2022. évi Mikola 2. forduló megoldásai:
I. kategória, 9. gimnázium

A 2022. évi Mikola Verseny második fordulójának feladatait **Nagy Márton** (1932-2021) tanár úr emlékének ajánljuk. Marci bácsi 30 éven keresztül volt a verseny főszervezője.

1)

Megoldás:

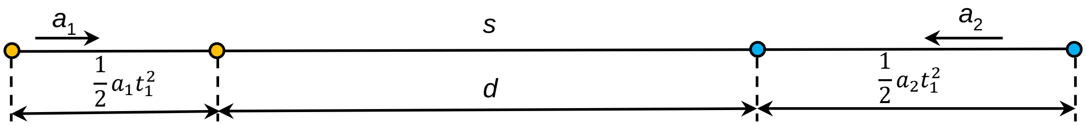
a)

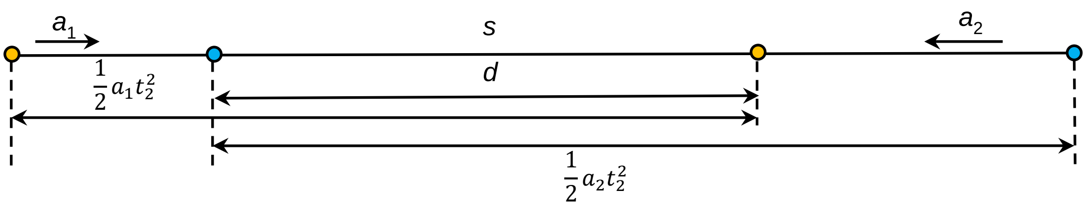
Legyen az autók kezdeti távolsága s, a gyorsulásuk a_1 és a_2, a találkozásig megtett utak s_1, s_2 a találkozásig eltelt idő t_0!

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1 t_0^2, \quad s_2 = \frac{1}{2}a_2 t_0^2.$$

Ezekből:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{3}.$$





Az ábrák alapján:

$$s = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + \frac{1}{2}a_2 t_1^2 + d,$$

$$s = \frac{1}{2}a_1 t_2^2 + \frac{1}{2}a_2 t_2^2 - d.$$

Ezekből:

$$\frac{1}{2}a_1 t_1^2 + \frac{1}{2}a_2 t_1^2 + 2d = \frac{1}{2}a_1 t_2^2 + \frac{1}{2}a_2 t_2^2,$$

$$a_1 + a_2 = \frac{4d}{t_2^2 - t_1^2} = 3{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$a_1 + \frac{4}{3}a_1 = \frac{4d}{t_2^2 - t_1^2} = 3{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A keresett gyorsulások:

$$\boxed{a_1 = \frac{3}{7}\cdot\frac{4d}{t_2^2 - t_1^2} = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{4}{7}\cdot\frac{4d}{t_2^2 - t_1^2} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$$

b)

Az autók kezdeti távolsága:

$$\boxed{s = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + \frac{1}{2}a_2 t_1^2 + d = 70\ \mathrm{m}.}$$

c)

A beérkezési sebességek:

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s}, \qquad v_2 = \sqrt{2a_2 s}.$$

A keresett arány:

$$\boxed{\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15}$$

2)
Megoldás:

a)
A súrlódásmentes esetre alkalmazhatjuk az energiamegmaradás törvényét:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh.$$

Súrlódás esetén: $v_2 = 1,2\cdot v_1$.

Alkalmazzuk a munkatételt: $-mgh - \mu\left(mg\cos\alpha\right)\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = 0 - \frac{1}{2}mv_2^2$.

A fenti három egyenlet felhasználásával adódik:

$$\frac{1}{2}v_2^2 = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{\mu}{tg\alpha}\cdot\frac{1}{2}v_1^2,$$

$$\left(1,2\cdot v_1\right)^2 = v_1^2\cdot\left(1 + \frac{\mu}{tg\alpha}\right),$$

$$1,44 = 1 + \frac{\mu}{tg\alpha},$$

$$\mu = 0,44 \cdot tg\alpha = 0,25.$$

b)
A súrlódásmentes lejtő aljára energiaveszteség nélkül 10 m/s sebességgel érkezik a test.

A súrlódásos lejtőn visszacsúszik a test, mert $\mu < tg\alpha$.
Ismét alkalmazzuk a munkatételt a teljes oda-vissza útra:

$$2 \cdot \left[-\mu \left(mg\cos\alpha \right) \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \right] = \frac{1}{2} m\upsilon_3^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_2^2,$$

$$1,44 \cdot \upsilon_1^2 - \upsilon_3^2 = 4\mu \cdot \frac{1}{2} \upsilon_1^2 \cdot \frac{1}{tg\alpha} = 2 \cdot \upsilon_1^2 \cdot 0,44,$$

$$\upsilon_3^2 = 0,56 \cdot \upsilon_1^2,$$

$$\upsilon_3 \approx 0,75 \cdot \upsilon_1 \approx 7,5 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Megjegyzés: A feladat dinamikai úton is megoldható.

3)

Megoldás:

a)

Alkalmazzuk a munkatételt a megfigyelt két részfolyamatra.

$$\sum W = \Delta E_{\mathrm{mozg.}},$$

$$(1) \;\; -mgH + W_{\text{köz}} = 0 - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2,$$

$$(2) \;\; mgH^* + W_{\text{köz}}^{'} = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 - 0.$$

Mindkét egyenletből fejezzük ki a közegellenállási erő munkáját, majd vegyük a hányadosukat:

$$\frac{W_{\text{köz}}}{W_{\text{köz}}^*} = \frac{mgH - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2}{\frac{1}{2} m\upsilon_0^2 - mgH^*} = \frac{gH - \frac{1}{2}\upsilon_0^2}{\frac{1}{2}\upsilon_0^2 - gH^*} = \frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4,4\,\mathrm{m} - \frac{1}{2} \cdot \left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot \left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5,9\,\mathrm{m}} = \frac{-6}{-9} = \frac{3}{5}.$$

b)
Az (1) és (2) egyenleteket összeadva, majd az így kapott egyenletet rendezve kapjuk:

$$W_{\text{köz}} + W_{\text{köz}}^{'} = mg\left(H - H^{*'} \right) = 0,6\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(-1,5\,\mathrm{m} \right) = -16\,\mathrm{J}.$$

c)

Amikor az labda emelkedik, a gyorsulása a kezdeti $g+\frac{C\cdot v_0^2}{m}$ értékről csökken g-re. Amikor a labda süllyed, a gyorsulása a kezdeti g értékről csökken $g-\frac{C\cdot v_0^2}{m}$-re. A labda átlagos gyorsulása g-nél nagyobb emelkedéskor, és g-nél kisebb süllyedéskor. Emiatt a süllyedés tovább tart, mint a süllyedés.

4)

Megoldás:

a)

A fonál a függőlegessel 60° -ot zár be. Az ingatestet a fonálerő vízszintes összetevője tartja körpályán:

$$K\sin\alpha = m\frac{v^2}{r},$$

$$K = \frac{mv^2}{r\cdot\sin\alpha} = \frac{mv^2}{r^2}L = \frac{mv^2}{L^2-h^2}L = 0{,}133\text{ N}.$$

b)

A centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{\sqrt{L^2-h^2}} = 1{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Függőleges irányban nincs gyorsulás, ezért:

$$N + K\cos\alpha = mg.$$

Az érintő irányú gyorsulást (lassulást) a súrlódási erő okozza:

$$a_{é} = \frac{\mu N}{m} = \frac{\mu(mg-K\cos\alpha)}{m} = \mu\left(g - \frac{v^2}{L^2-h^2}h\right) = 4{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Az eredő gyorsulás:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_{é}^2} = 4{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c)

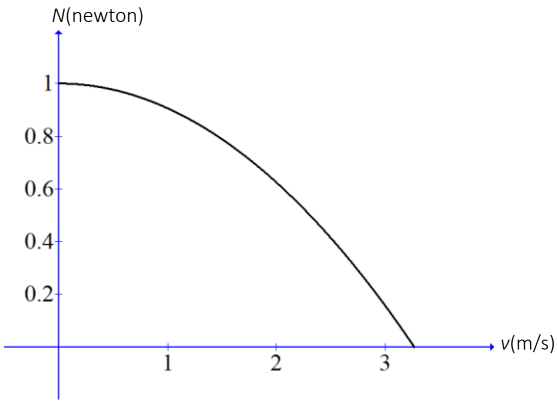
A nyomóerő:

$$N = mg - K\sin\alpha = mg - \frac{mv^2}{L^2-h^2}h.$$

Az SI-ben vett adatokkal az erőt newtonban kapjuk:

$$N = 1 - 0{,}066v^2$$

d) A zérushely $v = \sqrt{\frac{1}{0{,}066}} \approx 3{,}87\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, ennél nagyobb kezdősebesség esetén a test elválik a felülettől.

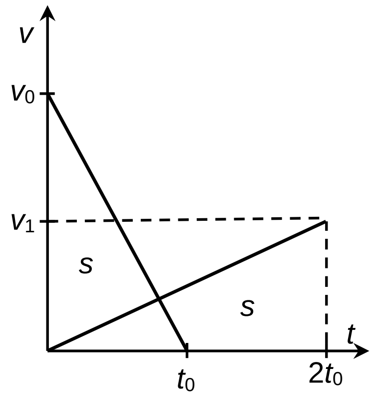


II. kategória, 10. gimnázium

1)

Megoldás:

Legyen a lejtő hajlásszöge α, a kezdősebesség v_0, a leérkezés sebessége v_1, a felfelé haladás ideje t_0! Ábrázoljuk a mozgásokat közös sebesség-idő diagramon! Mivel a megtett utak egyenlők:



$$\frac{v_0 t_0}{2} = \frac{v_1 . 2t_0}{2},$$

$$v_1 = \frac{v_0}{2}.$$

A felfelé mozgás során a lassulás:

$$a_1 = \frac{v_0}{t_0} = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

A lefelé mozgás során a gyorsulás:

$$a_2 = \frac{v_1}{2t_0} = \frac{v_0}{4t_0} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Ezekből:

$$a_1 = 4a_2,$$

$$g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 4g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

$$3\sin\alpha = 5\mu\cos\alpha,$$

$$\tan\alpha = \frac{5}{3}\mu = 1.$$

A lejtő hajlásszöge:

$$\boxed{\alpha = 45^{\circ}.}$$

Megjegyzés: A v_0 és v_1 sebességek arányának ismeretében a hajlásszög a munkatétel alapján is könnyen meghatározható.

2)

Megoldás:

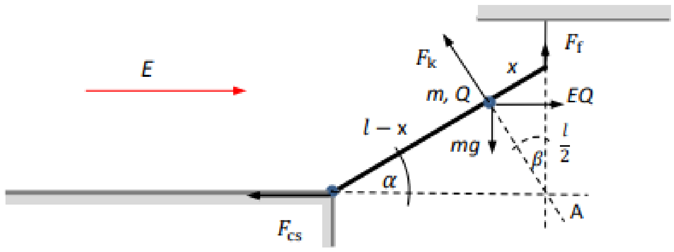
a)

A gyöngyöt az elektromos és a gravitációs erő rúdirányú komponense gyorsítja:

$EQ{\cdot}\cos 30° - mg{\cdot}\cos 60° = m{\cdot}a$.

Behelyettesítve adódik:

$a = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.



b)

Felhasználható, három nem párhuzamos erő egyensúlya esetén a hatásvonalak egy pontban metszik egymást. A rúdra ható erők F_{cs}, F_f és az F_k ellenereje, így a hatásvonalak az A pontban metszik egymást. A merőleges szárú szögek miatt $\beta = \alpha$ felhasználásával:

$$\sin 30° = \frac{x}{\frac{l}{2}}, \text{ behelyettesítve, } x = 0{,}1\cdot\sqrt{3}\ \mathrm{m}.$$

Ezt felhasználva:

$$l - x = 0{,}3\cdot\sqrt{3} \approx 0{,}52\text{m}.$$

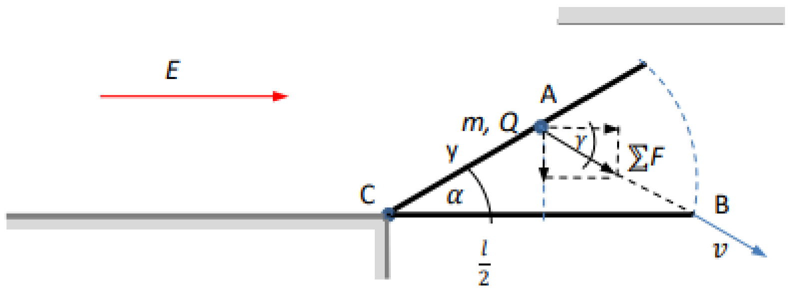
Tehát a gyöngy a csuklótól 0,52 m távolságban található ebben a pillanatban.

Az eltelt idő meghatározása:

$$l - x = \frac{a}{2}\,(\Delta t)^2,$$

$$\Delta t = 0{,}32 \text{ s}.$$

c/ Mivel a rúd tömege elhanyagolható, azaz nincs tehetetlensége (nem áll ellen a mozgásállapot változtatásnak), így a gyöngyre most nem gyakorol erőt, ezért a gyöngy a gravitációs és az elektromos erő eredőjének egyenesén konstans gyorsulással mozog.



Az eredő iránya:

$$\text{tg}\gamma = \frac{mg}{EQ},$$

$$\gamma = 30°.$$

Az előző egyenletet felhasználva, $\sum F$ a rúd eredeti helyzetével 60°-os szöget zár be. Így az ABC háromszög A pontnál lévő szöge 120°, a B pontnál lévő szöge 30°, tehát a háromszög egyenlő szárú. Legyen a kérdezett pont csuklótól mért távolsága y. Az ábra alapján:

$$\cos 30° = \frac{l}{2y},$$

$$y = 0{,}4 \text{ m}.$$

A sebesség:

$$v = \sqrt{2ay}, \text{ ahol}$$

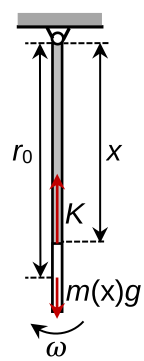
$$a = \frac{\sum F}{m}, \text{ és } \sum F = \sqrt{(mg)^2 + (EQ)^2} = 0{,}2\cdot\sqrt{3}\text{ N, tehát } a = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{, vagyis}$$

$$v = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3)

Megoldás:

a)



Vizsgáljuk a kérdést általánosan! Legyen a forgástengelytől x távolságban lévő pontban a rúdban ébredő erő K! Vizsgáljuk az

$$m(x) = \frac{m}{L}\cdot(L - x)$$

tömegű rúddarab mozgását! A tömegközéppontjának a forgástengelytől mért távolsága:

$$r_0 = x + \frac{L - x}{2} = \frac{L + x}{2}.$$

A rúd pontjainak szögsebessége: $\omega = \frac{v_0}{L}$.

A dinamika alapegyenletét felírva:

$$m(x)r_0\omega^2 = K - m(x)g,$$

$$K = m(x)[g + r_0\omega^2],$$

$$K = \frac{m}{L}\cdot(L-x)\cdot\left[g + \frac{L+x}{2}\cdot\frac{v_0^2}{L^2}\right],$$

$$K = \frac{L-x}{L}\cdot mg + \frac{L^2-x^2}{2L^2}\cdot m\cdot\frac{v_0^2}{L}.$$

Az a) esetben $x = \frac{3}{4}L.$

$$K = \frac{1}{4}mg + \frac{7}{32}m\cdot\frac{v_0^2}{L}.$$

Az adatokat beírva: $\boxed{K = \frac{1}{4}\cdot 24\ \mathrm{N} + \frac{7}{32}\cdot 2{,}4\cdot\frac{16}{1{,}2}\ \mathrm{N} = 13\ \mathrm{N}.}$

b)

Ebben az esetben a rúdban ébredő erő $K^* = mg$.

$$mg = \frac{L-x}{L}\cdot mg + \frac{L^2-x^2}{2L^2}\cdot m\cdot\frac{v_0^2}{L},$$

$$gx = \frac{L^2-x^2}{2L^2}v_0^2,$$

$$x^2 + \frac{2gL^2}{v_0^2}\cdot x - L^2 = 0.$$

Az adatokat beírva: $x^2 + 1{,}8x - 1{,}44 = 0.$

Ezt megoldva: $\boxed{x = 0{,}6\ \mathrm{m}.}$ Ilyen adatok esetén éppen a rúd középpontjában ébred *mg* nagyságú erő.

4)

Megoldás:

a)

Mivel a belsőenergia változása:

$$\Delta E = \frac{f}{2}nR\Delta T\,,$$

ezért határozzuk meg az oxigén hőmérsékletét a B állapotban. Ideális gáz állapotegyenlete:

$$pV = nRT\,.$$

Ezt felírva az A és a B állapotra, majd ezeket az egyenleteket egymással elosztva (vagy az egyesített gáztörvény alapján) adódik:

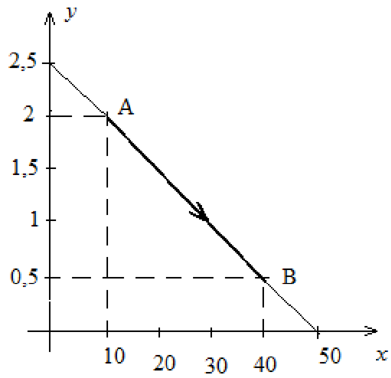
$$\frac{p_A V_A}{p_B V_B} = \frac{T_A}{T_B}\,,$$

amiből

$$T_B = \frac{p_B}{p_A}\frac{V_B}{V_A}T_A = \frac{0,5}{2}\cdot\frac{40}{10}\cdot 320\ \text{K} = T_A\,.$$

Az oxigén hőmérséklete a végállapotban akkora, mint a kezdőben, tehát az energiaváltozás nulla.

b)



Az állapotegyenlet szerint a hőmérséklet akkor maximális, amikor a *pV* szorzat maximális.
Legyen $x = V$, itt a térfogat dm^3-ben mérve, és $y = p$, a nyomás 10^5 Pa-ban mérve.
Az egyenes 10 egységen süllyed felet, tehát az *y* tengelyt 2,5-nél metszi, és egy *x*-hez tartozó *y* értéke: $y = 2,5 - 0,05x$.
Ezzel $xy = x(2,5-0,05x) = 20\cdot 0,05x(2,5-0,05x)$ maximumát keressük, vagyis elegendő $0,05x(2,5-0,05x)$ maximumát keresni. A nemnegatív szorzat megegyezik gyökének a négyzetével. A gyök pedig a két tényező mértani közepe, ami a számtani és mértani középre vonatkozó összefüggés szerint

$$0,05xy = \left(\sqrt{0,05x(2,5-0,05x)}\right)^2 \le \left(\frac{0,05x+(2,5-0,05x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2,5}{2}\right)^2 = \text{állandó}\,.$$

A kifejezésnek tehát van maximuma, mely akkor áll fenn, ha a két tényező egyenlő, vagyis

$$0,05x = 2,5-0,05x\,,$$

$$x = 25 \text{ és } \qquad y = 2,5-0,05x = 1,25\,,$$

ezzel

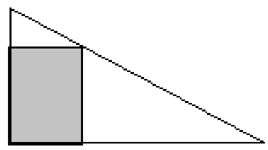
$$V_m = 25\ \text{dm}^3 \qquad \text{és} \qquad p_m = 1,25\cdot 10^5\ \text{Pa}.$$

Az előzőek mintájára a maximális hőmérséklet

$$T_m = \frac{p_m}{p_A}\frac{V_m}{V_A}T_A = \frac{1,25}{2}\cdot\frac{25}{10}\cdot 320\ \text{K} = 500\ \text{K}\,.$$

Tehát a folyamat közben a legnagyobb hőmérséklet 500 K, vagyis 227 °C.

Megjegyzés:



A szélsőérték direktben, az $xy = x(2,5-0,05x) = 2,5x - 0,05x^2$ (vagy ennek megfelelő) másodfokú függvény vizsgálatával is történhet, vagy akár egy derékszögű háromszögbe rajzolható, a befogókkal párhuzamos oldalú, maximális területű téglalap keresésével.

III. kategória,
akik ebben a tanévben kezdték tanulni a fizikát technikumban

1)

Megoldás:

A test sebessége 2 s alatt nullára csökken. A megtett út dél felé:

$$\Delta r_1 = \frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 2\ \mathrm{s}}{2} = 10\ \mathrm{m}.$$

A következő 1 másodpercben már észak felé mozog. A megtett út észak felé:

$$\Delta r_2 = \frac{-5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1\mathrm{s}}{2} = -2{,}5\ \mathrm{m}\ .$$

Az elért sebességgel továbbra is észak felé halad a test, a megtett útja a további 4 másodpercben:

$$\Delta r_3 = -5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 4\ \mathrm{s} = -20\ \mathrm{m}\ .$$

Ezután a sebessége 7,5 másodperc alatt változik 15 m/s-al. Ez azt jelenti, hogy 2,5 s alatt a sebesség nullára csökken. Ezalatt megtett út még mindig észak felé:

$$\Delta r_4 = \frac{-5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 2{,}5\ \mathrm{s}}{2} = -6{,}25\ \mathrm{m}.$$

Ezután már dél felé mozog a test. A következő 5 másodpercvben megtett útja:

$$\Delta r_5 = \frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 5\ \mathrm{s}}{2} = 25\ \mathrm{m}.$$

a)

A 1. mozgásszakasz végén jut a test dél felé a legtávolabb: 10 m.

b)

A 4. mozgásszakasz végén van a test észak felé a legtávolabb:

10 m -2,5 m – 20 m - 6,25 m = -18,75 m.

c)

A test a 3. mozgásszakasz során jut vissza a kiindulási helyére:

$$10\ \mathrm{m} - 2{,}5\ \mathrm{m} - 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot \Delta t = 0\ ,$$

$$\Delta t = 1{,}5\ \mathrm{s}\ .$$

A vizsgálat kezdetétől számítva 4,5 s idővel később ér vissza a kiindulási helyére először a test.

2)

Megoldás:

Adatok: s = 575 m, t = 120 s, v = 5 m/s.

A lift útját felírhatjuk egy egyenletes és két formailag azonos gyorsuló szakaszból. A számértékeket beírva, a fékezés és gyorsítás idejét t-vel jelölve:

$$575\ \mathrm{m} = (120\ \mathrm{s} - 2\ t) \cdot 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 2 \cdot \frac{5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} \cdot t$$

Ebből t = 5 s adódik.

3)

Megoldás:

A légcsavar legszélső pontja egy henger palástján mozog, pályája egyenletes csavarvonal.

a)

A vizsgált pont a tengely irányában halad $y_1 = \upsilon \cdot \Delta t_1 = 30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{60\ \mathrm{s}}{600} = 1{,}5\ \mathrm{m}$.

Eközben átkerül a henger szemközti alkotójára: $x_1 = d = 2$ m.

Az elmozdulás Pitagorasz tételével adódik: $\Delta r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2{,}5\ \mathrm{m}$.

b)

A vizsgált pont pályájának egy periódusát síkban kiterítve olyan téglalap átlóját kapjuk, melynek egyik oldala a légcsavar vége által rajzolt kör kerülete, a másik pedig a periódusidő alatt megtett útja a repülőgépnek.

A vizsgált pont a tengely irányában halad $y_2 = \upsilon \cdot \Delta t_2 = 30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{60\ \mathrm{s}}{600} = 3\ \mathrm{m}$.

A tengelyre merőleges: $x_2 = d = 2R\pi = 6{,}28\ \mathrm{m}$.

A légcsavar legszélső pontjának egy fordulat alatt megtett útja: $\Delta s = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 6{,}96\ \mathrm{m}$.

c)

A repülőgép 1200 métert 40 s alatt tesz meg, mialatt a légcsavar 400 teljes fordulatot végez. A légcsavar legszélső pontjának teljes útja egyenlő az egy periódus alatt megtett út 400-szorosával: 2784 m.

4)

Megoldás:

a)

A testre ható nehézségi erő és az *F* húzóerő eredője $mg\sqrt{2}$ nagyságú, és lejtő irányú, így a test nem akar a lejtőbe behatolni, és attól elválni, vagyis a test nem terheli a lejtőt, azaz a terhelés nulla.

b)

I. *megoldás:* Az állandó eredő miatt a gyorsulás is állandó, nagysága $a = g\sqrt{2}$.

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{és} \quad v = at \text{ miatt} \quad v^2 = 2as.$$

Esetünkben $s = h\sqrt{2}$. A kapott összefüggésbe a-t és s-et behelyettesítve:

$$v^2 = 2g\sqrt{2}\cdot h\sqrt{2} = 4gh,$$

vagyis

$$v = 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{10\cdot 0{,}4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

II. *megoldás:* Alkalmazzak a munkatételt. A testre csak két erő hat, a nehézségi erő és a vele egyenlő nagyságú vízszintes húzóerő. A munka az erő és az erőirányú elmozdulás szorzataként is kiszámítható. Függőlegesen és vízszintesen is h-t mozdul el a test, ezért mindkét erő munkája mgh, vagyis a mozgási energia megváltozása

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2mgh,$$

amiből

$$v = 2\sqrt{gh},$$

mint a másik megoldással.

c)

Mivel a csúszási súrlódási erő a súrlódási erő és a nyomóerő szorzata, és jelen esetben a nyomóerő nulla, ezért ilyen esetben sincs súrlódási erő, vagyis az elért sebesség nem változik, marad $v = 2\sqrt{gh} = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

IV. kategória,
akik ebben a tanévben második éve tanulják a fizikát technikumban

1)

Megoldás:

Ha a test sebességének nagysága állandó, csak olyan mozgás jöhet létre, amelyben a gyorsulásvektor iránya minden pillanatban merőleges a sebességvektor irányára. Ehhez járul, hogy a feladatban a gyorsulás értéke is állandó nagyságú, tehát annak is állandó a nagysága. Ebből következik, hogy egyenletes görbe vonalú mozgás jön létre, mégpedig állandó pályasugárral, vagyis egyenletes körmozgásról van szó, aminek a sebességét és a centripetális gyorsulását adtuk meg.

Meg kell határoznunk a körpálya sugarát, és azt a pályaívét, amelyet a test *t* idő alatt befut. A pálya kezdő- (*A*) és végpontját (*B*) összekötő húr hossza a keresett távolság.

Az egyenletes körmozgás gyorsulása („centripetális” gyorsulás):

$$a = \frac{v^2}{R},$$

ahonnan

$$R = \frac{v^2}{a} = \frac{\left(4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{3{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 5\,\mathrm{m}.$$

A *t* idő alatt megtett pályaív hossza:

$$s = vt = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{5}{4}\pi\,\mathrm{s} = 5 \cdot \pi\,\mathrm{m} = R\pi.$$

A tömegpont a megfigyelés ideje alatt a körpálya felén halad végig. Ezért az elmozdulása:

$$\Delta r = 2 \cdot R = 10\,\mathrm{m}.$$

2)

Megoldás:

Az egyenletes mozgás dinamikai feltétele, hogy a testre ható erő eredője nulla legyen.

A vízszintesen kifejtett kötélerő (lényegében a kutya által kifejtendő erő) mindkét esetben megegyezik a szánkóra ható súrlódási erő nagyságával:

$$F_{\mathrm{k\,kutya}} = \mu \cdot m \cdot g = 22{,}5\ \mathrm{N}, \text{ illetve: } F'_{\mathrm{k\,kutya}} = \mu' \cdot m \cdot g = 225\ \mathrm{N}.$$

A ferdén ható kötélerő (az ember által kifejtendő erő) vízszintes komponense mindkét esetben megegyezik a szánkóra ható súrlódási erő nagyságával:

$$F_{\mathrm{k\,ember}} \cdot \cos\alpha = \mu \cdot (m \cdot g - F_{\mathrm{k\,ember}} \cdot \sin\alpha) \Rightarrow F_{\mathrm{k\,ember}} = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha} = 25{,}25\ \mathrm{N}, \text{ illetve:}$$

$$F'_{\mathrm{k\,ember}} \cdot \cos\alpha = \mu' \cdot (m \cdot g - F'_{\mathrm{k\,ember}} \cdot \sin\alpha) \Rightarrow F'_{\mathrm{k\,ember}} = \frac{\mu' \cdot m \cdot g}{\cos\alpha + \mu' \cdot \sin\alpha} = 201{,}6\ \mathrm{N}.$$

a)

A csúszós esetben:

$$F_{\mathrm{k\,ember}} > F_{\mathrm{k\,kutya}}, \quad \Delta F = 2{,}75\ \mathrm{N},$$

illetve: $\frac{\Delta F}{F_{\mathrm{k\,kutya}}} \cdot 100\% = 12{,}2\%.$

b)

A felszórt pályán:

$$F'_{\mathrm{k\,kutya}} > F'_{\mathrm{k\,ember}}, \quad \Delta F' = 23{,}4\ \mathrm{N},$$

illetve: $\frac{\Delta F'}{F'_{\mathrm{k\,ember}}} \cdot 100\% = 11{,}6\%.$

Megjegyzés: A megoldásokban a számolások szögfüggvények helyett a félszabályos háromszöggel kapcsolatos ismeretekkel is elvégezhetők.

3)

Megoldás:

Az igen kis súrlódás miatt a dugattyúra ható súrlódási erő elhanyagolható a két oldalán lévő gázok által kifejtett pA nyomóerőkhöz képest, tehát végső megálláskor a két részben a nyomás egyenlő.

Ha esetleg a folyamat közben a tartály egyes részeiben a hőmérséklet változott volna, akkor a jó hővezető falú tartály és dugattyú miatt a folyamat végére a tartályon kívül és belül a hőmérséklet kiegyenlítődik.

A bal és jobboldali levegőre így igaz, hogy a kezdeti és végső pV szorzat (külön-külön) azonos.

Az egyes részeken, a folyamat végén az azonos nyomás legyen p, a térfogat V_a és V_b, vagyis

$$pV_a = p_A V_A ,$$

$$pV_b = p_B V_B .$$

(Itt $V_A = 4$ liter, $p_A = 10^5$ Pa, és $V_B = 3$ liter, $p_B = 2 \cdot 10^5$ Pa.)

A két egyenlet összeadása után:

$$p\left(V_a + V_b\right) = p_A V_A + p_B V_B ,$$

és $V_A + V_B = V_a + V_b$ miatt

$$p = \frac{p_A V_A + p_B V_B}{V_A + V_B} = \frac{10}{7} 10^5\ \mathrm{Pa}\ .$$

Ezzel

$$V_a = \frac{p_A}{p} V_A = \frac{1}{\frac{10}{7}} \cdot 4\ \text{liter} = 2{,}8\ \mathrm{dm}^3 ,$$

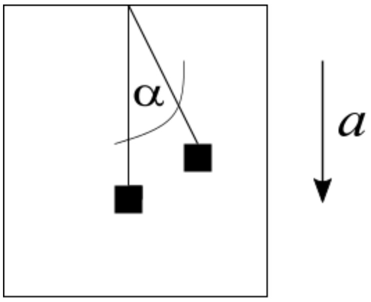
a dugattyú kezdő és végső helyzetei közti x távolság pedig

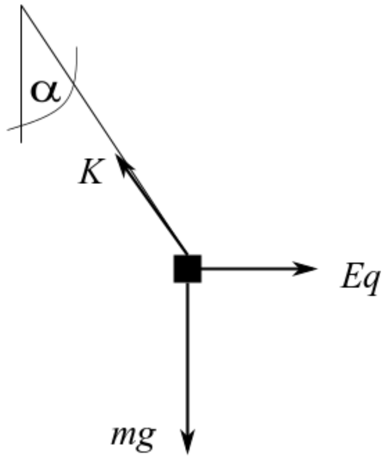
$$x = \frac{V_A - V_a}{A} = \frac{1{,}2}{1{,}2}\ \mathrm{dm} = 1\ \mathrm{dm}\ .$$

4)

Megoldás:

a)





a)

Alkalmazzuk a testre a dinamika alapegyenletét x-, és y-irányokra:

$$mg - K\cos\alpha = m\cdot\frac{g}{4},$$

$$K\sin\alpha = Eq.$$

Fenti egyenletekből következik:

$$mg - \frac{Eq}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha = m\cdot\frac{g}{4}.$$

Felhasználva, hogy $E = mg/4q$.

$$mg - \frac{mg}{4\cdot tg\alpha} = \frac{mg}{4},$$

$$3 = tg\alpha \rightarrow \alpha = 18{,}43^\circ.$$

b)

$$K = \frac{Eq}{\sin\alpha},$$

$$K = \frac{mg}{4\cdot\sin\alpha},$$

$$K = 0{,}79\cdot mg.$$