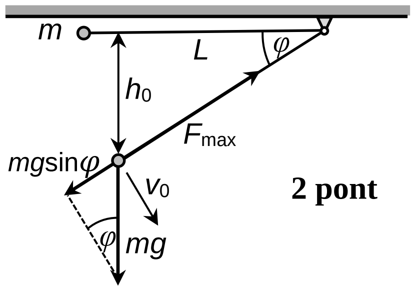
A 41. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Gimnázium 10. osztály (II. kat.)
Pécs 2022

1. feladat:

a) Legyen a fonál elszakadásának pillanatában a fémgömb sebessége v_0! Az energia-megmaradásból:



$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$v_0^2 = 2gh_0 = 2gL\sin\varphi.$$ **2 pont**

A dinamika alapegyenletét sugárirányba felírva:

$$m\frac{v_0^2}{L} = F_{\max} - mg\sin\varphi,$$ **2 pont**

$$F_{\max} = 3mg\sin\varphi,$$ **2 pont**

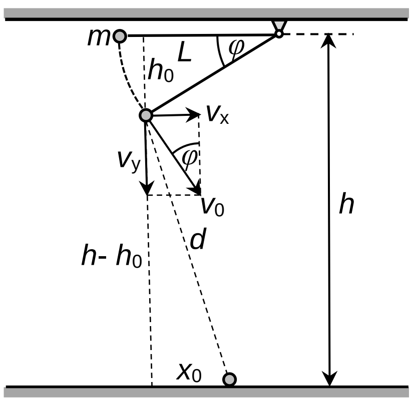
$$\sin\varphi = \frac{F_{\max}}{3mg} = \frac{7{,}5\ \mathrm{N}}{15\ \mathrm{N}} = 0{,}5,$$ **2 pont**

$$\boxed{\varphi = 30^\circ.}$$

b) A fémgömb sebessége a fonál elszakadásának pillanatában:

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gL\sin\varphi} = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$ **2 pont**

c) A fémgömb a fonál elszakadása után vízszintes irányban v_x sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. Függőleges irányú mozgása pedig, v_y kezdősebességű függőleges hajítás lefelé. A fémgolyó v_0 sebességének komponensei:



$$v_x = v_0\sin\varphi = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$ **1 pont**

$$v_y = v_0\cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$ **1 pont**

Érkezzen le a fémgömb t_0 idő alatt a talajra! Ekkor igaz, hogy

$$h - h_0 = v_y t_0 + \frac{g}{2}t_0^2,$$ **2 pont**

$$gt_0^2 + 2v_y t_0 - 2\cdot(h - h_0) = 0.$$

Az adatokat beírva:

$$10t_0^2 + 3\sqrt{3}t_0 - 4{,}95 = 0.$$

$$t_0 = \frac{15 - 3\sqrt{3}}{20}\,\mathrm{s} \approx 0{,}49\ \mathrm{s}.$$ **3 pont**

A fémgömb vízszintes irányú elmozdulás a fonál elszakadása után:

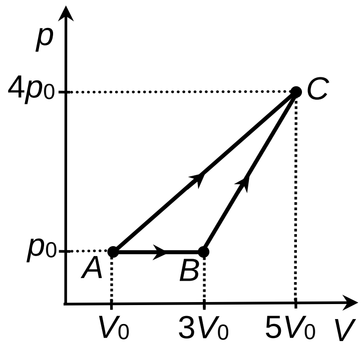
$$x_0 = v_x t_0 = 0{,}735\ \mathrm{m}.$$ **1 pont**

A keresett d távolság:

$$\boxed{d = \sqrt{x_0^2 + (h - h_0)^2} \approx 2{,}58\ \mathrm{m}.}$$ **2 pont**

Összesen: 20 pont

2. feladat:



a) Legyen a vizsgált gáz részecskéinek szabadsági foka f! Határozzuk meg a termodinamika első főtétele alapján a megadott hőmennyiségeket!

$$Q_{\mathrm{AC}} = E_{\mathrm{C}} - E_{\mathrm{A}} + W_{AC}^*,$$

$$Q_{\mathrm{AC}} = \frac{f}{2}(20p_0V_0 - p_0V_0) + \frac{p_0 + 4p_0}{2}(5V_0 - V_0),$$

$$Q_{\mathrm{AC}} = \left(10 + \frac{19}{2}f\right) \cdot p_0V_0.$$ **4 pont**

Hasonlóan:

$$Q_{\mathrm{BC}} = E_{\mathrm{C}} - E_{\mathrm{B}} + W_{BC}^*,$$

$$Q_{\mathrm{BC}} = \frac{f}{2}(20p_0V_0 - 3p_0V_0) + \frac{p_0 + 4p_0}{2}(5V_0 - 3V_0),$$

$$Q_{\mathrm{BC}} = \left(5 + \frac{17}{2}f\right) \cdot p_0V_0.$$ **3 pont**

A hőmennyiségek osztásából:

$$\frac{Q_{\mathrm{AC}}}{Q_{\mathrm{BC}}} = \frac{20 + 19f}{10 + 17f},$$

$$\frac{77}{61} = \frac{20 + 19f}{10 + 17f},$$ **2 pont**

$$\boxed{f = 3.}$$ **1 pont**

A gáz tehát nem lehet oxigén.

b) Határozzuk meg az $A \to B$ folyamatban felvett hőt!

$$Q_{\mathrm{AB}} = E_{\mathrm{B}} - E_{\mathrm{A}} + W^*_{\mathrm{AB}},$$

$$Q_{\mathrm{AB}} = \frac{3}{2}(3p_0V_0 - p_0V_0) + p_0(3V_0 - V_0),$$

$$Q_{\mathrm{AB}} = 5p_0V_0.$$ **2 pont**

$$Q_{\mathrm{BC}} = \frac{61}{2}p_0V_0.$$ **1 pont**

Ezekből:

$$\boxed{Q_{\mathrm{AB}} = \frac{10}{61}Q_{\mathrm{BC}} = 500\ \mathrm{J}.}$$ **2 pont**

c) A hasznos munka számolható a felvett és leadott hő különbségeként is.

$$\eta = \frac{W^*_h}{Q_{\mathrm{felvett}}},$$ **1 pont**

$$\eta = \frac{Q_{\mathrm{felvett}} - Q_{\mathrm{leadott}}}{Q_{\mathrm{felvett}}},$$ **1 pont**

Az eddigi ismert adatok felhasználásával:

$$\eta = \frac{Q_{AC} - Q_{BC} - Q_{AB}}{Q_{AC}},$$ **1 pont**

$$\boxed{\eta = \frac{3850\ \mathrm{J} - 3050\ \mathrm{J} - 500\ \mathrm{J}}{3850\ \mathrm{J}} = \frac{6}{77} \approx 7{,}8\ \%.}$$ **2 pont**

A hatásfok számítása az ismert hőmennyiségek felhasználása nélkül a szabadsági fok ismeretében:

$$\eta = \frac{W^*_h}{Q_{\mathrm{felvett}}},$$

$$W^*_h = 3p_0V_0.$$

$$Q_{\mathrm{felvett}} = \frac{3}{2}(20p_0V_0 - p_0V_0) + \frac{p_0 + 4p_0}{2}(5V_0 - V_0),$$

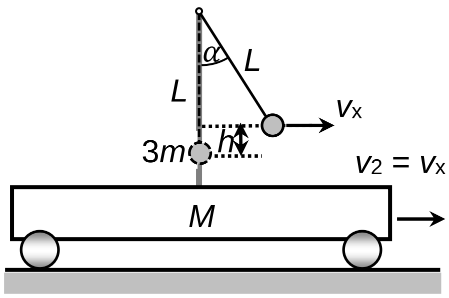
$$Q_{\mathrm{felvett}} = \frac{77}{2}p_0V_0.$$

$$\boxed{\eta = \frac{6}{77}.}$$

Összesen: 20 pont

3. feladat:

a) Legyen a $3m$ tömegű golyó talajhoz viszonyított sebességének vízszintes komponense v_x, függőleges komponense pedig v_y! A golyó addig emelkedik, amíg a v_y komponens nullára nem csökken. Haladjon ebben a pillanatban a kocsi v_2 sebességgel! A vízszintes irányú lendület-megmaradásból:



$$3mv_0 = 4mv_x,$$

$$v_x = \frac{3}{4}v_0.$$

2 pont

A mechanikai energia megmaradásából:

$$\frac{1}{2}\cdot 3mv_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 4mv_x^2 + 3mgh,$$

2 pont

$$3v_0^2 = 4\cdot\frac{9}{16}v_x^2 + 6gh,$$

$$\boxed{h = \frac{1}{8}\frac{v_0^2}{g} = 0{,}1\ \text{m}.}$$

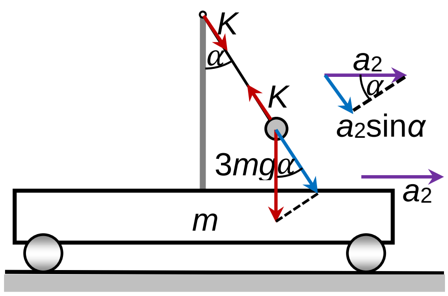
2 pont

Az emelkedési magasság ismeretében az α szög is meghatározható.

$$\cos\alpha = \frac{L-h}{L} = 0{,}8659,$$

$$\alpha = 30^o.$$

b) Ebben a pillanatban a $3m$ tömegű golyó a kocsihoz viszonyítva nem mozog, A kocsihoz viszonyítva sugárirányban a gyorsulása is zérus. Legyen a fonálerő *K*, a kocsi gyorsulása a_2! A dinamika alapegyenletéből:



$$ma_2 = K\sin\alpha,$$

$$a_2 = \frac{K\sin\alpha}{m}.$$

1 pont

A golyó a_1 gyorsulása nyugvó rendszerben:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_2.$$

1 pont

Az $\vec{a}_{rel}$ gyorsulás sugárirányú gyorsulása zérus ezért a golyó gyorsulása nyugvó rendszerben sugárirányban:

$$a_1 = a_2 \sin\alpha.$$ **1 pont**

A dinamika alapegyenletéből:

$$3ma_2 \sin\alpha = 3mg\cos\alpha - K,$$ **2 pont**

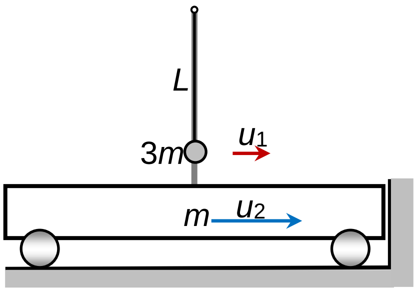
$$3K\sin^2\alpha = 3mg\cos\alpha - K,$$

$$\boxed{K = \frac{3mg\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha} = \frac{6\sqrt{3}}{7}mg \approx 1{,}48mg.}$$ **2 pont**

Megjegyzés:

Az a_2 gyorsulással mozgó kocsihoz rögzített koordánata-rendszerben a golyó sugárirányban nem gyorsul. Felvéve a $-ma_2$ tehetetlenségi erőt, felírhatjuk, hogy sugárirányban az erők eredője zérus, és a K fonálerőre így is az előző értéket kapjuk.

c) Határozzuk meg a testek sebességét az ütközés előtti pillanatban! Legyenek ezek u_1 és u_2! A lendület- és energia-megmaradásból:



$$3mv_0 = 3mu_1 + mu_2,$$ **1 pont**

(1) $$3(v_0 - u_1) = u_2.$$

$$\frac{1}{2}\cdot 3mv_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 3mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2,$$ **1 pont**

(2) $$3(v_0^2 - u_1^2) = u_2^2.$$

(2) és (1) osztásából, feltéve, hogy $v_0 \neq u_1$:

$$v_0 + u_1 = u_2.$$

Ezekből:

$$v_0 + u_1 = 3(v_0 - u_1),$$

$$u_1 = \frac{1}{2}v_0,$$ **1 pont**

$$u_2 = \frac{3}{2}v_0.$$ **1 pont**

Az ütközéskor az *m* tömegű kocsi sebessége az ellentétesére változik:

$$u_2^* = -\frac{3}{2}v_0.$$ **1 pont**

A tömegközéppont sebessége az ütközés után:

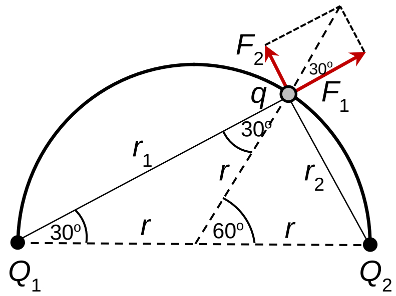
$$v_{\text{tk}} = \frac{3mu_1 + mu_2^*}{4m},$$

$$\boxed{v_{\text{tk}} = \frac{3m\cdot\frac{1}{2}v_0 - m\cdot\frac{3}{2}v_0}{4m} = 0.}$$ **2 pont**

Összesen: 20 pont

4. feladat:

a) Amikor a pálya vízszintes, és a golyó egyensúlyban van, akkor a rá ható elektrosztatikus erők érintőirányú összetevői kiegyenlítik egymást, illetve az elektrosztatikus erők eredője sugárirányú. **1 pont**



Az ábra alapján: $r_1 = \sqrt{3}r, \quad r_2 = r.$

$$F_1 = k\frac{Q_1 q}{3r^2},$$ **1 pont**

$$F_2 = k\frac{Q_2 q}{r^2}.$$ **1 pont**

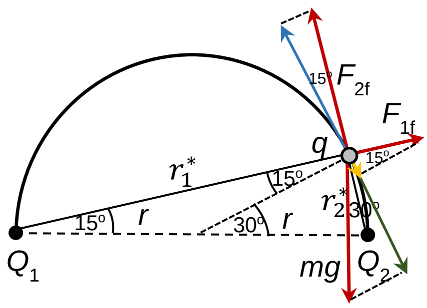
$$\tan 30^o = \frac{F_2}{F_1},$$ **1 pont**

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = 3 \cdot \frac{Q_2}{Q_1}.$$

A töltések aránya:

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2.}$$ **1 pont**

b) A pálya függőleges helyzetében a golyó egyensúlyakor az elektrosztatikus erők mellett a nehézségi erő érintőirányú összetevőjét is figyelembe kell venni.



(1) $F_{1f}\sin 15° + mg\cos 30° = F_{2f}\cos 15°.$ **2 pont**

$$r_1^* = 2r\cos 15^o, \quad r_2^* = 2r\sin 15^o.$$

$$F_{1f} = k\frac{Q_1 q}{4r^2(\cos 15^o)^2},$$ **1 pont**

$$F_{2f} = k\frac{Q_2 q}{4r^2(\sin 15^o)^2}.$$

$$\frac{F_{2f}}{F_{1f}} = \frac{Q_2}{Q_1} \cdot \left(\frac{\cos 15^o}{\sin 15^o}\right)^2,$$

$$F_{2f} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot (\mathrm{ctg}\, 15^o)^2 F_{1f} = 2{,}68 F_{1f}.$$ **2 pont**

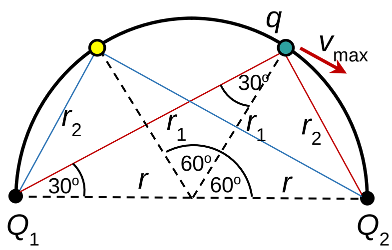
Ezt (1)-be beírva:

$$F_{1f}\sin 15^o + mg\cos 30^o = 2{,}68 F_{1f}\cdot\cos 15^o.$$

Ebből a keresett arány:

$$\boxed{\frac{mg}{F_{1f}} = \frac{2{,}68\cdot\cos 15^o - \sin 15^o}{\cos 30^o} \approx 2{,}69.}$$ **2 pont**

c) A golyó sebessége az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a legnagyobb. Mivel itt az érintő-irányú erők eredője nulla, ezért gyorsulása egyenlő a centripetális gyorsulással. A folyamatban megmarad az elektrosztatikus és a mozgási energia összege:



2 pont

$$k\frac{Q_1 q}{r_2} + k\frac{Q_2 q}{r_1} = k\frac{Q_1 q}{r_1} + k\frac{Q_2 q}{r_2} + \frac{1}{2}mv_{max}^2,$$ **2 pont**

$$kq(Q_1 - Q_2)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{2}mv_{max}^2,$$

$$kq\left(Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{9}Q_1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{3}r}\right) = \frac{1}{2}mv_{max}^2,$$

$$k\frac{Q_1 q}{r}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}mv_{max}^2,$$

$$\frac{v_{max}^2}{r} = \frac{20 - 8\sqrt{3}}{9}\cdot k\frac{Q_1 q}{mr^2}.$$ **2 pont**

Ismert, hogy

$$\frac{Q_1 q}{r^2} = 4F_{1f}\cdot(\cos 15^o)^2 \approx 4\cdot\frac{mg}{2{,}69}(\cos 15^o)^2 = 1{,}387mg.$$ **1 pont**

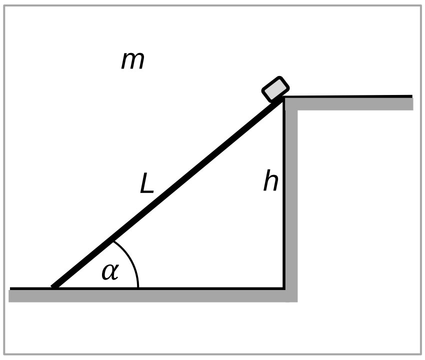
A keresett sugárirányú gyorsulás:

$$\boxed{a = \frac{v_{max}^2}{r} = \frac{20 - 8\sqrt{3}}{9}\cdot 1{,}387g = 0{,}947g = 9{,}47\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$$ **1 pont**

Összesen: 20 pont

A 41. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Technikum 10. osztály
Pécs 2022

1. feladat:



a) Az ábra alapján:

$$\sin\alpha = \frac{h}{L} = 0{,}6, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = 0{,}8.$$

A gerendán lecsúszó test mozgására igaz, hogy

$$L = \frac{a_1}{2}t_1^2,$$

$$a_1 = \frac{2L}{t_1^2} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$ **3 pont**

A dinamika alapegyenletéből:

$$ma_1 = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$ **2 pont**

Ebből a keresett súrlódási tényező:

$$\boxed{\mu = \frac{g\sin\alpha - a_1}{g\cos\alpha} = 0{,}5.}$$ **3 pont**

b) Tegyük fel, hogy a v_0 sebességgel indított test v_1 sebességgel érkezett a gerenda felső végéhez, t_2 időt töltött felfelé csúszva a gerendán, és t_3 ideig repült a levegőben! Határozzuk meg a test lassulását a gerendán!

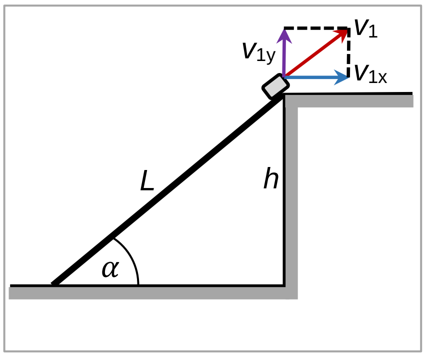
$$ma_2 = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

Az adatokat beírva:

$$a_2 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$ **2 pont**

A t_2 idő:

$$t_2 = \frac{v_0 - v_1}{g}.$$ **2 pont**



A levegőben töltött idő:

$$t_3 = \frac{2v_1\sin\alpha}{g},$$ **1 pont**

Ezekből:

$$\frac{v_0 - v_1}{g} = \frac{2v_1\sin\alpha}{g},$$ **2 pont**

$$v_0 = v_1(1 + 2\sin\alpha) = 2{,}2v_1.$$ **1 pont**

A felfelé csúszó test mozgására igaz, hogy

$$L = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a_2},$$ **2 pont**

$$L = \frac{4{,}84v_1^2 - v_1^2}{2g},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gL}{3{,}84}} = 9{,}129\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$ **1 pont**

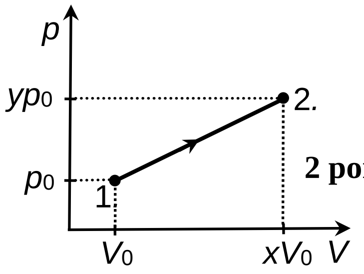
A keresett v_0 kezdősebesség:

$$\boxed{v_0 = 2{,}2v_1 = 20{,}08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$ **1 pont**

Összesen: 20 pont

2. feladat:

a) Írjuk fel a belső energia megváltozását és a végzett munkát a megadott paraméterekkel!



2 pont

$$E_2 - E_1 = \frac{3}{2}(xy - 1)p_0V_0,$$ **3 pont**

$$W^* = \frac{p_0 + yp_0}{2}(xV_0 - V_0),$$

$$W^* = \frac{1}{2}(y + 1)(x - 1)p_0V_0.$$ **3 pont**

Ezekből:

$$xy = \frac{2}{3}\frac{E_2 - E_1}{p_0V_0} + 1,$$

$$xy = 15.$$ **2 pont**

$$(y + 1)(x - 1) = \frac{2W^*}{p_0V_0},$$

$$xy + x - y - 1 = 16,$$

$$x - y = 2.$$ **2 pont**

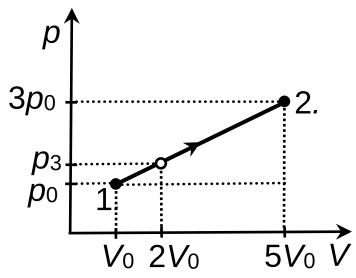
$$x(x - 2) = 15,$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Ezt megoldva:

$$\boxed{x = 5,\ \ y = 3.}$$ **2 pont**

b) Legyen a gáz nyomása a $V_3 = 2V_0$ térfogatú állapotban p_3! A háromszögek hasonlóságából:



$$\frac{p_3 - p_0}{2V_0 - V_0} = \frac{3p_0 - p_0}{5V_0 - V_0},$$ **3 pont**

$$p_3 = \frac{3}{2}p_0.$$ **1 pont**

Az egyesített gáztörvényből:

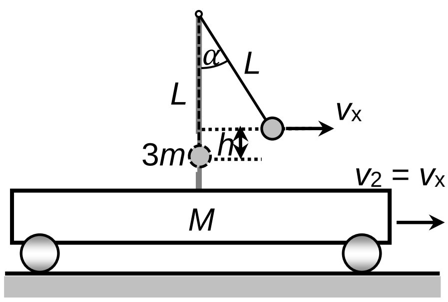
$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{\frac{3}{2}p_0 \cdot 2V_0}{T_3},$$ **1 pont**

$$\boxed{\frac{T_3}{T_0} = 3.}$$ **1 pont**

Összesen: 20 pont

3. feladat:

a) Legyen a $3m$ tömegű golyó talajhoz viszonyított sebességének vízszintes komponense v_x, függőleges komponense pedig v_y! A golyó addig emelkedik, amíg a v_y komponens nullára nem csökken. Haladjon ebben a pillanatban a kocsi v_2 sebességgel! A vízszintes irányú lendület-megmaradásból:



$$3mv_0 = 4mv_x,$$
$$v_x = \frac{3}{4}v_0.$$ **2 pont**

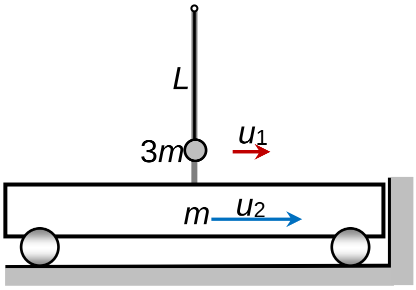
A mechanikai energia megmaradásából:

$$\frac{1}{2} \cdot 3mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 4mv_x^2 + 3mgh,$$ **2 pont**

$$3v_0^2 = 4 \cdot \frac{9}{16}v_x^2 + 6gh,$$

$$\boxed{h = \frac{1}{8}\frac{v_0^2}{g} = 0{,}1 \text{ m.}}$$ **2 pont**

b) Határozzuk meg a testek sebességét az ütközés előtti pillanatban! Legyenek ezek u_1 és u_2! A lendület- és energia-megmaradásból:



$$3mv_0 = 3mu_1 + mu_2,$$ **2 pont**

(1) $$3(v_0 - u_1) = u_2.$$

$$\frac{1}{2}\cdot 3mv_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 3mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2,$$ **2 pont**

(2) $$3(v_0^2 - u_1^2) = u_2^2.$$

(2) és (1) osztásából, feltéve, hogy $v_0 \neq u_1$:

$$v_0 + u_1 = u_2.$$ **2 pont**

Ezekből:

$$v_0 + u_1 = 3(v_0 - u_1),$$

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2}v_0 = \sqrt{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .}$$ **1 pont**

$$u_2 = \frac{3}{2}v_0.$$

Az ütközéskor az *m* tömegű kocsi sebessége az ellentétesére változik:

$$\boxed{u_2^* = -3\sqrt{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .}$$ **2 pont**

c) A fonál függőleges helyzetében a kocsi nem gyorsul, tehát a kocsihoz rögzített koordináta-rendszer inercia-rendszer. A 3*m* tömegű golyó ebben rendszer mozog körpályán v_{rel} sebességgel, ahol:

$$v_{rel} = u_1 + |u_2^*| = 2v_0.$$ **2 pont**

A dinamika alapegyenletét sugárirányba felírva:

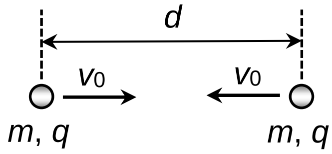
$$3m\cdot\frac{v_{rel}^2}{L} = K - 3mg,$$ **2 pont**

$$\boxed{K = 3m\cdot\left(g + \frac{4v_0^2}{L}\right) = 15mg}.$$ **1 pont**

Összesen: 20 pont

4.feladat:

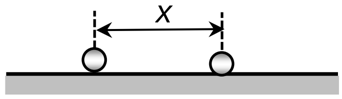
a) A feladat feltétele szerint a két töltés között fellépő taszítóerő:



$$k\frac{q^2}{d^2} = mg,$$

$$kq^2 = mgd^2.$$ **2 pont**

A potenciális energia:



$$W_{\text{pot}} = k\frac{q^2}{d},$$ **2 pont**

$$\boxed{W_{\text{pot}} = k\frac{q^2}{d} = mgd = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{J} = 3{,}6\ \text{mJ}.}$$ **2 pont**

b) A gyöngyök egyszerre indulnak, a Coulomb erőn kívül csak a nehézségi erő befolyásolja a mozgásukat. Szimmetria okokból bármely pillanatban azonos magasságban lesznek, tehát egyszerre érnek a talajra. Legyen a becsapódási pontok távolsága x!

Függőleges irányú mozgásukat csak a nehézségi erő befolyásolja, vagyis szabadon esnek, vízszintes irányú mozgásukat pedig az elektromos kölcsönhatás. A mozgásuk összetehető tehát szabadesésből, és olyan vízszintes irányú, lassuló mozgásból, melynek kezdősebessége v_0, végsebessége pedig nulla. **2 pont**

Ez a mozgás olyan, mintha gravitáció mentes térben egymás felé indítanánk a gyöngyöket, és azok megállásáig vizsgálnánk a folyamatot. Az ilyen folyamatok esetén pedig érvényes a lendület- és energia-megmaradás. **2 pont**

Az energia-megmaradásból:

$$k\frac{q^2}{d} + 2 \cdot \frac{1}{2}mv_0^2 = k\frac{q^2}{x},$$ **2 pont**

$$mgd + mv_0^2 = \frac{mgd^2}{x},$$ **2 pont**

$$x \cdot (gd + v_0^2) = gd^2,$$

$$\boxed{x = \frac{gd^2}{gd + v_0^2} = 0{,}2\ \text{m}.}$$ **2 pont**

c) Kezdetben a taszítóerő:

$$F_1 = k\frac{q^2}{d^2} = mg.$$

A becsapódás előtti pillanatban:

$$F_2 = k\frac{q^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 4k\frac{q^2}{d^2} = 4mg.$$

2 pont

A keresett arány:

$$\boxed{\frac{F_2}{F_1} = 4.}$$

2 pont

Összesen: 20 pont