

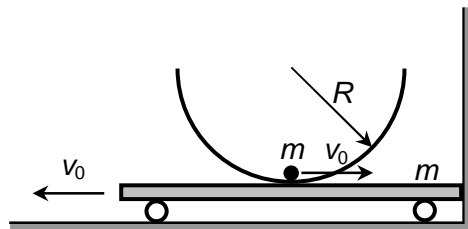
A 31. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Gimnázium 10. osztály
Pécs 2012

1. feladat:

- a) Legyen a fallal való ütközés utáni pillanatban a kocsi sebessége u_1 , a testé pedig u_2 ! A kocsi sebessége a fallal való rugalmas ütközés után ellentétes irányúra változik, a testé pedig nem változik.

$$u_1 = -v_0 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$u_2 = v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



2 pont

- b) Az ütközés utáni pillanatban a kocsi nem gyorsul, és a test a félgömbhöz viszonyítva mozog körpályán. A dinamika alapegyenletéből:

$$m \frac{v_r^2}{R} = F_k - mg,$$

$$m \frac{4v_0^2}{R} = F_k - mg,$$

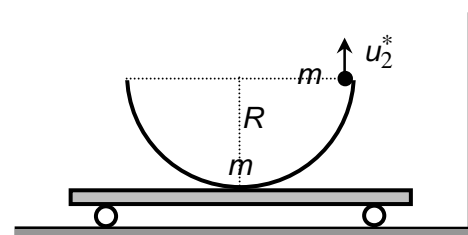
$$F_k = m \left(\frac{4v_0^2}{R} + g \right) = 27,2 \text{ N}.$$

2 pont

- c) Ebben a pillanatban a test relatív sebessége függőleges irányú, tehát vízszintes irányban azonos u_1^* sebességgel mozognak. A vízszintes irányú lendület-megmaradásból:

$$mv_0 - mv_0 = 2mu_1^*,$$

$$u_1^* = 0.$$



Ez azt jelenti, hogy ebben a pillanatban a kocsi megáll. A test függőleges irányú sebességét az energia-megmaradásból számolhatjuk.

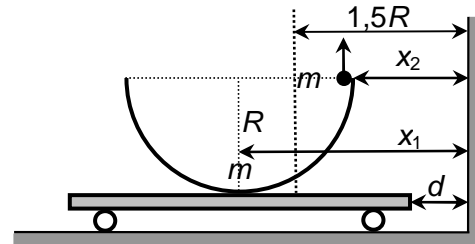
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgR + \frac{1}{2}m(u_2^*)^2,$$

$$u_2^* = \sqrt{2v_0^2 - 2gR} \approx 0,45 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3 pont

d) Legyen a kérdéses pillanatban a kocsi és félgömb alkotta rendszer tömegközéppontja a faltól x_1 távolságra, az R magasságban lévő test pedig x_2 távolságra! Az ütközés utáni pillanatban a rendszer tömegközéppontjának sebessége:

A tömegközépponton áthaladó egyenes



$$v_{\text{Tk}} = \frac{m v_0 - m v_0}{m + m} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A rendszer további mozgása során a vízszintes irányú külső erők eredője zérus, ami azt jelenti, hogy a tömegközéppont vízszintesen nem mozdul el, azaz végig $1,5R$ távolságra lesz a faltól. Ezt felhasználva:

$$1,5R = \frac{m x_1 + m x_2}{2m},$$

$$1,5R = \frac{m(x_2 + R) + m x_2}{2m},$$

$$\boxed{x_2 = R = 9 \text{ cm.}}$$

$$x_1 = x_2 + R = 2R.$$

A kocsi jobb oldali végének a faltól mért d távolsága:

$$\boxed{d = x_1 - 1,5R = \frac{1}{2} R = 4,5 \text{ cm.}}$$

3 pont

Összesen: 10 pont

2. feladat:

a) Legyen az egyensúlyi helyzetben a bezárt gáz nyomása p_1 , a kötélen ébredő erő K , az alsó dugattyú tömege m_1 ! A dinamika alapegyenletéből:

$$m_2 a_2 = p_1 A_2 - p_0 A_2 - m_2 g,$$

$$p_1 = p_0 + \frac{m_2(g + a_2)}{A_2} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

A felső dugattyú egyensúlyi feltételéből:

$$p_0 A_2 + m_2 g + K - p_1 A_2 = 0,$$

$$K = (p_1 - p_0) A_2 - m_2 g,$$

$$\boxed{K = m_2 a_2 = 270 \text{ N.}}$$

2 pont

Az alsó dugattyú egyensúlyi feltételéből:

$$p_1 A_1 + m_1 g - p_0 A_1 - K = 0,$$

$$\boxed{m_1 = \frac{K - (p_1 - p_0) A_1}{g} = 3 \text{ kg.}}$$

2 pont

b) A bezárt gáz nyomását a külső légnyomás és dugattyúk paramétereivel is kifejezhetjük:

$$p_1 = p_0 + \frac{(m_1 + m_2)g}{A_2 - A_1}.$$

Ebből is látható, hogy lassú melegítés esetén a gáz nyomása állandó marad. Izobár folyamat játszódik le. Melegítés esetén a gáz térfogatának növekedni kell, tehát a dugattyú felfelé mozdul el. Legyen a keresett elmozdulás s !

A közölt hő és a végzett munka:

$$Q = C_{m,p} \cdot n(T_2 - T_1),$$

$$Q = \frac{7}{2} R \cdot n(T_2 - T_1),$$

$$W^* = nR \cdot (T_2 - T_1).$$

Ezekből:

$$W^* = \frac{2}{7} Q = 70 \text{ J.}$$

A végzett tágulási munka:

$$W^* = p_1 s (A_2 - A_1).$$

A keresett elmozdulás:

$$s = \frac{2}{7} \frac{Q}{p_1(A_2 - A_1)},$$

$$s = \frac{2}{7} \frac{Q}{p_0(A_2 - A_1) + (m_1 + m_2)g} = 0,25 \text{ m.}$$

4 pont

c) Legyen a gáz kezdeti térfogata V_0 , kezdeti hőmérséklete T_0 , a keresett hőmérséklet-változás ΔT ! A feltétel szerint a dugattyú maximális elmozdulása L . Az állapotegyenletet a két állapotra felírva:

$$p_1 V_0 = n R T_0,$$

$$p_1 (V_0 + L(A_2 - A_1)) = n R (T_0 + \Delta T).$$

Ezekből:

$$\Delta T = \frac{p_1 L (A_2 - A_1)}{n R} = 50,52 \text{ K.}$$

2 pont

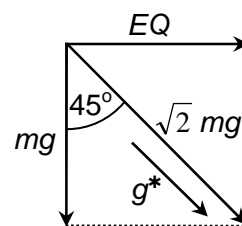
Összesen: 10 pont

3. feladat:

a) Az ilyen a térbe behelyezett m tömegű, Q töltésű testre két egymásra merőleges erő hat, így:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{EQ}{mg},$$

$$EQ = mg \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = mg.$$



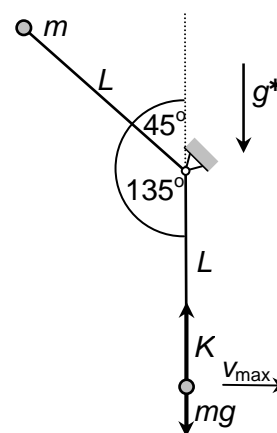
Az m tömegű test mozgását egyszerűbben úgy is vizsgálhatjuk, hogy rá egy $\sqrt{2}mg$ nagyságú, a függőleges iránnyal 45° -os szöget bezáró állandó erő hat, azaz a test egy, $g^* = \sqrt{2}g$ gyorsulású térben van. Ugyanilyen térben van a merev pálcán mozgó test is. Fordítsuk el az ábrát 45° -kal! A pálca végén lévő test sebessége akkor maximális, amikor a pálca a g^* vektor irányába mutat, azaz a pálcára merőleges erők eredője zérus. A munkatételből:

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = mg^* \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) L,$$

$$v_{\max} = \sqrt{2g^* \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) L},$$

$$\boxed{v_{\max} = \sqrt{2(1 + \sqrt{2})gL}.}$$

3 pont



b) Legyen a pálcában ébredő erő K ! A dinamika alapegyenletéből:

$$m \frac{v_{\max}^2}{L} = K - mg^*,$$

$$K = m \left(\frac{v_{\max}^2}{L} + g^* \right),$$

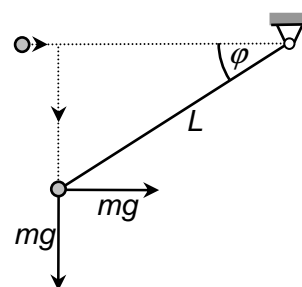
$$\boxed{K = (2 + 3\sqrt{2})mg.}$$

2 pont

c) Ebben a rendszerben a munkatételből (energia-megmaradásból) következik, hogy a test a megállás pillanatában a kiindulási helyzettel megegyező magasságba kerül, azaz a rúd összesen 270° -kal fordul el. Ez azt jelenti, hogy a pálca az eredeti rendszerben függőlegesen áll meg először. 2 pont

d) A feladatnak ezt a részét vizsgáljuk az eredeti rendszerben! Legyen az ábrán látható helyzetben a test sebessége v , a pálcában ébredő erő F ! A munkatételből:

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgL \sin \varphi + mgL(1 - \cos \varphi),$$



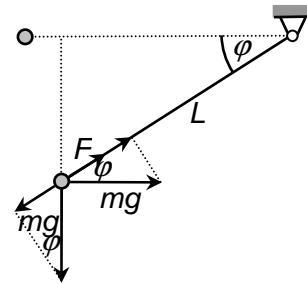
$$v^2 = 2gL(\sin \varphi + 1 - \cos \varphi).$$

A dinamika alapegyenletét sugár irányba felírva:

$$m \frac{v^2}{L} = F + mg \cos \varphi - mg \sin \varphi,$$

$$F = m \frac{v^2}{L} + mg \sin \varphi - mg \cos \varphi,$$

$$F = mg(3 \sin \varphi - 3 \cos \varphi + 2).$$



A pálca akkor lesz feszültségmentes, ha a benne ébredő erő zérus, azaz

$$3 \sin \varphi - 3 \cos \varphi + 2 = 0,$$

$$\cos \varphi - \sin \varphi = \frac{2}{3}.$$

Négyzetre emelve:

$$\cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi = \frac{4}{9},$$

$$\sin 2\varphi = \frac{5}{9},$$

$$\boxed{\varphi_1 = 16,87^\circ}$$

A feladat a) részében láthattuk, hogy a mozgásban az indulástól a megállásig szimmetria uralkodik. Ennek értelmében, ha az indulástól számított φ_1 szögelfordulásnál a pálcában ébredő erő zérus, akkor a megállás előtti φ_1 szögnél, azaz kezdethez képest

$$\boxed{\varphi_2 = 270^\circ - \varphi_1 = 253,13^\circ}$$

3 pont

szögelfordulásnál is zérus lesz. Tehát két eset létezik.

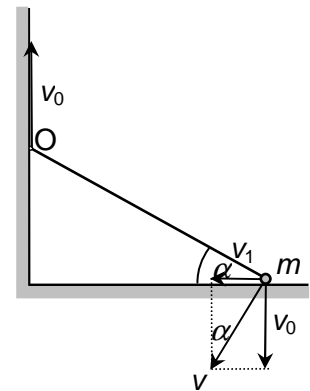
Összesen: 10 pont

4. feladat:

1. megoldás:

- a) Rögzítsük a vonatkoztatási rendszer kezdőpontját a fonál bal oldali végéhez (O)! Ebben a vonatkoztatási rendszerben a test az O pont körül olyan változó sebességű körmozgást végez, amelynek függőleges komponense végig v_0 , vízszintes sebességkomponens nagysága pedig egyenlő a talajhoz viszonyított vízszintes irányú v_1 sebességgel:

$$v_1 = v_0 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,289 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$



- b) Vizsgáljuk a test mozgását a fonál elszakadásának pillanatáig dinamikai szempontból! Mivel a test függőleges irányba nem gyorsul, ezért a függőleges irányú erőkomponensek eredője zérus:

$$(1) \quad K \sin \beta + F_{\text{ny}} - mg = 0.$$

A dinamika alapegyenletét az O középpontú körmozgásra felírva:

$$(2) \quad ma_{\text{cp}} = K + F_{\text{ny}} \sin \beta - mg \sin \beta.$$

A centripetális gyorsulás pedig a következőképpen számolható:

$$a_{\text{cp}} = \frac{v_0^2}{L \cos^2 \beta}.$$

A nyomóerőt kiküszöbölve a három egyenletből ez adódik:

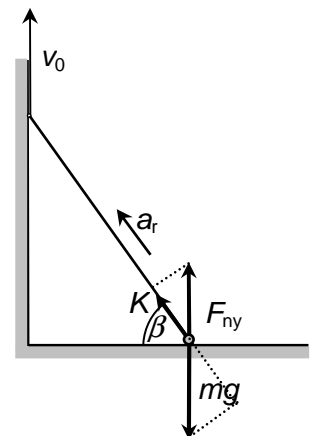
$$K(1 - \sin^2 \beta) = \frac{mv_0^2}{L \cos^2 \beta}.$$

Ebből a keresett szög a fonál elszakadásának pillanatában:

$$\cos \beta = \sqrt[4]{\frac{mv_0^2}{KL}} = \frac{1}{2},$$

$$\boxed{\beta = 60^\circ}.$$

4 pont



- c) A test felemelkedésének pillanatában a nyomóerő zérussá válik. Legyen a keresett szög γ ! Ennek figyelembe vételével az (1), (2) egyenletek így alakulnak:

$$K \sin \gamma - mg = 0,$$

$$ma_{\text{cp}} = K - mg \sin \gamma.$$

Ezekből:

$$\frac{\cos^4 \gamma}{\sin \gamma} = \frac{v_0^2}{gL},$$

$$40 \cos^4 \gamma = \sin \gamma.$$

A keresett γ szög közelítő értéke:

$$\gamma \approx 67,1^\circ.$$

3 pont

d) A fonalat legalább a következő erőre kell méretezni:

$$K_{\min}^* = \frac{mg}{\sin \gamma} \approx 10,9 \text{ N}.$$

1 pont

2. megoldás:

a) Legyen test keresett sebessége v_1 , a fonál felezőpontjának sebessége v_K ! Tháles-tétel értelmében a fonál felezőpontja körpályán mozog, továbbá sebességének vízszintes és függőleges komponensére igaz, hogy

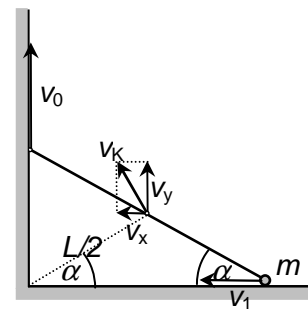
$$v_x = \frac{v_1}{2}, \quad v_y = \frac{v_0}{2}, \quad v_x = v_y \operatorname{tg} \alpha.$$

Így:

$$v_1 = 2v_x,$$

$$v_1 = 2v_y \operatorname{tg} \alpha,$$

$$v_1 = v_0 \operatorname{tg} \alpha = 0,289 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



2 pont

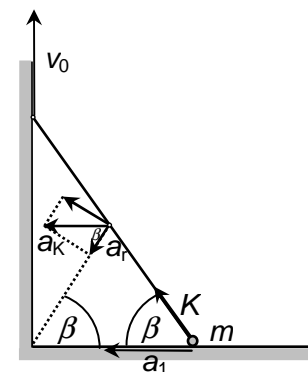
b) A fonál felezőpontja függőleges irányba nem gyorsul, tehát az érintő irányú és sugár irányú gyorsulásainak eredője vízszintes irányú. A sugár irányú gyorsulás:

$$a_r = \frac{v_K^2}{\frac{L}{2}} = \frac{2v_K^2}{L},$$

ahol

$$v_K = \frac{v_0}{2 \cos \beta}.$$

$$a_r = \frac{v_0^2}{2L \cos^2 \beta}.$$



A fonál felezőpontjának vízszintes irányú gyorsulása:

$$a_K = \frac{a_r}{\cos \beta} = \frac{v_0^2}{2L \cos^3 \beta}.$$

A feladat geometriájából következik, hogy az m tömegű test vízszintes irányú a_1 gyorsulása:

$$a_1 = 2a_K = \frac{v_0^2}{L \cos^3 \beta}.$$

A dinamika alapegyenletét az m tömegű test mozgására felírva:

$$\begin{aligned} ma_1 &= K \cos \beta, \\ m \cdot \frac{v_0^2}{L \cos^3 \beta} &= K \cos \beta. \end{aligned}$$

Ebből a keresett szög:

$$\cos \beta = \sqrt[4]{\frac{mv_0^2}{KL}} = \frac{1}{2},$$

$$\boxed{\beta = 60^\circ.}$$

4 pont

c) Legyen a keresett szög γ ! A felemelkedés pillanatában:

$$\begin{aligned} mg &= K^* \sin \gamma, \\ m \cdot \frac{v_0^2}{L \cos^3 \gamma} &= K^* \cos \gamma. \end{aligned}$$

Ezekből:

$$\frac{\cos^4 \gamma}{\sin \gamma} = \frac{v_0^2}{gL},$$

$$40 \cos^4 \gamma = \sin \gamma.$$

A keresett γ szög közelítő értéke:

$$\boxed{\gamma \approx 67,1^\circ.}$$

3 pont

d) A fonalat legalább a következő erőre kell méretezni:

$$\boxed{K_{\min}^* = \frac{mg}{\sin \gamma} \approx 10,9 \text{ N.}}$$

1 pont

Összesen: 10 pont

A 31. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Szakközépiskola 10. osztály
Pécs 2012

1. feladat:

- a) Legyen a mágnes tömege m , az állandó szögsebesség ω , a fémkorong és mágnes között fellépő mágneses vonzóerő F_m ! Mindhárom esetben a fellépő tapadási súrlódási erő maximuma biztosítja a körmozgás fenntartásához szükséges sugar irányú erőt. A dinamika alapegyenletét az első és második esetre felírva:

$$mR\omega^2 = \mu_0 K_1,$$

$$mR\omega^2 = \mu_0 (mg + F_m).$$

$$m \cdot \frac{R}{2} \omega^2 = \mu_0 K_2,$$

$$m \cdot \frac{R}{2} \omega^2 = \mu_0 (F_m - mg).$$

Ezek osztásából:

$$2 = \frac{mg + F_m}{F_m - mg},$$

$$\boxed{\frac{F_m}{mg} = 3.}$$

5 pont

- b) Forogjon most a vaskorong vízszintes tengely körül! A körpálya legalsó pontjában lép fel a tapadási súrlódási erő maximuma. A dinamika alapegyenletéből:

$$m \cdot 0,2R\omega^2 = \mu_0 K_3 - mg,$$

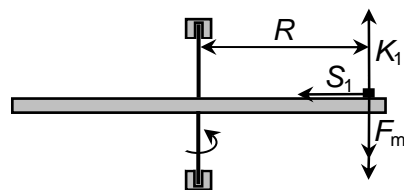
$$m \cdot 0,2R\omega^2 = \mu_0 \cdot 3mg - mg.$$

Az első eset felhasználásával:

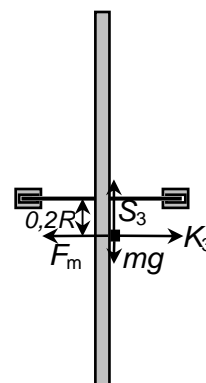
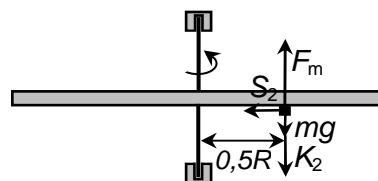
$$mR\omega^2 = \mu_0 \cdot 4mg.$$

Az utóbbi kettő osztásából:

$$0,2 = \frac{3\mu_0 - 1}{4\mu_0}.$$



mg



Ebből a tapadási súrlódási együttható keresett értéke:

$$\mu_0 = \frac{5}{11} = 0,4545.$$

5 pont

Összesen: 10 pont

2. feladat:

a) 7 óra alatt nő a levegő hőmérséklete $14\text{ }^\circ\text{C}$ -ot, majd 7 óra alatt csökken ugyancsak $14\text{ }^\circ\text{C}$ -ot. Óráként változik a hőmérséklet $2\text{ }^\circ\text{C}$ -kal.

Legyen $T_1 = 289\text{ K}$, $T_3 = 303\text{ K}$! Kezdetben izochor állapotváltozás során nő a gáz nyomása. Vizsgáljuk meg, mekkora T_2 hőmérséklet esetén lesz az elzárt gáz nyomása akkora, hogy a túlnyomásból származó erő éppen megemeli az edényt. A keresett túlnyomás:

$$\Delta p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = mg,$$
$$\Delta p = \frac{4mg}{d^2 \pi} = 2078,76\text{ Pa}.$$

Alkalmazzuk Gay-Lussac II. törvényét!

$$\frac{p_0}{T_1} = \frac{p_0 + \Delta p}{T_2},$$
$$T_2 = \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right) T_1 = 295\text{ K} = 22\text{ }^\circ\text{C}$$

7 órától 10 óráig, míg a hőmérséklet $16\text{ }^\circ\text{C}$ -ról egyenletesen $22\text{ }^\circ\text{C}$ -ra nő, a nyomás p_1 -re növekszik.

$$p_1 = p_0 + \Delta p \approx 102\,079\text{ Pa}.$$

4 pont

10 órától 14 óráig az elzárt gáz nyomása p_1 körül ingadozik, mondhatjuk, hogy nem változik. Amikor a nyomás értéke kicsit p_1 fölé megy, akkor az edény szája kicsit elemelkedik az asztalról. Ekkor gáz áramlik ki az edényből, a nyomás p_1 alá megy, az edény visszaesik az asztalra.

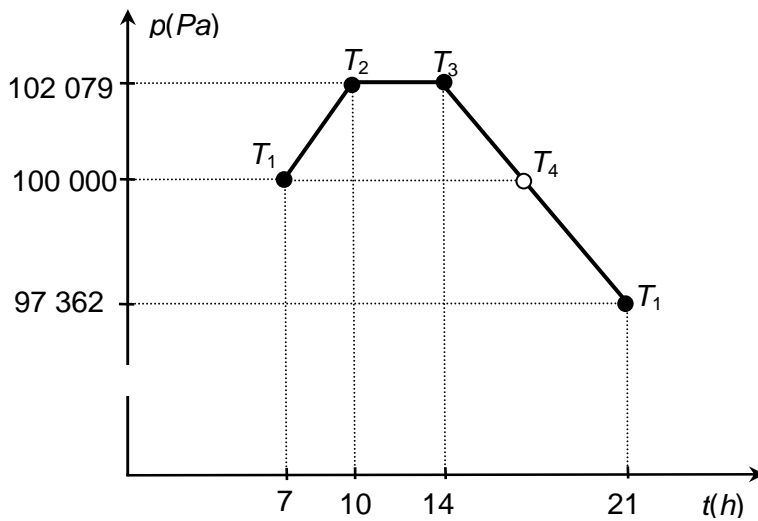
14 órától 21 óráig a gáz hőmérséklete izochor módon csökken. Ismét Gay-Lussac II. törvényét alkalmazzuk:

$$\frac{p_0 + \Delta p}{T_3} = \frac{p_2}{T_1},$$

$$p_2 = \frac{T_1}{T_3} (p_0 + \Delta p) = \frac{289\text{ K}}{303\text{ K}} \cdot 102\,078,76\text{ Pa} \approx 97\,362\text{ Pa}$$

2 pont

14 órától 21 óráig a gáz nyomása egyenletesen csökken $p_1 = p_0 + \Delta p = 102\,079\text{ Pa}$ -ról $p_2 = 97\,362\text{ Pa}$ -ra.



2 pont

b) A levegő belső energiáját számoljuk a nyomásából és térfogatából a következő összefüggés alapján:

$$E_b = \frac{f}{2} pV.$$

Mivel a térfogat állandó, ezért akkor lesz a belső energia kezdeti értékkel azonos, amikor gáz nyomása ismét p_0 lesz. Legyen a keresett hőmérséklet T_4 ! Az edényben maradt levegő két állapotára ismételt felírva Gay-Lussac II. törvényét:

$$\frac{p_0}{T_4} = \frac{p_2}{T_1},$$

$$T_4 = \frac{p_0}{p_2} T_1 = 296,8\text{ K} = 23,8\text{ }^\circ\text{C}.$$

2 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat:

- a) A testek tömege nem változik, de a kölcsönösen átvitt lendületek igen. Így a m tömegű test lassul, a M tömegű test gyorsul. Végtelen áthelyezés után v_k közös sebesség alakul ki, ami a lendület-megmaradásból számolható:

$$mu_0 + Mv_0 = (m + M)v_k,$$

$$v_k = \frac{mu_0 + Mv_0}{m + M} = 2,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3 pont

- b) A rendszer mozgási energiájának változása:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}(m + M)v_k^2 - \left(\frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{2}Mv_0^2 \right),$$

$$\Delta E_m = -\frac{1}{2} \frac{mM}{m + M} (u_0 - v_0)^2 = -18 \text{ J}.$$

3 pont

- c) Legyen a m tömegű test sebessége az n -edik áthelyezés után u_n , a M tömegűé pedig v_n ! Az első áthelyezés után:

$$mu_1 = (m - \Delta m)u_0 + \Delta m v_0,$$

$$Mv_1 = (M - \Delta m)v_0 + \Delta m u_0.$$

Ezekből:

$$u_1 = u_0 + \frac{\Delta m}{m}(v_0 - u_0) = 4,7 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_1 = v_0 + \frac{\Delta m}{M}(u_0 - v_0) = 2,075 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A második áthelyezés után hasonló formulát kapunk, csupán az u_0 helyére u_1 , a v_0 helyére v_1 kerül.

$$u_2 = u_1 + \frac{\Delta m}{m}(v_1 - u_1) = 4,4375 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_2 = v_1 + \frac{\Delta m}{M}(u_1 - v_1) = 2,14 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A harmadik áthelyezés után:

$$u_3 = u_2 + \frac{\Delta m}{m}(v_2 - u_2) = 4,2 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

2 pont

$$v_3 = v_2 + \frac{\Delta m}{M}(u_2 - v_2) = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2 pont

Összesen: 10 pont

4. feladat:

a) A feltöltött akkumulátor belső ellenállása:

$$R_b = \frac{U_0}{I_r} = \frac{12,6 \text{ V}}{500 \text{ A}} = 2,52 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega.$$

2 pont

b) A lemerült akkumulátor belső ellenállása:

$$R_b^{\text{le}} = \frac{U_t - U_0}{I_t} = \frac{1,4 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 0,28 \text{ } \Omega.$$

2 pont

c) A töltés hatásfokát úgy kapjuk, hogy hasznos teljesítményt osztjuk a töltésre fordított teljesítménnyel:

$$\eta = \frac{U_t I_t - I_t^2 R_b^{\text{le}}}{U_t I_t},$$

$$\eta = \frac{70 \text{ W} - 7 \text{ W}}{70 \text{ W}} = 0,9 = 90\%.$$

2 pont

d) Legyen jelzőlámpa ellenállása R ! Az ellenkapcsolásban lévő akkumulátorok áramkörére Ohm törvényét felírva:

$$U_0 - U_0^* = I_t^* (R_b + R_b^* + R),$$

$$R = \frac{U_0 - U_0^*}{I_t^*} - R_b - R_b^*,$$

$$R \approx 5 \text{ } \Omega.$$

A jelzőlámpa üzemi feszültsége és teljesítménye:

$$U_{\text{izzó}} = I_t^* R = 2,5 \text{ V},$$

2 pont

$$P_{\text{izzó}} = (I_t^*)^2 R = 1,25 \text{ W}.$$

2 pont

Összesen: 10 pont