35. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny

III. forduló

2016. május 1. Gyöngyös, 9. évfolyam

Szakközépiskola

1. feladat. Soma, amikor a d = 50 m széles folyón a partra merőlegesen evez, akkor $d/2$ távolsággal sodródik lefelé. Egy másik alkalommal Soma és Márton ugyanarról a helyről egyszerre kezd evezni a vízhez viszonyítva egymásra merőleges irányban, és egyszerre érnek a túloldalra. Soma most pontosan az indulási hellyel szemben ér partot. Tegyük fel, hogy a folyó sebessége minden pontban ugyanakkora, és a gyerekek állandó, de egymástól eltérő sebességgel eveznek.

a) Adjuk meg Márton és Soma vízhez viszonyított sebességének arányát!

b) Egymástól milyen távol érnek partot a gyerekek?

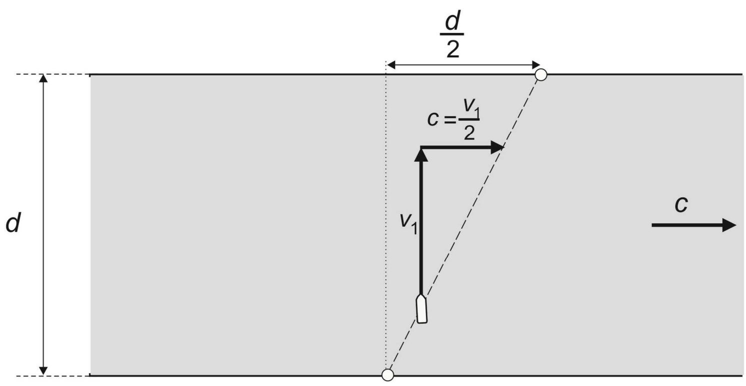
(Simon Péter)

Megoldás. *a)* Soma vízhez viszonyított sebességét jelöljük v_1-gyel, a folyó sebességét c-vel!

Az első alkalomra vonatkozó adatokból Soma mindenkori sebessége a folyó sebességével kifejezhető. Soma sodródásának és átkelésének menetideje egyenlő:

$$\frac{d/2}{c} = \frac{d}{v_1}.$$

A folyó sebessége: $$c = \frac{v_1}{2}.$$



A *második alkalommal* Soma csak úgy érhet a kiindulási ponttal szemközt partot, hogy a folyón ferdén *felfelé* evez úgy, hogy v_1 sebességének folyás irányú összetevője éppen

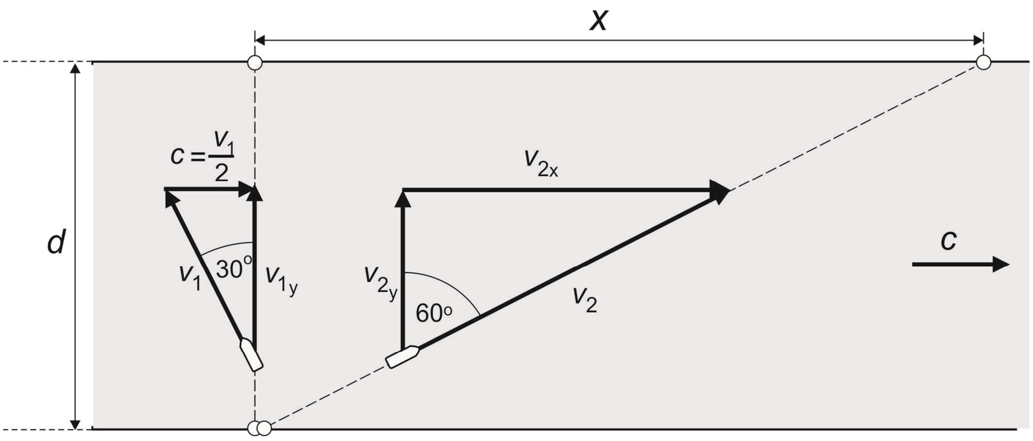
$$\frac{v_1}{2} \quad (= c)$$

nagyságú legyen. Ebből következik, hogy Soma v_1 sebessége most 30°-ot zár be a partra merőleges iránnyal.

Soma sebességének partra merőleges komponense

$$v_{1y} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1.$$

Márton v_2 sebessége a feladat szerint merőleges Soma sebességére, tehát 60°-ot zár be a partra merőleges iránnyal.



Soma és Márton akkor ér egyszerre a túlpartra, ha a partra merőleges sebességkomponenseik egyenlők:

$$v_{1y} = v_{2y}$$

A két sebesség-háromszög hasonló, ezért a megfelelő oldalainak az aránya egyenlő:

$$\frac{v_2}{v_{2y}} = \frac{v_1}{v_1/2} \quad \rightarrow \quad v_2 = 2v_{2y} = 2v_{1y} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 = \sqrt{3}v_1$$

Márton és Soma vízhez viszonyított sebességeinek aránya innen:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\mathbf{3}}\ .$$

b) Márton sodródásának és átkelésének menetideje egyenlő:

$$\frac{x}{c+v_{2x}} = \frac{d}{v_{2y}},$$

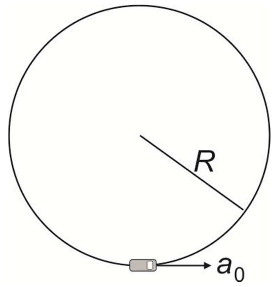
ahol az ábrából $$v_{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot v_1 = \frac{3}{2}v_1$$

$$\frac{x}{\frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_1} = \frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{2}v_1}\ .$$

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{3}d \approx \mathbf{2{,}31}\cdot \boldsymbol{d} = \mathbf{115{,}5\ m.},$$

tehát a gyerekek egymástól x = **115,5 m** távolságban érnek partot.

2. feladat. Vízszintes érdes síkon, R = 2 m sugarú körpályán távirányítású kisméretű játékautó nyugalomból indulva egyenletesen növeli sebességét. A mindvégig állandó nagyságú pályamenti gyorsulása a_0 = 2 m/s^2. A kerekek és a talaj közötti tapadási súrlódási együttható μ = 0,6.



a) Indulástól számítva mekkora utat tesz meg az autó a megcsúszásig?

b) Mekkora volt a kisautó maximális sebessége?

c) Mennyi idő telt el ezalatt?

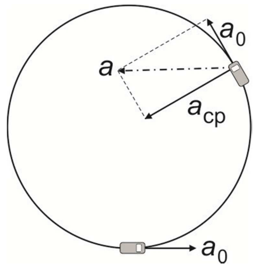
(Számoljunk g = 10 m/s^2-tel!)

(Holics László)

Megoldás. A kis autó egyre nagyobb sebességet szerez. Az egyenletesen változó körmozgás fenntartásához egyre nagyobb centripetális erőre van szükség, amit a tapadási súrlódási erő biztosít. Ugyanez az erő okozza a pálya érintő irányú gyorsulását is.

A kis autó gyorsulását két, egymásra merőleges összetevőre bonthatjuk. Az érintő irányú gyorsulás a mozgás kezdetétől fogva állandó nagyságú, a kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás azonban fokozatosan növekszik Az eredő gyorsulás nagyságát így írhatjuk fel:

$$a = \sqrt{a_0^2 + a_{\text{cp}}^2}.$$



A centripetális gyorsulás a kör sugarától és a test sebességétől függ:

$$a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{R},$$

ahol a sebesség a nyugalomból való indulás miatt a megtett úttól és a pálya menti (a_0) gyorsulástól így függ:

$$v = \sqrt{2a_0 s}.$$

Ennek segítségével a centripetális gyorsulást kifejezhetjük a megtett út függvényeként:

$$a_{\text{cp}} = \frac{2a_0 s}{R}.$$

A kis auto eredő gyorsulása tehát:

$$a = \sqrt{a_0^2 + a_{\text{cp}}^2} = \sqrt{a_0^2 + \left(\frac{2a_0 s}{R}\right)^2} = a_0\sqrt{1 + \frac{4s^2}{R^2}}.$$

Newton II. törvénye (mozgásegyenlet) szerint ezt a gyorsulást a külső erők eredője hozza létre. A vízszintes érdes síkon haladó testre ez csak a tapadó (később csúszó) súrlódási erő. A megcsúszás pillanatában az erő is és a gyorsulás is maximális értékű:

$$\mu mg = ma.$$

Ebbe a kis autó eredő gyorsulását beírva és a tömeggel egyszerűsítve:

$$\mu g = a_0\sqrt{1+\frac{4s^2}{R^2}}$$

adódik.

A bal oldal a tapadási súrlódási erő legnagyobb értéke az adott síkon, így itt annak a határesetét kaptuk meg, ami a megcsúszás kezdetéig még érvényes (ennél nagyobb sebességnél a kis autó letér a körpályáról). A számítások elvégzése után a keresett út hossza:

$$s = \frac{R}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu g}{a_0}\right)^2 - 1}\,.$$

Számadatainkkal a kisautó megcsúszása az indulást követően

$$s = \frac{2\ \mathrm{m}}{2}\sqrt{\left(\frac{0,6\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\right)^2 - 1} = \mathbf{2,83\ m}$$

út megtétele után következik be.

b) Az elért maximális sebesség

$$v = \sqrt{2a_0 s} = \sqrt{2\cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2,83\ \mathrm{m}} = \mathbf{3,36\,\frac{m}{s}}$$

volt.

c) Indulástól a megcsúszásig pedig

$$s = \frac{v}{2}t \quad \rightarrow \quad t = \frac{2s}{v} = \frac{2\cdot 2,83\ \mathrm{m}}{3,36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \mathbf{1,68\ s}$$

idő telt el.

Rövid megoldás:

Az eredő gyorsulás a centripetális és érintőleges gyorsulás kapcsolata:

$$a^2 = a_{\mathrm{cp}}^2 + a_0^2.$$

Ezt a gyorsulást a súrlódási erő okozza. A mozgásegyenletből (tömeggel osztva)

$$\mu^2 g^2 = \frac{v^4}{R^2} + a_0^2,$$

ahonnan a maximális sebesség a magcsúszásig:

$$v = \sqrt[4]{\left(\mu^2 g^2 - a_0^2\right)R^2} = \mathbf{3,36\,\frac{m}{s}}.$$

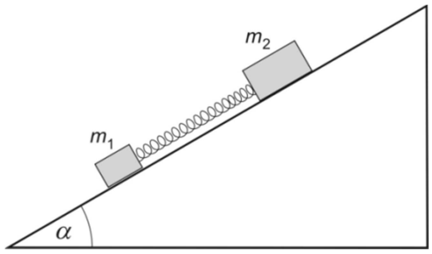
A keresett idő

$$t = \frac{v}{a_0} = \mathbf{1{,}68\,s,}$$

és az addig megtett út:

$$s = \frac{1}{2} a_0 t^2 = \mathbf{2{,}82\,m.}$$

3. feladat. Egy α = 30°-os hajlásszögű lejtőn, a kezdetben rögzített m_1 = 1 kg és m_2 = 2 kg tömegű testeket D = 200 N/m direkciós erejű megnyújtott rugóval kapcsoltuk össze az ábra szerint. Abban a pillanatban, amikor a testek rögzítését megszüntettük, azok egymás irányába, azonos nagyságú gyorsulással indultak el.



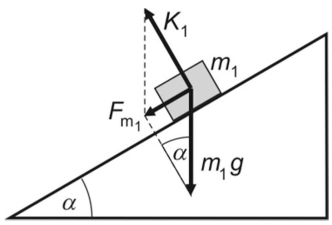
a) Mekkora volt a rugó megnyúlása kezdetben?
b) Mekkora gyorsulással indultak a testek?
A súrlódási együttható értéke μ = 0,1.

(Suhajda János)

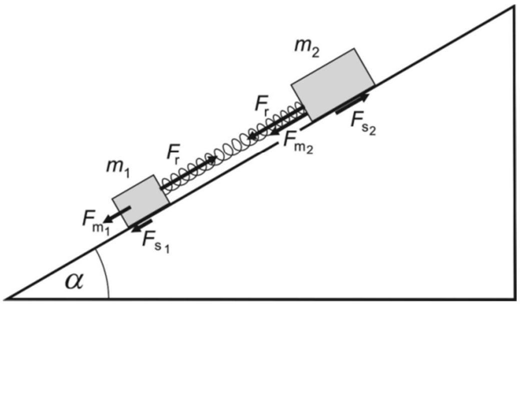
Megoldás. Adatok: $\mu_1 = \mu_2$ = 0,1; m_1 = 1 kg; m_2 = 2 kg; D = 200 N/m; α = 30°.

A testekre ható erőket az ábra mutatja. A két rúgóerő azonos nagyságú, ellentétes irányú, a lejtővel párhuzamos. A felfelé induló kis testre ható súrlódási erő a lejtő mentén lefelé mutat, a lefele induló nagy testre ható erő pedig a lejtő mentén felfelé. Az első ábrán be nem rajzolt függőleges nehézségi erők (m_1g és m_2g), valamint a lejtő lapja által kifejtett, a lejtőre merőleges K_1 és K_2 kényszererő eredője a lejtővel párhuzamos, lefelé mutat. Ezek az erők szabják meg a testek gyorsulásait.

Az α = 30° fok miatt az F_{m_1} és F_{m_2} erők a megfelelő nehézségi erőknek a fele. A K_1 és K_2 kényszererő (nyomóerő) pedig (egyenlő oldalú háromszög magassága lévén) a megfelelő nehézségi erőnek a $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese. Ettől függ a súrlódási erő nagysága, azaz



$$F_{\mathrm{s}_1} = \mu K_1 = \mu m_1 g \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad F_{\mathrm{s}_2} = \mu K_2 = \mu m_2 g \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Tekintsük a mozgásegyenletek felírásánál mindkét testnél a rájuk ható rugóerő irányát pozitívnak, és használjuk ki az adatok adta lehetőséget, jelöljük m_1-et m-mel, m_2-t $2m$-mel! A feltétel szerint tehát

$$a_1 = a_2.$$

Az 1-es jelzésű test mozgásegyenletéből annak gyorsulása:

$$F_\mathrm{r} - F_{\mathrm{m}_1} - F_{\mathrm{s}_1} = m_1 a_1 \quad \rightarrow \; a_1 = \frac{F_\mathrm{r} - F_{\mathrm{m}_1} - F_{\mathrm{s}_1}}{m_1} = \frac{F_\mathrm{r} - F_{\mathrm{m}_1} - F_{\mathrm{s}_1}}{m}.$$

A 2-es jelzésű test mozgásegyenletéből annak gyorsulása:

$$F_\mathrm{r} + F_{\mathrm{m}_2} - F_{\mathrm{s}_2} = m_2 a_2 \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{F_\mathrm{r} + F_{\mathrm{m}_2} - F_{\mathrm{s}_2}}{m_2} = \frac{F_\mathrm{r} + F_{\mathrm{m}_2} - F_{\mathrm{s}_2}}{2m}.$$

Behelyettesítve a már meghatározott értékeket:

$$a_1 = \frac{F_\mathrm{r} - F_{\mathrm{m}_1} - F_{\mathrm{s}_1}}{m} = \frac{F_\mathrm{r}}{m} - \frac{\frac{mg}{2}}{m} - \frac{\mu m\, g\frac{\sqrt{3}}{2}}{m} = \frac{F_\mathrm{r}}{m} - \frac{g}{2} - \mu g\frac{\sqrt{3}}{2},$$

és hasonlóképpen

$$a_2 = \frac{F_\mathrm{r} + F_{\mathrm{m}_2} - F_{\mathrm{s}_2}}{2m} = \frac{F}{2m} + \frac{\frac{2mg}{2}}{2m} - \frac{\mu 2mg\frac{\sqrt{3}}{2}}{2m} = \frac{F_\mathrm{r}}{2m} + \frac{g}{2} - \mu g\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A két gyorsulás nagysága egyenlő lévén írható:

$$\frac{F_\mathrm{r}}{m} - \frac{g}{2} - \mu g\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{F_\mathrm{r}}{2m} + \frac{g}{2} - \mu g\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Innen a rugóerő nagysága meghatározható. Elhagyva a súrlódási erők azonos kifejezését:

$$\frac{F_\mathrm{r}}{m} - \frac{g}{2} = \frac{F_\mathrm{r}}{2m} + \frac{g}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{F_\mathrm{r}}{m} - \frac{F_\mathrm{r}}{2m} = \frac{g}{2} + \frac{g}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{2F_\mathrm{r} - F_\mathrm{r}}{2m} = g \quad \rightarrow \quad F_\mathrm{r} = 2mg.$$

Ezzel a rugó kezdeti megnyúlása a rugalmas alakváltozás rugóra vonatkozó törvénye alapján:

$$F_\mathrm{r} = D\Delta l \qquad \rightarrow \qquad \Delta l = \frac{F_\mathrm{r}}{D} = \frac{2mg}{D} = \frac{2\cdot 1\,\mathrm{kg}\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{200\;\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \mathbf{0{,}1\,m.}$$

b) A két test gyorsulásának nagysága pedig:

$$a_1 = \frac{F_\mathrm{r}}{m} - \frac{g}{2} - \mu g\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2mg}{m} - \frac{g}{2} - \mu g\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}g - \mu g\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{3}{2} - \mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right)g = \frac{3-\mu\sqrt{3}}{2}g = \frac{3-0{,}1\sqrt{3}}{2}10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathbf{14{,}134\frac{m}{s^2}}.$$

(Ugyanezt kapjuk, ha a másik test gyorsulásának kifejezésébe helyettesítünk be.)

(Aki ismeri a szögfüggvényeket, rövidebben célhoz jut

$$a_1 = \frac{F_\mathrm{r}}{m} - \frac{mg\sin\alpha}{m} - \frac{\mu mg\cos\alpha}{m} = \frac{F_\mathrm{r}}{m} - g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right),$$

$$a_2 = \frac{F_\mathrm{r}}{m} + \frac{2mg\sin\alpha}{2m} - \frac{\mu 2mg\cos\alpha}{2m} = \frac{F_\mathrm{r}}{2m} + g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

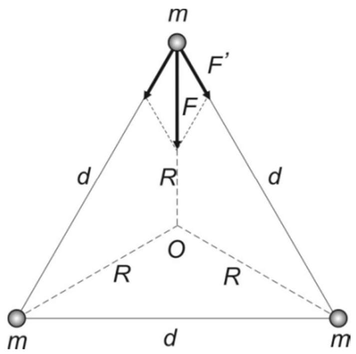
A két gyorsulás egyenlőségéből $\alpha = 30^0$ behelyettesítése után a rugóerőre, majd a gyorsulásra a fenti értékeket kapjuk.)

4. feladat. Három egyenlő tömegű égitest, minden más testtől távol a világűrben, egy szabályos háromszög csúcsaiban helyezkedik el és körpályán kering a rendszer tömegközéppontja körül.

Mekkora tömegűek a testek, ha tudjuk, hogy távolságuk d = 200 000 km, valamint, hogy keringésük periódusideje T =100 nap?

(Kiss Miklós)

Megoldás. Az ábra jelöléseit használva az R pályasugár:



$$R = \frac{d}{\sqrt{3}}, \qquad \rightarrow \qquad d = R\sqrt{3}$$

Két test között ható gravitációs erő:

$$F' = f\,\frac{m^2}{d^2} = f\,\frac{m^2}{3R^2}$$

Egy testre ható eredő gravitációs erő az ábra alapján:

$$\sum F = \sqrt{3}F' = f\,\frac{\sqrt{3}m^2}{d^2} = f\,\frac{\sqrt{3}m^2}{3R^2}$$

A szimmetria miatt mindegyik test mozgásegyenlete:

$$\sum F == ma_{\text{cp}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}\,f\,\frac{m^2}{R^2} = mR\omega^2$$

Ebből:
$$\omega^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,f\,\frac{m}{R^3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,f\,\frac{m}{\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,f\,\frac{m}{\frac{d^3}{3\cdot\sqrt{3}}} = 3f\,\frac{m}{d^3}\ .$$

A keringés szögsebessége:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{100\cdot 86400\ \text{s}} = 7,2722\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{\text{s}}$$

A tömegre adódik:

$$m = \frac{d^3\omega^2}{3f} = \frac{\left(2\cdot 10^8\,\text{m}\right)^3\cdot\left(7,2722\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{\text{s}}\right)^2}{3\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} = \mathbf{2,114\cdot 10^{22}\,kg.}$$

Az égitestek tömege hozzávetőlegesen m = **$2,1\cdot 10^{22}$kg.**

35. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny

III. forduló

2016. május 1. Gyöngyös, 9. évfolyam

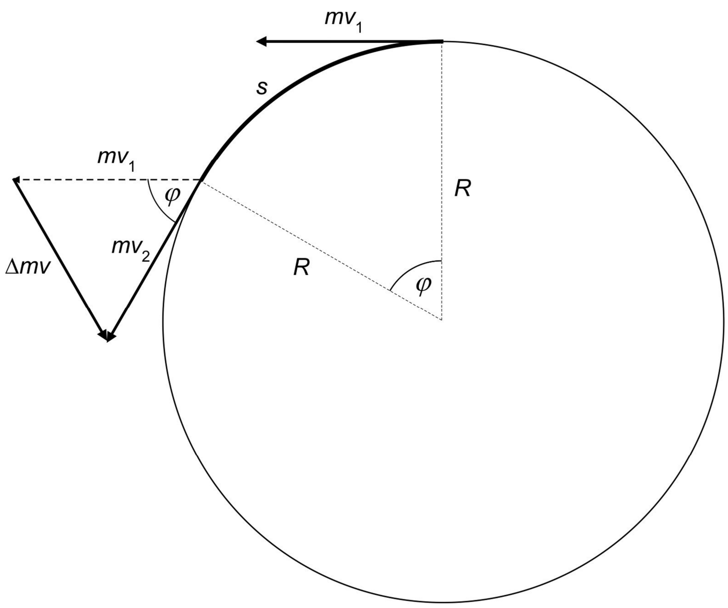
Gimnázium

1. feladat. Vízszintes talajon mindvégig egyenletesen haladó gépjármű tömege m =1000 kg, sebessége v = 36 km/h. Legalább mekkora a kerekek és a talaj közötti súrlódás együtthatója, ha a gépkocsi lendülete t = 6 s alatt egyenletesen ΔI = 10 000 kgm/s-mal változik?

(Holics László)

Megoldás. Vegyük figyelembe, hogy a lendület (impulzus) *vektormennyiség*, amelynek abszolút értéke a test tömegének és sebességnagyságának szorzata. Ha a sebességnagyság állandó, a lendületváltozás csak a mozgás irányának változásából adódhat. Így az egyenletesen mozgó jármű lendülete csak görbevonalú pályán való mozgás során változhat meg. A lendület egyenletes változása pedig állandó nagyságú centripetális gyorsulást jelent, ami egyenletes sebesség esetén csak körpályán valósulhat meg.

Az ábra eligazít ismeretlen és az adatok között:



Vegyük észre, hogy a lendületváltozás nagysága éppen a mindenkori lendületnagysággal egyenlő, mert a lendületváltozás ΔI = 10 000 kgm/s és a lendületnagyság mv = 1000 kg·10 m/s = =10 000 kgm/. Így a kezdő-, végső lendület és a lendületváltozás egyenlő oldalú háromszöget alkot, az ábrán jelzett φ szög, tehát 60° = π/3 rad.

A centripetális gyorsulást a súrlódási erő hozza létre. A kapcsolat a súrlódási együttható és a mozgásjellemzők között:

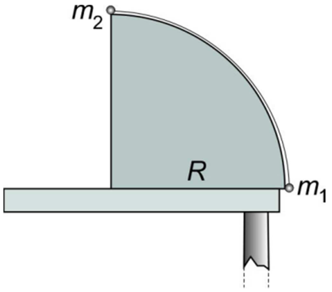
$$\mu mg = m\frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{v^2}{gR}.$$

Meghatározandó tehát a körpálya sugara. A megtett s út és a φ szögelfordulás kapcsolata az R sugárral:

$$R\varphi = s \quad \rightarrow \quad R = \frac{s}{\varphi} = \frac{vt}{\varphi}.$$

Ezzel a mozgás fenntartásához szükséges súrlódási együttható

$$\mu = \frac{v^2}{gR} = \frac{v^2}{g\frac{vt}{\varphi}} = \frac{\varphi v}{gt} = \frac{\pi v}{3gt} = \mathbf{0{,}175.}$$



2. feladat. R = 20 cm sugarú, negyedhenger-alakú, asztal széléhez rögzített lejtőn két különböző tömegű, súlytalan és nyújthatatlan fonállal összekötött, pontszerű testet helyezünk el az ábra szerint. A lejtőhöz simuló fonál függőleges síkban helyezkedik el. A két testből és fonálból álló rendszert magára hagyva az m_2 tömegű test akkor válik el a lejtőtől, amikor szögelfordulása 30°. A súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható.

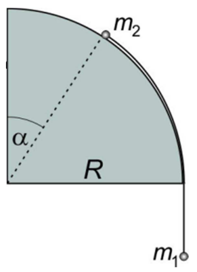
a) Mekkora ebben a pillanatban a testek sebessége?

b) Mekkora a testek tömegaránya?

c) Az m_1 tömegű test súlyának hányad része ekkor a fonálerő?

(Szkladányi András)

Megoldás. Adatok: $R = 0{,}2$ m; $\alpha = 30°$;



a) Az elválás pillanatában a lejtő által kifejtett kényszererő megszűnik, az m_2 tömegű testet sugár irányba a nehézségi erő sugár irányú komponense gyorsítja:

$m_2 g\frac{\sqrt{3}}{2} = m_2\frac{v^2}{R}$A keresett tömegarány

A testek sebessége az elválás pillanatában:

$$v = \sqrt{gR\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1{,}32\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) A mechanikai energia megmaradása miatt:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = m_1 gR\frac{\pi}{6} + m_2 gR\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Az első egyenletet felhasználva és gR-rel való egyszerűsítés után:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{\sqrt{3}}{2} = m_1\frac{\pi}{6} + m_2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Átalakítások után a keresett tömegarány:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}} \approx \mathbf{3{,}3}$$

c) A K fonálerőnek és az m_1 tömegű test súlyának aránya:

$$\frac{K}{m_1 g} = \frac{m_1(g-a)}{m_1 g} = 1 - \frac{a}{g}.$$

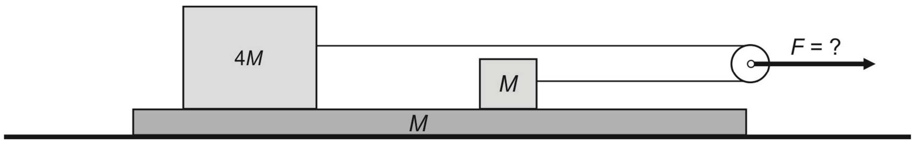
Itt a jelöli a testek érintő irányú közös gyorsulását, amely:

$$a = \frac{m_1 g + \frac{1}{2} m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

A keresett arány tehát:

$$\frac{K}{m_1 g} = 1 - \frac{m_1 + \frac{1}{2} m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{\frac{1}{2}}{4{,}3} \approx \mathbf{0{,}116}$$

3. feladat. Vízszintes, légpárnás (súrlódásmentes) asztalra helyezünk egy nagyméretű, M = 2 kg tömegű lapot, és a lap tetejére teszünk két kockát. A kisebbik tömege szintén M, a nagyobbiké 4M. Könnyű ideális fonalak és egy szintén könnyű és ideális mozgócsiga segítségével a rendszert mozgásba hozzuk úgy, amint ezt az ábra mutatja. A kockák és a lap közötti csúszási súrlódási együttható 0,1 értékű, míg a tapadási tényező 0,16. Mekkora az ábrán látható F húzóerő nagysága, és mekkora gyorsulással mozognak a kockák, ha az alattuk lévő lap gyorsulása 0,2 g, továbbá mekkora a csiga gyorsulása?



(Honyek Gyula)

Megoldás. Mivel a tömegek között is, valamint a súrlódási együtthatók között is jelentős a különbség, így feltételezhetjük (a végén persze ezt ellenőrizni kell), hogy a mozgás során a nagy kocka a laphoz tapad, míg a kicsi csúszik rajta.

A lapot vízszintes irányban a kis kocka által kifejtett $\mu M g = 0{,}1 M g = 2$ N csúszási súrlódási erő és a nagy kocka F_t aktuális (nem a maximálisan lehetséges) tapadási súrlódási ereje gyorsítja:

$$\mu M g + F_\mathrm{t} = M a = M 0{,}2 g = 4 \text{ N}.$$

Ebből azonnal láthatjuk, hogy a tapadási súrlódási erő nagysága szintén

$$F_\mathrm{t} = \mu M g = 0{,}1 M g = 2 \text{ N},$$

ami jelentősen kisebb, mint a tapadási erő elméleti maximuma:

$$\max F_\mathrm{t} = \mu_0 4 M g = 0{,}64 M g = 12{,}8 \text{ N},$$

tehát jogos volt azt feltételezni, hogy a nagy kocka a lappal együtt mozog.

A csiga könnyű, ideális, valamint a fonál is elhanyagolható tömegű, így a fonálban ébredő erő F/2 nagyságú. Vízszintes irányban a nagy kockára a fonálerő és a tapadási súrlódási erő hat, tehát a következő mozgásegyenletet írhatjuk fel:

$$\frac{F}{2} - F_t = 4M(0{,}2g) = 0{,}8Mg = 16\ \text{N}.$$

Írjuk be a tapadási súrlódási erőt:

$$\frac{F}{2} - 0{,}1Mg = 0{,}8Mg,$$

amiből a kérdéses húzóerő

$$F = \mathbf{1{,}8}\boldsymbol{Mg} = \mathbf{36\ N}.$$

A kis kocka mozgásegyenlete:

$$\frac{F}{2} - \mu Mg = Ma,$$

amiből

$$a = 0{,}8g \approx \mathbf{8\,\frac{m}{s^2}}.$$

A kis kockára a fonál $0{,}9Mg$ = 18 N erővel hat, ami olyan nagy, hogy (a feltételezésünkkel egyezően) a kis kocka megcsúszik a lapon.
A nagy kocka gyorsulása megegyezik a lap $0{,}2\ g \approx$ **2 m/s²** gyorsulásával.

Hátra van még a csiga gyorsulásának a meghatározása.

A laphoz képest a kis kocka 8 m/s^2 – 2 m/s^2 = 6 m/s^2 gyorsulással mozog, tehát a laphoz képest a mozgócsiga gyorsulása ennek a fele, vagyis 3 m/s^2. Ehhez hozzáadódik még a lap, illetve a nagy kocka 2 m/s^2 nagyságú gyorsulása, vagyis a csiga a légpárnás asztalhoz képest **5 m/s²** értékű gyorsulással mozog. Érdekességként állapíthatjuk meg, hogy a csiga a mozgás során távolodik a laptól (és a vele együtt mozgó nagy kockától), azonban a kis kocka közeledik a csigához.

4. feladat. Két egymás mellett felfüggesztett inga éppen összeér, a második a falhoz is hozzáér (A ábra). A testek tömege m_1 = 50 g, m_2 = 150 g, méretük megegyezik. Az ingákat a B ábrán látható módon $\alpha = 60°$-kal kitérítjük a B jelű helyzetig és elengedjük.

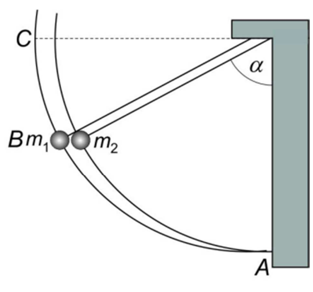
a) Mekkora a testek sebessége az ütközés után, amikor elérik az *A*, *B*, és *C* jelű helyzetekben?

b) Mekkora az egyes fonalakat feszítő erő közvetlenül az ütközés előtt és után az *A* jelű helyen?

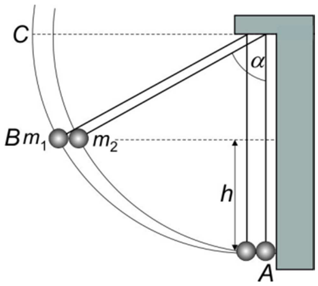
Az inga hossza 62,5 cm. Minden ütközést tekintsünk tökéletesen rugalmasnak és pillanatszerűnek!

(Kiss Miklós)

A ábra



B ábra



I. Megoldás. *a)* Legyen az ingák hossza *L*, $m_1 = m$, így $m_2 = 3m$. A *B* magasságából induló testek sebessége *A* magasságában az energia megmaradás alapján:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg\frac{L}{2},$$

ahol *h* a 60° miatt az ingák hosszának a fele. Ebből:

$$v = \sqrt{gL} \approx 2,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Elsőként az m_2 tömegű test ütközik a falnak és ugyanekkora sebességgel visszapattan a rugalmas ütközés miatt. Ezután a két test ütközik. Ennek következtében az m_2 tömegű test megáll, az m_1 tömegű test sebességének a nagysága megduplázódik. Ennek indoklása:

$$v_{\text{TKP}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{mv - 3mv}{4m} = -\frac{v}{2} = -1,25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A képletben figyelembe vettük a második test sebességének irányát, a tömegközéppont balra mozog.

A golyók most összeérnek, rögtön ütköznek, de nézzük külön az ütközés problémáját. Érkezzen egyenes vonalú pályán távolról a két test és ütközzenek így centrálisan. Az nem befolyásolja az ütközés utáni sebességeket, hogy egyenes vonalú pályán milyen távolról érkezik a két test, de könnyebben áttekinthetjük az egyes testek sebességének alakulását.

Mekkora a testek sebessége a tömegközépponti (továbbiakban TKP-i) rendszerben?

Az m_1 tömegű test egy másodperc alatt két és fél métert haladna jobbra, a tömegközéppont egy és negyed métert balra, ezért az m_1 tömegű test a TKP rendszerben egy másodperc alatt 3,75 métert haladna jobbra, vagyis a sebessége

$$u_1 = 3,75\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Az m_2 tömegű test két és fél métert haladna egy másodperc alatt a tömegközépponttal egyező irányban, így a távolságuk egy másodperc alatt 1,25 méterrel csökkenne. Ezért az m_2 tömegű test sebessége

$$u_2 = -1,25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

A negatív előjel most is a haladás irányát mutatja.

Ha rugalmasan ütköznek, akkor lendületük, így sebességük nagysága sem változik meg, csak az irányuk változik meg. Ennek megfelelően az ütközés utáni sebességek a TKP-i rendszerben

$$u'_1 = -3,75\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,,$$

illetve

$$\text{u}'_2 = 1,25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Most még vissza kell térni a laboratóriumi rendszerbe. Az első test visszafelé halad 3,75 métert, de a tömegközéppont is erre halad 1,25 métert, így egy másodperc alatt öt métert halad visszafelé, ezért

$$v'_1 = -5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Az m_2 tömegű test 1,25 métert haladna előre a tömegközépponthoz képes, de a tömegközéppont 1,25 métert haladna balra, ezért ez a test összesen nem halad semennyit, tehát sebessége

$$v'_2 = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

lesz, vagyis megáll. (A 2-es test tehát *A*-ban marad, nem megy sem a *B*, sem a *C* pontba.)

Az 1-es test sebessége ezután a *B* pontban:

$$\frac{1}{2}m(2v)^2 = mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}mv'^2,$$

ebbe a sebességet behelyettesítve:

$$\frac{1}{2}4gL = g\frac{L}{2} + \frac{1}{2}v'^2$$

Ebből:

$$v'^2 = 3gL, \quad \text{így} \quad v' = \sqrt{3gL} = \sqrt{3}\sqrt{gL} \approx 4{,}33\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Az 1-es test sebessége ezután a *C* pontban:

$$\frac{1}{2}m(2v)^2 = mgL + \frac{1}{2}mv''^2,$$

ebbe a sebességet behelyettesítve:

$$\frac{1}{2}4gL = g\frac{2L}{2} + \frac{1}{2}v''^2$$

Ebből:

$$v''^2 = 2gL, \quad \text{így} \quad v'' = \sqrt{2gL} = \sqrt{2}\sqrt{gL} \approx \mathbf{3{,}54\frac{m}{s}}.$$

b) Az *A* helyen a sebességek változnak, a körpálya miatt a kötélerők is. A dinamika alaptörvénye a sebességre merőleges komponensekre:

$$m \cdot a_{\mathrm{cp}} = K - mg,$$

ezért

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = K - mg,$$

így

$$K = mg + m \cdot \frac{v^2}{R}.$$

Az 1-es test az ütközések előtt:

$$K = mg + m \cdot \frac{gL}{L} = 2mg \approx \mathbf{1N.}$$

A 2-es test érkezéskor és a fallal való ütközés után:

$$K = 3mg + 3m \cdot \frac{gL}{L} = 6mg \approx \mathbf{3N.}$$

Az 1-es test az ütközések után:

$$K = mg + m \cdot \frac{4gL}{L} = 5mg \approx \mathbf{2{,}5N.}$$

A 2-es test az ütközés után áll, ezért:

$$K = 3mg \approx \mathbf{1{,}5N.}$$

II. megoldás. *a)* Legyen az ingák hossza *L*, $m_1 = m$, így $m_2 = 3m$. A *B* magasságából induló testek sebessége *A* magasságában az energia megmaradás alapján:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg\frac{L}{2},$$

ahol h a 60° miatt az ingák hosszának a fele. Ebből:

$$v = \sqrt{gL} \approx 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ekkora sebességgel érkezik mindkét test az A pontba. Ha általános esetet tételezünk fel, a folyamat során (a kérdezett magasságok eléréséig) 3 ütközésnek kell lezajlania:

1. az m_2 tömegű golyó ütközik a fallal, majd visszapattanás után
2. az m_2 ütközik az érkező m_1 tömegű golyóval, amiről visszapattan,
3. és újból ütközik a fallal, amiről visszapattan.

A tényleges ütközéseket a tömegarányok határozzák meg.

Az abszolút rugalmas ütközés (függvénytáblázatban megtalálható) képletét alkalmazzuk. Az ütközés utáni sebességeket u_1-gyel és u_2-vel jelöljük. Az irányokat az érkezési sebesség irányában tekintjük pozitívnak.

Az m_2 tömegű test a „végtelen tömegű” fallal való első ütközése után v nagyságú sebességgel pattan vissza. Ezután a két golyó ütközése következik.

Az abszolút rugalmas ütközés általános összefüggése:

$$u_1 = (k+1)\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1,$$

ahol a k „ütközési szám” abszolút rugalmas ütközésnél 1, abszolút rugalmatlannál 0.

Alkalmazzuk az ütközés utáni sebességek meghatározását a mi esetünkre $(k + 1) = 2$, és $m_2 = 3m_1$ alkalmazásával ($m_1 = m$ rövid jelöléssel):

$$u_1 = 2\frac{mv - 3mv}{m + 3m} - v = \frac{2mv - 6m - mv - 3mv}{m + 3m} = 2v = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

tehát az m_1 tömegű test megduplázta sebességének nagyságát.

Hogyan mozog tovább az m_2 tömegű test? Az abszolút rugalmas ütközés formulája $m_2 = 3m$-re:

$$u_2 = 2\frac{-mv + 3mv}{m + 3m} - v = \frac{-2mv + 6m - mv - 3mv}{4m} = 0,$$

tehát a speciális tömegarányok miatt nem következik be harmadik ütközés (a fallal), hanem az m_2 tömegű test az A pontban marad, nem megy sem a B, sem a C pontba!

Az m_1 tömegű test sebessége ezután a B pontban az energiatételből:

$$\frac{1}{2}m(2v)^2 = mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}mv'^2,$$

ebbe a sebességet behelyettesítve egyszerűsítések után:

$$4gL = gL + v'^2$$

Ebből:

$$v'^2 = 3gL\,, \qquad \text{így} \qquad v' = \sqrt{3gL} = \sqrt{3}\sqrt{gL} \approx \mathbf{4{,}33\,\frac{m}{s}}.$$

Az m_1 tömegű test sebessége ezután a C pontban:

$$\frac{1}{2}m(2v)^2 = mgL + \frac{1}{2}mv''^2,$$

ebbe a sebességet behelyettesítve:

$$\frac{1}{2}4gL = g\frac{2L}{2} + \frac{1}{2}v''^2$$

Innen:

$$v''^2 = 2gL\,, \qquad \text{így} \qquad v' = \sqrt{2gL} = \sqrt{2}\sqrt{gL} \approx \mathbf{3{,}54\frac{m}{s}}\,.$$

A *b)* kérdésre adott válasz azonos az I. megoldásbelivel.