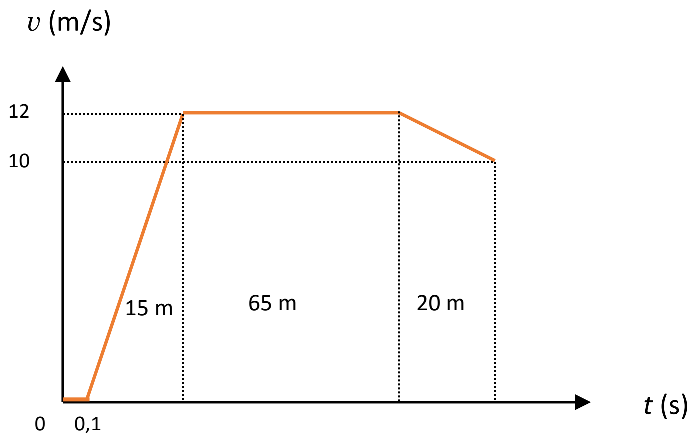
A számolt megtett utak relatív hibája $\frac{h_1 - h_2}{h_2} = \frac{0{,}19}{9{,}81} = 0{,}0194$.

A számításunk hibája 1,94%-os.

2)

Megoldás:

Adatok: $s_1 = 15\ \text{m}$; $s_2 = 65\ \text{m}$; $s_3 = 20\ \text{m}$.



Az adatokat tüntessük fel a v-t grafikonon is, amit egyben a feladat megoldásánál is használhatunk. Feladatunk az egyes szakaszokhoz tartozó időtartamok kiszámolása. Felhasználjuk, hogy a v-t grafikon alatti terület számértéke a megtett utat adja.

$$s_1 = \frac{v_1 \cdot \Delta t_1}{2} \quad \rightarrow \Delta t_1 = \frac{2 \cdot 15\ \text{m}}{12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2{,}5\ \text{s},$$

$$s_2 = v_2 \cdot \Delta t_2 \ \rightarrow \Delta t_2 = \frac{65\ \text{m}}{12\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 5{,}42\ \text{s},$$

$$s_3 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t_2 \ \rightarrow \Delta t_3 = \frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{12 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} + 10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1{,}82 \text{ s.}$$

Az atléta futásának teljes ideje: $t = 0{,}1 \text{ s} + 2{,}5 \text{ s} + 5{,}42 \text{ s} + 1{,}82 \text{ s} = 9{,}84$ s.

3)

Megoldás:

A feladat szövege szerint az egyforma hajók vízhez viszonyított (maximális) sebessége a tavon és a folyón megegyezik, jelöljük *v*-vel.

Az azonosan teletöltött tankokból az azonosan járatott motorok azonos idő alatt fogyasztják el az üzemanyagot. Emiatt a tavon és a folyón járó hajók oda-vissza útjának $t_{\text{tó}}$, illetve $t_{\text{folyó}}$ menetidejére a következőt mondhatjuk:

$$25 t_{\text{tó}} = 21 t_{\text{folyó}}.$$

Jelöljük a két végállomás közötti távolságot d-vel, a folyó sebességét c-vel.

A menetidőkre felírhatjuk, hogy

$$t_{\text{tó}} = \frac{2d}{v}, \qquad\qquad t_{\text{folyó}} = \frac{d}{v+c} + \frac{d}{v-c},$$

vagyis

$$25\frac{2d}{v} = 21\left(\frac{d}{v+c} + \frac{d}{v-c}\right).$$

Az egyenletet egyszerűbb alakra hozva, $2d$-vel egyszerűsítve kapjuk, hogy:

$$25(v^2 - c^2) = 21v^2,$$

amiből $2v = 5c$ adódik, vagyis a keresett arány:

$$\frac{v}{c} = 2{,}5.$$

4)

Megoldás:

Adatok: $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; a= $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

A ratrakot a tapadási súrlódási erő fogja felfelé gyorsítani a lejtőn.

A jármű mozgásegyenlete a lejtővel párhuzamos irányban:

$$\mu_0 mgcos\alpha - mgsin\alpha = ma.$$

Ebből kifejezhetjük a tapadási súrlódási együtthatót:

$$\mu_0 = \frac{a + \frac{g}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}g} \approx 0{,}81.$$

A ratrak akkor tud felkapaszkodni, ha

$$\mu_0 mgcos\beta \geq mgsin\beta.$$

Ebből a

$$\mu_0 \geq tg\beta = 1$$

feltételt kapjuk.

Mivel ez nem teljesül, ezért a ratrak nem tud a meredekebb szakaszon felkapaszkodni.

IV. kategória,

akik ebben a tanévben második éve tanulják a fizikát technikumban

1)

Megoldás:

Adatok: v_1 = 18 km/h = 5 m/s, v_2 = 108 km/h = 30 m/s, a = 1,25 m/s^2 , Δt = 20 s.

a) A gyorsítás közben megtett útja:

$$s = v_{\text{átl.}} \cdot t = \frac{5 + 30}{2} \cdot 20 \text{ m} = 350 \text{ m}.$$

(Vagy $: s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 5 \cdot 20 \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}25 \cdot 20^2 \text{m} = 100 \text{ m} + 250 \text{ m} = 350 \text{ m}.$)

A nehézgépjármű által eközben megtett út:

$$s_\text{n} = 15 \cdot 20 \text{ m} = 300 \text{ m}.$$

A személyautó még nem tudta behozni a 125 méteres hátrányát, tehát előzéskor a sebessége 108 km/h lesz.

b) Az egyenletes mozgás közben teljen el t_1 idő a találkozásig. A parkolótól mért távolságok egyenlősége miatt (mértékegységek SI-ben):

$$350 + 30t_1 = 300 + 15t_1 + 125,$$

ebből $$t_1 = 5 \text{ s}.$$

Tehát a személyautó 25 s ideig haladt az autópályán, amire utolérte a nehézgépjárművet.

c) A személyautó útja $$s = 350 \text{ m} + 30 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} = 500 \text{ m}.$$

Tehát a parkolótól haladva 500 m utat tett meg a személyautó, mire utolérte a nehézgépjárművet.

2)

Megoldás:

Adatok: $\frac{x}{h} = 0{,}8$; $\frac{x\prime}{h\prime} = 0{,}6$.

a) A vízsugár vízszintes hajítás pályáját formázza, melynek kezdősebessége a víz v áramlási sebessége.

A h magasságból való esés ideje mindkét esetben a $h = \frac{1}{2}gt^2$ összefüggésből:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

A földre érkezés távolsága eredetileg: $x = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

A földre érkezés távolsága később: $x' = (v - 1) \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

A kérdéses hányadosok értékét felhasználva:

$v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}8 \cdot h$ és $(v - 1) \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}6 \cdot h,$

ebből $\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}2 \cdot h,$ azaz $\frac{2h}{g} = 0{,}04 \cdot h^2$, amiből $h_1 = 0$ m, illetve $h_2 = 5$ m adódik.

A $h = 0$ megoldás fizikai szempontból nem értékes.

A cső 5 m magasan fut.

b) Visszahelyettesítve: $v \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{g}} = 0{,}8 \cdot 5$ innen a víz sebessége $v = 4$ m/s.

c) A földre érkezés távolsága a cső alatti ponttól: $x = 0{,}8 \cdot \mathrm{h} = 4$ m.

3)

Megoldás:

Adatok: L_1 = 60 cm, L_2 = 50 cm.

Legyen a külső légnyomás p_0, az ismeretlen hosszúságú higanyszál hidrosztatikai nyomása $p_{\text{hid.}}$, a cső keresztmetszete A, a keresett hosszúság x! A hőmérséklet állandó, a Boyle-Mariotte-törvényt a vízszintes és a két függőleges helyzetre felírva:

$$p_0 L_1 A = (p_0 + p_{\text{hid.}}) \cdot L_2 A,$$
$$p_0 L_1 A = (p_0 - p_{\text{hid.}}) \cdot xA.$$

Az első egyenletből:

$$p_{\text{hid.}} = \frac{L_1 - L_2}{L_2} p_0 = \frac{1}{5} \cdot p_0.$$

Ezt a második egyenletbe beírva:

$$p_0 L_1 A = \left(p_0 - \frac{L_1 - L_2}{L_2} p_0\right) \cdot xA,$$

$$x = \frac{L_1 L_2}{2L_2 - L_1} = 75 \text{ cm}.$$

4)

Megoldás:

Adatok: $\alpha = 45^\circ$, x_{max} =0,4 m.

a) Használjuk a ferde hajítás távolságára vonatkozó összefüggést:

$$x_{\text{max.}} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{g \cdot x_{\text{max.}}} = 2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) A testre most két erő hat: a vízszintessel 45°-ot bezáró elektromos erő: $F_{\text{el.}} = E \cdot q = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot mg$, valamint függőlegesen lefelé: $F_{\text{neh.}} = mg$.

Ez alapján a test gyorsulásának két komponense:

$$a_y = \frac{mg - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot mg}{m} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot g = 5 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad a_x = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot mg}{m} = \frac{1}{2} \cdot g = 5 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A hajítás ideje: $t = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{a_y} \approx 0{,}566$ s.

A hajítás távolsága: $x = (v_0 \cdot \cos\alpha)t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2 = 1{,}6$ m. (Pontosan 4-szer messzebb repül a test az elektromos erő hatására, mint amennyire anélkül.)