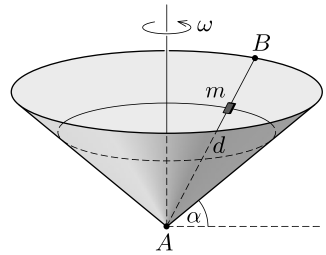
41. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
III. forduló
Megoldások
I. kategória: gimnázium 9. évfolyam

1. feladat. *Egy függőleges szimmetriatengelyű, felfelé nyitott, egyenes körkúpot* $\omega = \frac{20}{3}\ \mathrm{s}^{-1}$ *szögsebességgel forgatunk. A kúp alkotója a vízszintessel* $\alpha = 30°$*-os szöget zár be. A kúp belső felületén, az ábrán látható AB alkotó mentén egy egyenes vájat fut végig, amelyben egy* $m = 52$ g *tömegű, kis méretű test jó közelítéssel súrlódásmentesen csúszkálhat.*

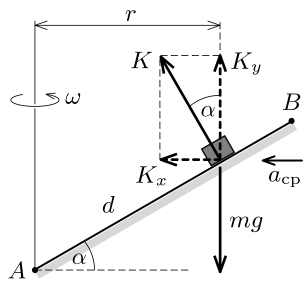


a) Mekkora d távolságra helyezzük a testet a kúp csúcsától, hogy a kúphoz képest nyugalomban maradjon?

b) Mekkora erővel nyomja ekkor a test a kúp felületét?

c) Vizsgáljuk meg, hogy a test helyzete stabil (biztos) vagy instabil (bizonytalan)! Más szóval mi történik, ha a testet a vájatban kissé felfelé, vagy kissé lefelé kitérítjük?

Megoldás. A kúp által kifejtett K kényszererőt bontsuk fel függőleges irányú (K_y) és vízszintes (K_x) komponensekre! Az előbbi függőlegesen megtartja a testet, a vízszintes komponens pedig a centripetális gyorsulást idézi elő:



$$K_y = mg, \qquad K_x = mr\omega^2$$

ahol r a kis test távolsága a forgástengelytől. Mivel $\alpha = 30°$, felhasználhatjuk a vektorok felbontása során keletkező derékszögű háromszög és egy szabályos háromszög egyik fele között fennálló hasonlóságot:

$$K_y = \frac{\sqrt{3}}{2}K\,, \quad K_x = \frac{K}{2}\,.$$

Ezeket összevetve a függőleges irányú mozgásegyenlettel a következőket kapjuk:

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}}mg \quad \longrightarrow \quad K_x = \frac{mg}{\sqrt{3}}\,. \tag{1}$$

A körmozgás feltételébe beírhatjuk K_x kifejezését:

$$\frac{mg}{\sqrt{3}} = mr\omega^2\,.$$

Ebből a körpálya sugara:

$$r = \frac{g}{\sqrt{3}\,\omega^2}\,, \tag{2}$$

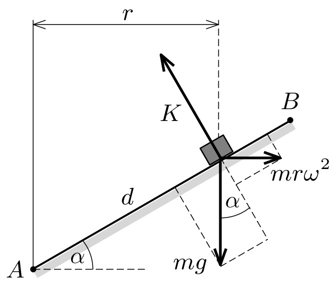
a kis test távolsága a kúp A csúcsától pedig (szintén a már felhasznált háromszög-hasonlóság miatt):

$$d = \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{\sqrt{3}\,\omega^2} = \frac{2g}{3\omega^2}\,. \tag{3}$$

Az (1) és (3) egyenletekbe behelyettesítve már választ kaphatunk a feladat *a*) és *b*) kérdéseire:

$$a)\ d = 0{,}15\ \mathrm{m}\,; \qquad b)\ K = 0{,}60\ \mathrm{N}\,.$$

c) Érdemes a kúp AB alkotójával párhuzamos irányban vizsgálni az erőket, ha a testet állandósult helyzetéből kissé felfelé kitérítjük. Ebben az irányban csak a nehézségi erő megfelelő ($mg/2$ nagyságú) komponense hat, ennek kellene biztosítania a centripetális gyorsulás AB egyenessel párhuzamos $r\omega^2\sqrt{3}/2$ komponensét. Mivel ez a gyorsuláskomponens r-rel arányosan növekszik, $mg/2$ pedig állandó, ez utóbbi nem tudja r sugarú körpályán tartani a testet és az felfelé csúszik. Hasonló eredményre jutunk, ha a kis testet lefelé térítjük ki, tehát a test helyzete **instabil (bizonytalan)**.

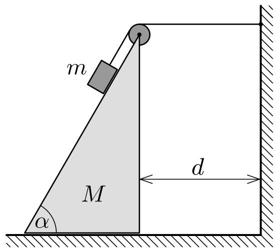


Megjegyzés. Bár nem része a 9. osztályos tananyagnak, a feladat megoldható a kúppal együtt forgó (gyorsuló) vonatkoztatási rendszerben is. Ekkor azonban a dinamika alapegyenletében az erőkhöz hozzá kell adni egy tehetetlenségi erőt is, a *centrifugális erőt*. Ennek nagysága $mr\omega^2$, iránya pedig az inerciarendszerbeli centripetális gyorsulással *ellentétes* irányú (lásd az *ábrát*). A kis test ebben a forgó rendszerben egyensúlyban van, ezért a rá ható erők eredője zérus. Bontsuk fel az erőket az AB alkotóval párhuzamos és arra merőleges irányban, majd alkalmazzuk az egyensúly feltételét:

$$\frac{mg}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}mr\omega^2\,, \qquad K = \frac{\sqrt{3}}{2}mg + \frac{1}{2}mr\omega^2\,.$$

Az első egyenlet a korábbi megoldásunk (2) eredményére vezet, majd ezt a második egyenletbe behelyettesítve a kényszererő (1) kifejezését is visszakapjuk. Innen a gondolatmenet a korábbiakban ismertetett lépésekkel fejezhető be.

2. feladat. *Az ábrán látható M tömegű, $\alpha = 60°$ hajlásszögű ék súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes felületen, és kezdetben $d = 18{,}5$ cm távolságra van a függőleges faltól. Az ékre egy $m = M/4$ tömegű kis hasábot helyezünk, amelyet az ékhez rögzített csigán átvetett fonál segítségével az ábrán látható módon függőleges falhoz erősítünk. A hasáb és az ék között a súrlódás szintén elhanyagolható. A rendszert egy adott pillanatban magára hagyjuk. A mozgás során az ék nem borul fel, a hasáb pedig nem éri el a vízszintes felületet.*

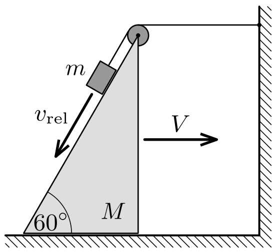


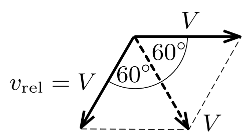
Mekkora sebességgel csapódik az ék a függőleges falhoz?

Megoldás. Tekintsük a rendszert egy tetszőleges pillanatban, amikor az ék V sebességgel mozog! A fonál nyújthatatlansága miatt amennyivel megrövidül a fonál vízszintes szakasza, ugyanannyival kerül lejjebb a lejtő mentén a kis hasáb az ékhez képest. Ebből következik, hogy a kis hasáb ékhez viszonyított v_{rel} relatív sebessége (amely a vízszintessel 60°-os szöget zár be) minden pillanatban ugyanakkora nagyságú, mint a hasáb sebessége:

$$v_{\mathrm{rel}} = V\,.$$

A falhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a kis hasáb sebességét úgy határozhatjuk meg, hogy a v_{rel} sebességhez vektoriálisan hozzáadjuk az ék sebességét. Ahogy az *ábrán* látható szerkesztésből kitűnik, a sebességvektorok alkotta 120° és 60°-os szögekkel rendelkező rombusz rövidebb átlóját kell meghatároznunk. A speciális szögek miatt a rombusz két szabályos háromszögre osztható, így a keresett átló éppen V hosszúságú.





Azt kaptuk tehát, hogy a kis hasáb a falhoz rögzített rendszerben ugyanakkora V nagyságú sebességgel mozog, mint a hasáb, de ez a sebesség a vízszinteshez képest 60°-ban lefelé, a fal irányába mutat.

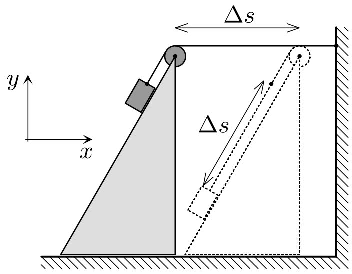
Disszipatív erő hiányában alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét a kezdeti és a végállapot között. Az ábrán látható szabályos vektorháromszög alapján állíthatjuk, hogy a hasáb függőleges irányú sebessége minden pillanatban $\sqrt{3}/2$-szöröse az ék sebességének, így a hasáb függőleges irányú süllyedése az ék falhoz csapódásáig $\sqrt{3}d/2$ lesz. Az energiamérleg tehát így írható:

$$mg\frac{\sqrt{3}}{2}d = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2\,,$$

ahonnan a végeredmény:

$$V = \sqrt{\frac{m}{m+M}\sqrt{3}\,gd} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{5}gd} = 0{,}80\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Megjegyzés. A megoldás legnehezebb lépése a kényszerfeltétel felírása, azaz a kis test mozgásának leírása a falhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben. A sebességvektorok vizsgálata helyett a testek elmozdulásait is összehasonlíthatjuk. A hasáb Δs távolsággal való elmozdulása esetén a kis test a lejtő mentén mérve Δs-sel kerül lejjebb. Az *ábrán* látható vonatkoztatási rendszerben felírhatjuk a hasáb elmozdulásának x és y komponenseit:



$$\Delta x = -\frac{\Delta s}{2} + \Delta s = \frac{\Delta s}{2}\,, \qquad \Delta y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta s\,.$$

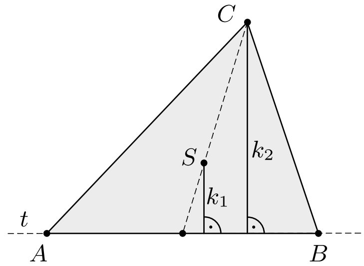
Ha a fenti összefüggéseket kis elmozdulásokra alkalmazzuk, majd a közben eltelt Δt idővel osztunk, megkapjuk a hasáb x és y irányú sebességkomponenseit:

$$v_x = \frac{V}{2}\,, \qquad v_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}V\,.$$

Innen a megoldás az eredetihez hasonlóan fejezhető be.

3. feladat. *Egyenletes vastagságú, merev, homogén tömegeloszlású,* $m = 450$ g *tömegű háromszöglemezt a csúcsainál alátámasztva vízszintes síkban tartunk. A háromszög oldalai* $a = 36$ cm, $b = 32$ cm *és* $c = 24$ cm *hosszúságúak. Mekkora erő hat az alátámasztásoknál?*

Megoldás. Egy homogén háromszöglemez tömegközéppontja a háromszög geometriai súlypontjával esik egybe. A háromszöglemez egyensúlyának feltétele, hogy a rá ható erők és forgatónyomatékok eredője egyaránt nulla legyen. Vizsgáljuk a forgatónyomatékot a háromszög egyik (mondjuk AB) oldalán átmenő t tengelyre vonatkozóan (lásd az *ábrát*)! Erre a tengelyre nézve csak az S súlypontban ható nehézségi erőnek és a C csúcsban ható F_C nyomóerőnek van forgatónyomatéka, ezért:



$$k_1 mg - k_2 F_C = 0,$$

ahol k_1 és k_2 a megfelelő erőkarok hosszát jelöli. Mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalat, így (az ábrán látható hasonló derékszögű háromszögek miatt) az S pont éppen harmadakkora távolságra van a t tengelytől, mint a háromszög C csúcsa, azaz $k_2 = 3k_1$. Ebből $F_C = mg/3$.

A többi oldalra is hasonlóan felírva a forgatónyomatékok egyensúlyát adódik, hogy a másik három csúcsnál ható támasztóerő is ugyanekkora:

$$F_A = F_B = F_C = \frac{1}{3}mg = 1{,}5 \text{ N},$$

függetlenül a háromszög oldalainak hosszától!

Megjegyzések. 1. Hasonlóan jó választás, ha tengelyként a súlyponton átmenő, az oldalakkal párhuzamos egyenest választjuk. Ekkor szükségünk van az erők egyensúlyát kifejező $mg = F_A + F_B + F_C$ egyenletre is, amely az első megoldásban automatikusan teljesült.

2. Bár nem része a 9. osztályos matematikai tananyagnak, de a feladat vektorokkal is megoldható. Origónak a háromszög súlypontját választva a csúcsokba mutató $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$, $\boldsymbol{r}_C$ vektorokra fennáll az

$$\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

összefüggés. A súlypontra vonatkoztatott forgatónyomatékok egyensúlyát az

$$\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{r}_B \times \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_C = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

egyenlet fejezi ki. Az (1) és (2) egyenletből $\boldsymbol{r}_C$ kiküszöbölésével, majd rendezéssel az

$$\boldsymbol{r}_A \times (\boldsymbol{F}_A - \boldsymbol{F}_C) = \boldsymbol{r}_B \times (\boldsymbol{F}_C - \boldsymbol{F}_B)$$

összefüggésre jutunk. A bal oldalon álló vektor merőleges $\boldsymbol{r}_A$-ra, a jobb oldali vektor merőleges $\boldsymbol{r}_B$-re. Mivel $\boldsymbol{r}_A$ és $\boldsymbol{r}_B$ nem párhuzamos vektorok, így az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldalon nullvektor áll. Ezek szerint $\boldsymbol{F}_A = \boldsymbol{F}_B = \boldsymbol{F}_C$, azaz a három alátámasztási pontban egyenlő, $mg/3$ nagyságú erő hat.

4. feladat. *Vízszintes talajon mozgó, $M = 0{,}5$ kg tömegű hasábra $h = 20$ cm magasságból egy $m = 0{,}1$ kg tömegű gyurmadarabot ejtünk. A hasáb sebessége az ütközés előtti pillanatban $v_0 = 3$ m/s. A két test $\Delta t = 10$ ms időtartamú ütközés során összetapad.*

a) Mekkora átlagos nyomóerőt fejt ki a gyurma a hasábra az ütközés alatt?

b) Mekkora lesz közvetlenül az ütközés után a közös sebesség, ha a hasáb és a talaj közötti csúszási súrlódási együttható értéke $\mu = 0{,}4$?

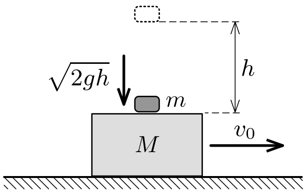
Megoldás. *a*) Jelöljük az ütközés alatt a hasáb és a gyurma között ható kényszererő időátlagolt értékét K_1-gyel! A mechanikai energia az ütközés előtti pillanatig megmarad, ezért a gyurma $\sqrt{2gh}$ sebességgel csapódik be a hasábba. Ez a függőleges irányú sebesség az ütközés hatására 0-ra csökken. A gyurmára az ütközés alatt függőleges irányban az mg nehézségi erő és a K_1 kényszererő hat, ezért az impulzustétel így írható:

$$K_1\Delta t - mg\Delta t = m\sqrt{2gh}\,,$$

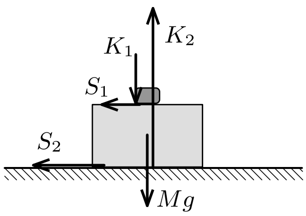
ahonnan kifejezhetjük K_1-et:

$$K_1 = m\left(g + \frac{\sqrt{2gh}}{\Delta t}\right) = 21\ \mathrm{N}\,.$$

Ezzel válaszoltunk a feladat első kérdésére.



ütközés előtt



ütközés közben

b) Vizsgáljuk a hasábra ható erőket az ütközés alatt (lásd a jobb oldali *ábrát*)! A hasábra függőleges irányban hat az Mg nehézségi erő, a gyurma által kifejtett K_1 nyomóerő, illetve a talaj (átlagos) K_2 kényszerereje. Vízszintes irányban a gyurma szintén hat rá valamekkora ismeretlen S_1 erővel (fékező irányban), valamint a talaj is fékezi a hasábot S_2 erővel.

Függőleges irányban a hasáb nem gyorsul, ezért az ilyen irányú erők eredője nulla:

$$K_2 - Mg - K_1 = 0\,,$$

ebből K_2 kifejezhető. Tekintsük most a hasábból és gyurmából álló pontrendszert, és írjuk fel erre az impulzustételt vízszintes irányban! Ütközés előtt a vízszintes irányú teljes impulzus Mv_0, az ütközés után $(m+M)v$, így:

$$-S_2\Delta t = (m+M)v - Mv_0\,.$$

Mivel a hasáb mindvégig csúszik a talajon, érvényes az $S_2 = \mu K_2$ erőtörvény. Ezt és az előző két egyenletet összevetve a következőt kapjuk:

$$-\mu\,(Mg + K_1)\,\Delta t = (m+M)v - Mv_0\,.$$

Rendezzük ezt az ismeretlen v sebességre:

$$v = \frac{Mv_0 - \mu\,(Mg + K_1)\,\Delta t}{m+M}\,.$$

Ebbe az egyenletbe behelyettesítve az adatokat megkapjuk, hogy a hasáb és a gyurma közös sebessége közvetlenül ütközés után $v = 2{,}33$ m/s.

Megjegyzések. 1. A teljesség kedvéért közöljük a teljes paraméteres eredményt v-re, amit az *a*) kérdés végeredményének felhasználásával kaphatunk:

$$v = \frac{M}{m+M}v_0 - \mu g\Delta t - \frac{\mu m}{m+M}\sqrt{2gh}\,.$$

2. Meglepő, hogy vízszintes irányban a rendszer impulzusa nem marad meg. Ahogy a megoldásból is kitűnik, ennek az az oka, hogy a pontrendszerre vízszintes irányban eredő erő hat. Minél rövidebb az ütközés, ez az eredő erő annál nagyobb, ezért a vízszintes irányú erőlökés véges marad (akár tetszőlegesen rövid, pillanatszerű ütközés esetén is).

41. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
III. forduló
Megoldások
III. kategória: technikum 9. évfolyam

1. feladat. *Vékony,* $\ell = 1{,}0$ m *hosszú fonálból és* $m = 500$ g *tömegű, kisméretű acélgolyóból készült fonálingát a talaj felett* $h = 3{,}0$ m *magasságban a mennyezethez erősítettünk, majd vízszintes helyzetből kezdősebesség nélkül elengedtünk. A fonál a függőleges helyzetéhez érve elszakadt.*

a) Mekkora erő hatására szakadt el a fonál?

b) Milyen távol ért talajt az acélgolyó a felfüggesztési pont talajra eső vetületétől?

Megoldás. *a*) A fonál elszakadásának a pillanatában az acélgolyó sebességét a mechanikai energiamegmaradás törvényéből (a munkatételből) tudjuk kiszámítani:

$$mg\ell = \frac{1}{2}mv^2\,, \quad \text{amiből} \quad v = \sqrt{2g\ell} = 4{,}47\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Az elszakadás előtti pillanatban az ingatestre csak függőleges erők hatnak: lefelé az mg nehézségi erő, felfelé pedig az F fonálerő. Ezek hatására a test a felfüggesztési pont irányába gyorsul v^2/ℓ centripetális gyorsulással. A dinamika alapegyenlete tehát így írható fel:

$$F - mg = m\frac{v^2}{\ell}\,.$$

Ebből a fonálerő a v-re korábban kapott eredmény segítségével:

$$F = m\left(g + \frac{v^2}{\ell}\right) = 3mg = 15\ \text{N}\,.$$

b) A fonál elszakadását követően az acélgolyó mozgása v kezdősebességű vízszintes hajítás lesz. Az acélgolyó kezdeti magassága a talajtól $h-\ell$, így a mozgás t idejére a következő egyenlet érvényes:

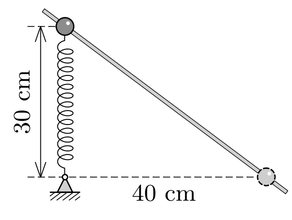
$$h - \ell = \frac{1}{2}gt^2\,, \quad \text{ebből} \quad t = \sqrt{\frac{2(h-\ell)}{g}} = 0{,}63\ \text{s}\,.$$

Ennyi idő alatt a golyó vízszintesen megtett útja:

$$s = vt = \sqrt{2g\ell}\sqrt{\frac{2(h-\ell)}{g}} = 2\sqrt{\ell(h-\ell)}\,.$$

Az adatokat behelyettesítve az $s = 2{,}83$ m eredményt kapjuk.

2. feladat. *Az ábrán látható rögzített rúdon egy* 50 g *tömegű kis gyöngy mozoghat súrlódásmentesen. A gyöngy egy kezdetben függőleges,* 30 cm *hosszúságú rugóval egy rögzített ponthoz van csatlakoztatva. A rugó nyújtatlan hossza* 24 cm*. A gyöngyöt ebből a helyzetből elengedve azt tapasztaljuk, hogy az éppen a rugó vízszintes* (40 cm*-es hosszúságú) helyzeténél áll meg.*



a) Mekkora a rugóállandó?

b) Mekkora a gyöngy gyorsulása a legalsó helyzetben?

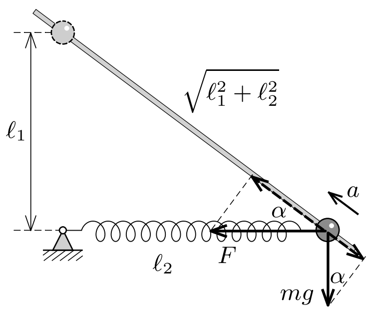
Megoldás. *a*) Jelöljük a rugóállandót D-vel, a rugó nyújtatlan hosszát ℓ_0-lal, a kezdeti hosszát ℓ_1-gyel, a vízszintes helyzetben mérhető hosszát pedig ℓ_2-vel! Súrlódás hiányában alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét a kezdeti és a legalsó helyzet között:

$$\frac{1}{2}D(\ell_1-\ell_0)^2 + mg\ell_1 = \frac{1}{2}D(\ell_2-\ell_0)^2\,,$$

ahol a nehézségi erőtér potenciáljának nullszintjét az alsó helyzetben vettük fel. Ebből kifejezhetjük a rugóállandót:

$$D = \frac{2mg\ell_1}{(\ell_2-\ell_0)^2 - (\ell_1-\ell_0)^2} = 13{,}6\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\,.$$

b) A gyöngy rúdirányú gyorsulását a legalsó helyzetben az $F = D(\ell_2 - \ell_0)$ rugóerő és az mg nehézségi erő rúddal párhuzamos komponensei határozzák meg. A komponenseket az *ábrán* látható derékszögű háromszögek közötti hasonlóság felhasználásával határozhatjuk meg:



$$F_\parallel = \frac{\ell_2}{\sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2}}F = \frac{4}{5}F\,, \quad mg_\parallel = \frac{\ell_1}{\sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2}}mg = \frac{3}{5}mg\,.$$

A gyorsulás a legalsó helyzetben a rúd mentén felfelé mutat, ellenkező esetben a gyöngy a következő pillanatban elindulna a rúdon lefelé. A gyorsulás irányát pozitívnak választva Newton II. törvénye így írható:

$$F_\parallel - mg_\parallel = ma\,,$$

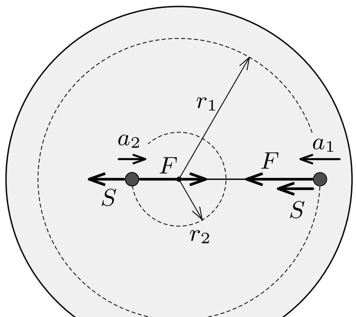
amibe az eddig kapott összefüggéseket beírva, majd m-mel osztva a következő eredményt kapjuk:

$$a = \frac{4}{5}\frac{D}{m}(\ell_2 - \ell_0) - \frac{3}{5}g = 28{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

3. feladat. *Egy forgózsámoly kör alakú, vízszintes lapjára helyezünk két kis méretű, egyforma tömegű korongot, melyek vékony, egyenes, feszítetlen fonállal vannak összekötve. Az egyik korong* 10 cm*-re, a másik pedig* 30 cm*-re van a zsámoly középpontjától, a fonál pedig áthalad a zsámoly forgástengelye felett. A korongok és a zsámoly lapja közötti csúszási és tapadási súrlódási tényező egyaránt* 0,1.

Mekkora szögsebesség esetén mozdul meg legalább az egyik korong, ha a zsámoly szögsebességét álló helyzetből indítva nagyon lassan növeljük?

Megoldás. Jelöljük a kis korongok tömegét m-mel, a korongok középpontjának távolságát a forgástengelytől pedig r_1-gyel és r_2-vel, ahogy az az *ábrán* is látható ($r_1 > r_2$)! A korongok függőleges irányban nem gyorsulnak, ezért a forgózsámoly mindkettőre egyaránt mg kényszererőt gyakorol. A korongokra vízszintes irányban a fonálerő és a tapadási súrlódási erő hat, ez utóbbi nagysága legfeljebb $S = \mu mg$ lehet (a megcsúszás határán).



Viszonylag kis ω szögsebességek esetén a fonálban nem ébred erő, hiszen a korongok $a_1 = r_1\omega^2$ és $a_2 = r_2\omega^2$ centripetális gyorsulását a tapadási súrlódási erő még biztosítani tudja. Ha a fonál nem lenne jelen, a forgástengelytől távolabbi korong akkor csúszna meg, amikor a tapadási súrlódási erő maximuma már éppen nem éri el az ma_2 értéket. Ez annál az ω_1 szögsebességnél valósulna meg, amelyre:

$$mg = mr_1\omega_1^2 \quad\longrightarrow\quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\mu g}{r_1}}\,.$$

Valójában azonban a fonál megfeszül, és a benne ébredő F erő miatt a távolabbi korong még $\omega > \omega_1$ szögsebességek esetén is nyugalomban maradhat a zsámolyhoz képest. A fonálerő a szögsebesség lassú növelésével egyre növekszik, ezzel segít körpályán tartani a közelebbi és távolabbi korongot is. Egy bizonyos ω érték felett a fonálerő meghaladja a tengelyhez közelebbi korong körpályán tartásához szükséges $mr_2\omega^2$ értéket, így ekkor az erre a korongra ható tapadási erő iránya ellentétesre fordul. Tovább növelve a szögsebességet egy kritikus ω_2 értékig, a tengelyhez közelebbi korong megcsúszik (és emiatt a távolabbi korong is). A megcsúszás határán felírhatjuk a két korong mozgásegyenletét:

$$F + \mu mg = mr_1\omega_2^2 \qquad F - \mu mg = mr_2\omega_2^2\,.$$

Vonjuk ki a második egyenletet az elsőből, így eliminálhatjuk az ismeretlen F fonálerőt:

$$2\mu mg = m(r_1 - r_2)\omega_2^2\,,$$

amelyből a szögsebesség keresett kritikus értéke:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2\mu g}{r_1 - r_2}} = 3{,}16\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

Megjegyzés. A végeredményhez úgy is elérhetünk, hogy a korongokra pontrendszerként tekintünk. A korongok tömegközéppontja a forgástengelytől $(r_1 - r_2)/2$ távolságra van, így a tömegközéppont gyorsulása $(r_1 - r_2)\omega^2/2$. A korongok akkor csúsznak meg, amikor a $2S = 2\mu mg$ eredő tapadási súrlódási erő ezt nem képes biztosítani:

$$2\mu mg < 2m\frac{r_1 - r_2}{2}\omega^2 \qquad \longrightarrow \qquad \omega > \sqrt{\frac{2\mu g}{r_1 - r_2}} = \omega_2\,.$$

4. feladat. *Egy gömb alakú, gömbszimmetrikus tömegeloszlású, képzeletbeli exobolygó kőzetanyagának átlagos sűrűsége* 2500 kg/m^3. *Ha „exostacionárius" (a bolygó felszínéhez képest állandó helyzetű) távközlési műholdat szeretnénk pályára állítani, akkor annak felszín feletti magassága ötszöröse lenne a bolygó sugarának.*

a) Mekkora az „exostacionárius" távközlési műhold keringési ideje?

b) Hány százalékkal kisebb a nehézségi gyorsulás a bolygó egyenlítőjén, mint a pólusokon?

Megoldás. *a)* A bolygó M tömege kifejezhető a ϱ átlagsűrűségével és az R sugarával:

$$M = \frac{4\pi}{3}R^3\varrho\,.$$

Az m tömegű műholdat a gravitációs erő tartja $6R$ sugarú körpályán:

$$\gamma\frac{mM}{(6R)^2} = m\cdot 6R\cdot\omega^2\,,$$

ahol ω a műhold keringési szögsebessége (és egyben a bolygó forgási szögsebessége). A műhold tömegével való egyszerűsítés után:

$$\omega = \sqrt{\gamma\frac{M}{(6R)^3}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3\cdot 6^3}\gamma\varrho}\,. \tag{1}$$

A keringési idő a szögsebesség ismeretében megadható:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3\cdot 6^3}{4\pi}\frac{1}{\gamma\varrho}} = 9\sqrt{\frac{8\pi}{\gamma\varrho}} = 110\,500\ \mathrm{s} = 30{,}7\ \mathrm{h}\,.$$

b) A pólusokon a nehézségi gyorsulást így adhatjuk meg:

$$g_\mathrm{p} = \gamma\frac{M}{R^2} = \frac{4\pi}{3}\gamma\varrho R\,.$$

Az egyenlítőn viszont kisebb a nehézségi gyorsulás, mert a gravitációs erő kis része az egyenlítőn lévő test centripetális gyorsulását biztosítja:

$$g_\mathrm{e} = g_\mathrm{p} - R\omega^2\,.$$

Az ω-ra kapott (1) összefüggést felhasználva:

$$g_\mathrm{e} = g_\mathrm{p} - \frac{4\pi}{3\cdot 6^3}\gamma\varrho R\,.$$

A feladatban kérdezett százalékos eltérést így számolhatjuk:

$$\frac{g_\mathrm{p} - g_\mathrm{e}}{g_\mathrm{p}} = \frac{g_\mathrm{p} - \left(g_\mathrm{p} - \frac{4\pi}{3\cdot 6^3}\gamma\varrho R\right)}{g_\mathrm{p}} = \frac{\frac{4\pi}{3\cdot 6^3}\gamma\varrho R}{\frac{4\pi}{3}\gamma\varrho R} = \frac{1}{216} = 4{,}63\cdot 10^{-3}\,.$$

Az eltérés tehát mintegy fél százalék.