**3427.** Nem lehetséges. $AB = c$, $BE = y$, $ED = AE = x$, $BE = y$, $AD = CD = 2 \cdot x$, $CBE\sphericalangle =$ $= ABE\sphericalangle = \varphi$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az $ABC$ háromszögre:
$\frac{AB}{BC} = \frac{x}{3 \cdot x}$, ebből $BC = 3 \cdot c$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt a $BCE$ háromszögre: $\frac{y}{3 \cdot c} =$ $= \frac{x}{2 \cdot x}$, ebből $y = \frac{3}{2} \cdot c$, $t_{ABC} = t_{ABE} + t_{BCD}$, azaz $\frac{c \cdot 3 \cdot c \cdot \sin 2\varphi}{2} =$
$= \frac{c \cdot \frac{3}{2} \cdot c \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot c \cdot 3 \cdot c \cdot \sin\varphi}{2}$, ebből előbb-utóbb levezethetjük, hogy $\cos\varphi = 1$, tehát $\varphi = 0$. Ez nem lehetséges.

**3428.** Legyen $AB = BC = CA = a$. Tegyük fel például, hogy $PB$ a leghosszabb a $PA$, $PB$, $PC$ közül. Alkalmazzuk Bretschneider tételét az $ABCP$ négyszögre! $PB^2 \cdot AC^2 =$ $= AB^2 \cdot PC^2 + BC^2 \cdot PA^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot PC \cdot PA \cdot \cos(\varphi + 60°)$, ahol $ABC\sphericalangle = 60°$ és $APC\sphericalangle = \varphi$. Az egyenletből kaphatjuk, hogy $PB^2 = PC^2 + PA^2 - 2 \cdot PC \cdot PA \cdot \cos(\varphi + 60°)$. Alkalmazzunk erre egy felső becslést! $PB^2 = PC^2 + PA^2 - 2 \cdot PC \cdot PA \cdot \cos(\varphi + 60°) \le PC^2 + PA^2 + 2 \cdot PA \cdot PC =$ $= (PC + PA)^2$. Ebből $PB < PA + PC$. Egyenlőség nem lehet, mert akkor $\cos(\varphi + 60°) = -1$ lenne, de ekkor $\varphi = 120°$ lenne. Ez pedig akkor és csak akkor lenne, ha $P$ rajta lenne a körülírt körön. Keressünk további megoldásokat a feladatra, mert vannak!

**3429.** $EDB\sphericalangle = 30°$. $EDB\sphericalangle = x$, $BED\sphericalangle = 160° - x$. Alkalmazzuk a szinusztételt a $BED$ háromszögre, majd a $BCD$ háromszögre! (1) $\frac{BD}{BE} = \frac{\sin(160° - x)}{\sin x}$; (2) $\frac{BD}{BC} = \frac{\sin 80°}{\sin 40°}$ és tudjuk, hogy $\sin 80° = 2 \cdot \sin 40° \cdot \cos 40°$ és $BE = BC$. Ezekből kaphatjuk, hogy
$\frac{\sin(160° - x)}{\sin x} = 2 \cdot \cos 40°$. Ebből kaphatjuk, hogy $\sin(20° + x) = 2 \cdot \cos 40° \cdot \sin x$.
$\sin 20° \cdot \cos x + \cos 20° \cdot \sin x = 2 \cdot (\cos 60° \cdot \cos 20° - \sin 60° \cdot \sin 20°) \cdot \sin x$. Ezt addig alakítsuk, amíg $\cos x = \sqrt{3} \cdot \sin x$, azaz $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nem lesz.

**3430.** $x = 60°$ az átlók hajlásszöge. Legyen $x$ az átlók hajlásszöge és $E$ az átlók metszéspontja. $ABE\sphericalangle = x - 15°$; $BCE\sphericalangle = 90° - x$; $CDE\sphericalangle = x - 30°$; $DAE\sphericalangle = 105° - x$. Alkalmazzuk a szinusztételt az $AEB$, $BEC$, $CED$, illetve a $DEA$ háromszögre! $\frac{AE}{BE} = \frac{\sin(x - 15°)}{\sin 15°}$;
$\frac{BE}{CE} = \frac{\sin(90° - x)}{\sin 90°}$; $\frac{CE}{DE} = \frac{\sin(x - 30°)}{\sin 30°}$; $\frac{DE}{AE} = \frac{\sin(105° - x)}{\sin 75°}$. Szorozzuk össze az egyenletek megfelelő oldalait! Kapjuk, hogy $1 = \frac{\sin(x - 15°)}{\sin 15°} \cdot \frac{\sin(90° - x)}{\sin 90°} \cdot \frac{\sin(x - 30°)}{\sin 30°}$.

$$\sin(x - 15°) \cdot \sin(90° - x) \cdot \sin(x - 30°) \cdot \sin(105° - x) = \frac{1}{2} \cdot \sin 15° \cdot \sin 75°,$$

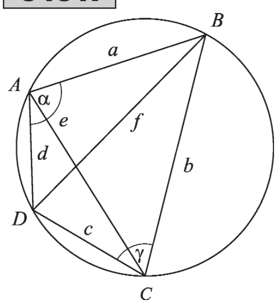
$$\left(2 \cdot \sin(x - 15°) \cdot \sin(105° - x)\right) \cdot \left(2 \cdot \sin(x - 30°) \cdot \sin(90° - x)\right) = 2 \cdot \sin 15° \cdot \sin 75°,$$

$$\left(\cos(2 \cdot x - 120°) - \cos 90°\right) \cdot \left(\cos(2 \cdot x - 120°) - \cos 60°\right) = \frac{1}{2},$$

$\cos^2(2 \cdot x - 120°) - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x - 120°) - \frac{1}{2} = 0$. Oldjuk meg a kapott egyenletet!

IV

**3431.**




**3431.** Alkalmazzuk a koszinusztételt kétszer az $f$ átlóra felírva! $f^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha$; $f^2 = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos y$, ebből $a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos y$, $a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos(180° - \alpha)$, $a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha = c^2 + d^2 + 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos\alpha$, tehát $\cos\alpha = \dfrac{a^2 + d^2 - c^2 - d^2}{2 \cdot (a \cdot d + c \cdot d)}$.

**3432.** *a)* Mint tudjuk, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$, mert $\dfrac{\alpha}{2} < 90°$, másrészt $\cos\alpha = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2 \cdot (a \cdot d + b \cdot c)}$. Így $1 - \cos\alpha = \ldots = \dfrac{(b+c+a-d)(b+c+d-a)}{2 \cdot (a \cdot d + b \cdot c)}$. Ezekből kaphatjuk, hogy $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{(b+c+d-a)(a+b+c-d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$. *b)* Használjuk fel, hogy $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$, ha $\dfrac{\alpha}{2} < 90°$. Az *a)* feladathoz hasonlóan kaphatjuk, hogy $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{(a+d+b-c)(a+d+c-b)}{a \cdot d + b \cdot c}}$. *c)* Vegyük figyelembe, hogy $a + b + c + d = 2 \cdot s$; $b + c + d - a = 2 \cdot (s - a)$; $a + c + d - b = 2 \cdot (s - b)$; $a + b + d - c = 2 \cdot (s - c)$; $a + b + c - d = 2 \cdot (s - d)$. Ha ezeket alkalmazzuk az *a)* és a *b)* megfelelő tételeire, akkor kapjuk, hogy $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$; $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$. Osszuk el egymással a kapott egyenletek megfelelő oldalait! Kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$.

**3433.** Legyen $AB = a$, $BC = b$; $CD = c$ és $DA = d$, $BAD\sphericalangle = \alpha$, $BCD\sphericalangle = \gamma$ az $ABCD$ húrnégyszögben. $t_{ABD} = \dfrac{a \cdot d \cdot \sin\alpha}{2}$; $t_{BCD} = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\gamma}{2}$. Így $t = t_{ABD} + t_{BCD} = \dfrac{1}{2} \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \sin\alpha$. Használjuk fel, hogy $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$! Korábban láttuk, hogy $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$ és $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{a \cdot d + b \cdot c}}$, ezeket felhasználva kapjuk, hogy $t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

**3434.** Legyen $AB = a, BC = b$; $CD = c$ és $DA = d$, $AC = e, BD = f$, $BAD\sphericalangle = \alpha$, $BCD\sphericalangle = \gamma$ az $ABCD$ húrnégyszögben. (1) $f^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha$, (2) $f^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\gamma$. Vegyük figyelembe, hogy $\cos\alpha = -\cos\gamma$. Ezután szorozzuk az (1) egyenletet $b \cdot c$-vel, majd a (2) egyenletet szorozzuk $a \cdot d$-vel, majd adjuk össze a kapott két új egyenletet! Némely egyenletrendezés után innen kaphatjuk, hogy: $f = \sqrt{\dfrac{(a \cdot c + b \cdot d)(a \cdot b + c \cdot d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$. Hasonlóan kaphatjuk a másik átló hosszát.

**3435.** Legyen $AB = a, BC = b;\quad CD = c$ és $DA = d,\ AC = e, BD = f,\ BAD\sphericalangle = \alpha,\ BCD\sphericalangle = \gamma$ az $ABCD$ húrnégyszögben. Ekkor $f = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$. Miért? Az előző feladatban kaptuk, hogy $f = \sqrt{\dfrac{(a\cdot c + b\cdot d)(a\cdot b + c\cdot d)}{a\cdot d + b\cdot c}}$. Másrészt $\sin\alpha = 2\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Használjuk még fel a korábban levezetett $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-d)}{a\cdot d + b\cdot c}}$ és $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{a\cdot d + b\cdot c}}$ képleteket. Ezenkívül tudjuk, hogy $t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Ezeket felhasználva kaphatjuk, hogy $t = \dfrac{\sqrt{(a\cdot b + c\cdot d)(a\cdot c + b\cdot d)(a\cdot d + b\cdot c)}}{4\cdot t}$.

**3436.** Legyen $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$, ekkor szorozzuk meg az egyenlőséget ennek a kétszeresével. $2\cdot\sin\dfrac{x}{2}\cdot S_n = 2\cdot\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin x + 2\cdot\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin 2x + \ldots + 2\cdot\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin nx$. Használjuk fel, hogy $2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \cos(\beta-\alpha) - \cos(\alpha+\beta)$. Így $2\cdot\sin\dfrac{x}{2}\cdot S_n =$

$$= \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \ldots + \left(\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot x\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right)\right) =$$

$= \cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\cdot x\right)$, ebből $S_n = \dfrac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\cdot x\right)}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$. Már ez is lehet végeredmény, de tovább is fejleszthetjük. Majd alkalmazzuk a koszinuszok különbségére ismert következő képletet: $\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Kapjuk, hogy

$S_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\dfrac{x}{2}}$. Másrészt gondoljuk meg, hogy ha $\sin\dfrac{x}{2} = 0$, akkor $S_n = 0$.

**3437.** Igazoljuk először a (*) összefüggést: (*) $4\cdot\cos(kx)\cdot\sin^2\dfrac{x}{2} =$ $= -\cos((k-1)\cdot x) + 2\cdot\cos(kx) - \cos((k+1)\cdot x)$, mégpedig úgy, hogy az összefüggés jobb oldalából indulunk ki és kétszer alkalmazzuk rá a koszinuszok különbségére vonatkozó azonosságot. Ezután alkalmazzuk a (*) azonosságot $k = 1$-től $k = n$-ig, majd ezeket adjuk össze. $4\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot(\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx) = -1 + \cos x + \cos nx - \cos((n+1)\cdot x)$. Ezt alakítsuk tovább! $= -2\cdot\sin^2\dfrac{x}{2} + \cos nx - \cos((n+1)\cdot x) =$

$= -2\cdot\sin^2\dfrac{x}{2} + \cos nx - \cos(nx + x) = -2\cdot\sin^2\dfrac{x}{2} + \cos nx - \cos nx\cdot\cos x + \sin nx\cdot\sin x =$

$= -2\cdot\sin^2\dfrac{x}{2} + \cos nx\cdot 2\cdot\sin^2\dfrac{x}{2} + \sin nx\cdot 2\cdot\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}$. (Legyen először $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$.)

IV

Ebből kaphatjuk, hogy $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \cos nx + \frac{\sin nx \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos nx + \sin nx \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \cdot x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$. Ha van kedvünk, akkor mutassuk meg, hogy más alakú végeredmény is lehet, például:

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin nx \cdot \cos((n+1) \cdot x)}{\sin \frac{x}{2}}$. Legyen most $\sin \frac{x}{2} = 0$, ekkor gondoljuk meg, hogy a vizsgált összeg értéke 0.

## Néhány „gyakorlatibb” trigonometriai feladat

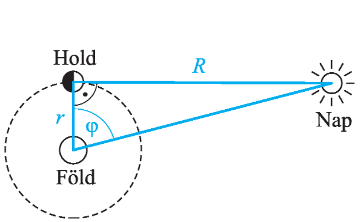
**3438.** *a)* London az 51°33′ északi szélességen (és 0° földrajzi hosszúságon) fekszik. *b)* London és ellenlábasának távolsága éppen a Föld átmérője: 12 756 km. *c)* $r \approx 4994{,}94$ km London távolsága a Föld forgástengelyétől. $\frac{r}{R} = \sin 51°33'$, ahol $R = 6378$ km a Föld sugara.

*d)* $v \approx 416{,}245\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. London sebessége a Föld tengelye körüli forgásban. $v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}$, ahol $T = 24$ h.

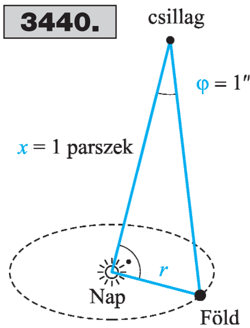
**3439.** *a)* $\frac{R}{r} \approx 19$-szer távolabb van a Nap a Földtől, mint a Hold a Földtől, Arisztarkhosz szerint. $\frac{r}{R} = \cos\varphi$, ahol $\varphi = 87°$. *b)* $\frac{R}{r} \approx 390$-szer távolabb van a Nap a Földtől, mint a Hold a Földtől a modernebb mérés szerint. Itt $\varphi = 89°51'10''$.

**3440.** *a)* $x \approx 3{,}094 \cdot 10^{13}$ km 1 parszek. $\frac{r}{x} = \operatorname{tg}\varphi$, ahol $r$ a Nap és a Föld távolsága, $\varphi = 1''$. *b)* $\approx 9{,}467 \cdot 10^{12}$ km 1 fényév. *c)* $\approx 3{,}27$ fényév 1 parszek. *d)* $\approx 2{,}7$ parszek $\approx 8{,}83$ fényév.

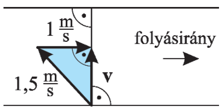
**3439.**



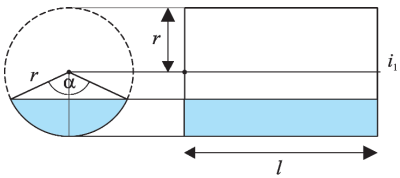

**3440.**



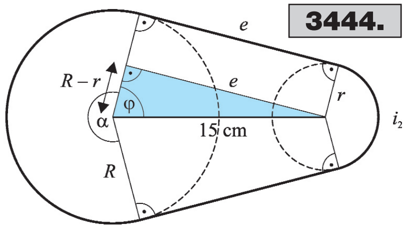
**3441.**




**3443.**




**3444.**






**3441.** *a)* $\approx 1{,}12\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ a csónak eredő sebessége. *b)* $\alpha \approx 41{,}81°$ irányba evezzünk, enyhén szembe a folyó folyásirányával. *c)* $\approx 53{,}6$ s az átkelési időnk.

**3442.** *a)* $\varphi_1 = 180° + k \cdot 360°$, $k \in Z$ szögeknél lesz a keresztfej a legtávolabb a forgáscentrumtól, és 1,75 m a legtávolabbi távolság. *b)* $\varphi_2 = 0° + k \cdot 360°$ szögeknél van a keresztfej a legközelebb a forgáscentrumtól és 1,25 m a legközelebbi távolság.
*c)* $x = r \cdot \cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2\varphi} = 0{,}25 \cdot \cos\varphi + \sqrt{2{,}25 - 0{,}0625 \cdot \sin^2\varphi}$ (méter) a keresztfej távolsága a forgáscentrumtól $\varphi$ szög függvényében.

**3443.** *a)* $\approx 4{,}305\ \text{m}^3 = 4305$ liter az olajtartály térfogata. *b)* $\approx 1041$ liter olaj van a tartályban, $\approx 159$ liter a hiány. $\alpha \approx 130{,}56°$, $t_{\text{szelet}} = t_{\text{cikk}} - t_{\text{háromszög}} = \dfrac{\alpha \cdot r^2 \cdot \pi}{360} - \dfrac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} \approx 0{,}229745\ \text{m}^2$.
$V_{\text{olaj}} = t_{\text{szelet}} \cdot l \approx 1{,}040\,746\ \text{m}^3 \approx 1041$ liter.

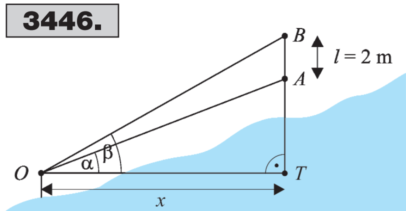
**3444.** *a)* $e \approx 14{,}82$ cm a két tárcsa közös érintőszakaszainak a hossza. *b)* $i_1 \approx 12{,}07$ cm a nagyobbik tárcsán a tapadási felület hossza. *c)* $i_2 \approx 3{,}4$ cm a kisebbik tárcsán a tapadási felület hossza. *d)* $l \approx 45{,}11$ cm a meghajtószíj hossza.

**3445.** *a)* $\alpha \approx 106{,}26°$ a keresett szög nagysága, $r = 5$ m. *b)* $A \approx 7{,}48\ \text{m}^2$ a dongaboltozat keresztmetszete. $A = T_{\text{cikk}} - t_{\text{cikk}} = \dfrac{\alpha \cdot R^2 \cdot \pi}{360} - \dfrac{\alpha \cdot r^2 \cdot \pi}{360}$, ahol $R = b + r$. *c)* $V \approx 53{,}86\ \text{m}^3$ a dongaboltozat térfogata. *d)* $m \approx 118{,}5$ tonna a boltozat tömege. Híres dongaboltozatos templomok például a Santa Maria de Naranco templom Ovideo mellett, a St. Sernin templom Toulouse-ban és a La Madeleine templom (Vézelay). Egy korábbi feladatunkban említettük a lébényi Árpád-kori Szent Jakab templomot, ennek szintén dongaboltozata van, de ez nem az eredeti, mert a Bécs ellen vonuló törökök 1529-ben felgyújtották a templomot és beomlott az eredeti boltozat, 1683-ban másodszor is felgyújtották a törökök egy újabb Bécs elleni támadásnál.

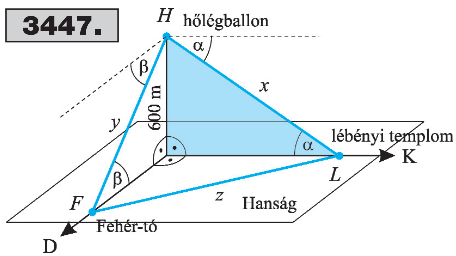
**3446.** $\approx 124$ m a rúd és a teodolit vízszintes távolsága. $\dfrac{AT}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{BT}{x} = \operatorname{tg}\beta$, $l = BT - AT$.

**3447.** *a)* $x \approx 2{,}86$ km-re vagyunk a lébényi templomtól a hőlégballonnal. *b)* $y \approx 5{,}04$ km a hőlégballon és a Fehér-tó távolsága. *c)* $z \approx 5{,}73$ km-re van egymástól a tó és a templom.

**3446.**




**3447.**



**3448.** *a)* $t_1 = \frac{1}{600} + \frac{k}{50}$ (másodperc), ahol $k \in \mathbf{Z}$, $t_2 = \frac{1}{120} + \frac{l}{50}$ (másodperc), ahol $l \in \mathbf{Z}$, időpontokban lesz a feszültség értéke a maximális feszültség felével egyenlő. $\frac{U_{max}}{2} = U_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$. *b)* $t'_1 = \frac{1}{600}$ s, $t'_2 = \frac{1}{120}$ s, $t'_3 = \frac{7}{600}$ s, $t'_4 = \frac{11}{600}$ időpontokban lesz a feszültség abszolútértéke egyenlő a maximális feszültség felével, az első $\frac{1}{50}$ s-ban. *c)* $\approx 66{,}67\%$-ban lesz nagyobb a feszültség abszolútértéke a maximális feszültség felénél. $\Delta t = t'_2 - t'_1$ és $\frac{2 \cdot \Delta t}{T} \cdot 100 \approx 66{,}67\%$, ahol $T = \frac{1}{50}$ s. Érdemes lerajzolnunk a szinuszfüggvény grafikonját.

**3449.** *a)* $t_1 = \frac{1}{400} + \frac{k}{50}$ (másodperc), ahol $k \in \mathbf{Z}$, $t_2 = \frac{3}{400} + \frac{l}{50}$ (másodperc), ahol $l \in \mathbf{Z}$, időpontokban lesz a feszültség értéke az effektív feszültséggel egyenlő.
$U_{eff} = U_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$, $U_{eff} = U_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$. *b)* $t'_1 = \frac{1}{400}$ s, $t'_2 = \frac{3}{400}$ s, $t'_3 = \frac{1}{80}$ s, $t'_4 = \frac{7}{400}$ s időpontokban lesz a feszültség abszolútértéke az effektív feszültséggel egyenlő az első $\frac{1}{50}$ s alatt.

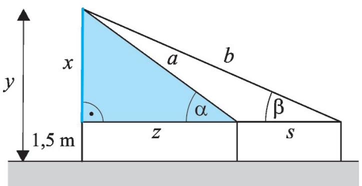
**3450.** $x \approx 55{,}6$ m. Alkalmazzuk a koszinusztételt!

**3451.** *a)* 1020 m az Aranyszarvas és a megfigyelő távolsága. *b)* 680 m a spanyol gálya és a megfigyelő távolsága. *c)* $\approx 350$ méter az Aranyszarvas és a gálya távolsága. Alkalmazzuk a koszinusztételt! *d)* $\approx 11°9'$-es szögben látja Sir Francis Drake a spanyol hajó és a megfigyelő távolságát. Alkalmazzuk a szinusztételt!

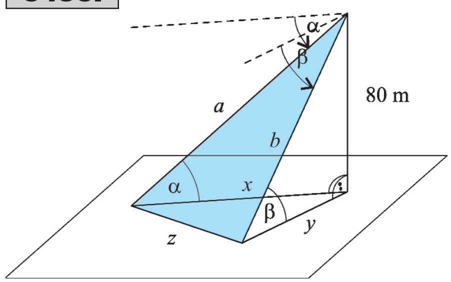
**3452.** $y \approx 61{,}4$ m magas a torony. Először számítsuk ki a $\beta$ szöget a koszinusztétel segítségével. $a^2 = b^2 + s^2 - 2 \cdot b \cdot s \cdot \cos\beta$. Kapjuk, hogy $\beta \approx 23{,}78°$. Majd $\frac{x}{b} = \sin\beta$-ból kapjuk $x$-et. $y = x + 1{,}5$ m.

**3453.** *a)* $x \approx 2067$ m távolságra van az első mérésnél a hajó a torony aljától. $\frac{80}{x} = \mathrm{tg}\,\alpha$.
*b)* $y \approx 1340$ m távolságra van a második mérésnél a hajó a torony aljától. $\frac{80}{y} = \mathrm{tg}\,\beta$.

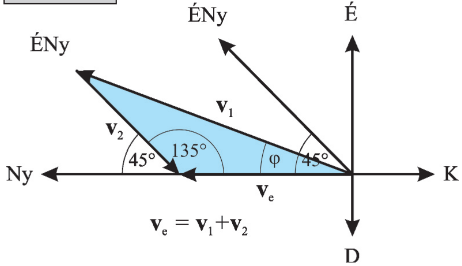
**3452.**



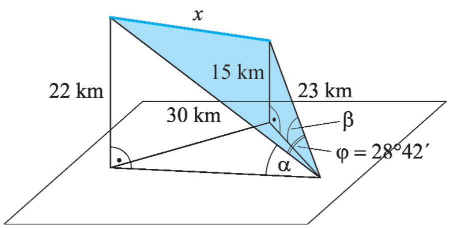

**3453.**



**3454.**




**3455.**




IV

*c)* $z \approx 813$ m utat tett meg a két mérés között a hajó. $a \approx 2068{,}6$ m és $b \approx 1342{,}4$ m, ezeket egy-egy megfelelő Pitagorasz-tétellel kaphatjuk. Majd alkalmazzuk a koszinusztételt a $z$ távolságra felírva, az $a$, $b$ és $z$ oldalú háromszögben! *d)* $\approx 8{,}29\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \approx 30\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ a hajó sebessége.

**3454.** *a)* 42 perc 40 másodperc idő alatt érne a repülőgép az egyik repülőtértől a másikig. *b)* $\approx 110\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \approx 396\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ a repülőgép eredő sebessége a feladatbeli szél esetén. Írjuk fel a koszinusztételt a megfelelő sebességek alkotta háromszögre! $v_1^2 = v_2^2 + v_e^2 - 2 \cdot v_2 \cdot v_e \cdot \cos 135°$, ahol $v_1 = 125\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ a repülőgép sebességének nagysága szélcsendben, $v_2 = 20\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ a szél sebességének a nagysága, $v_e$ a repülőgép sebességének nagysága a megadott szél esetén. *c)* $\approx 48{,}5$ perc a repülési idő a megadott szél esetén. *d)* $\varphi \approx 6{,}5°$ szöggel kell oldalra kormányozni a repülőgépet kissé észak-nyugat felé. Alkalmazzuk a szinusztételt! $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\sin 135°}{\sin\varphi}$.

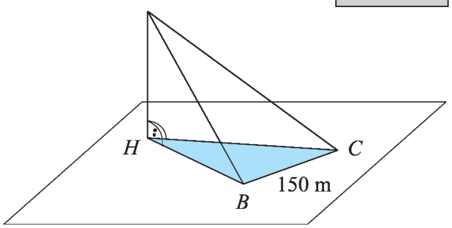
**3455.** *a)* $\alpha \approx 47°10'$ szöget zár be az észlelési irány a Föld felszínével. *b)* $\beta \approx 40°42'$ szöget zár be a szétesési irány a Föld felszínével. *c)* $x \approx 14{,}78$ km utat tett meg a két mérés között a tűzgömb. Alkalmazzuk a koszinusztételt! $x^2 = 30^2 + 25^2 - 2 \cdot 30 \cdot 23 \cdot \cos 28°42'$. *d)* $v \approx 422\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ a tűzgömb átlagos sebessége.

**3456.** *a)* $BAC\sphericalangle = 57°3'$. *b)* $AB \approx 145{,}9$ m. Alkalmazzuk a szinusztételt! $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin ACB\sphericalangle}{\sin BAC\sphericalangle}$.
*c)* $AH \approx 82{,}2$ m az antenna magassága. $\dfrac{AH}{AB} = \sin ABH\sphericalangle$.

**3457.** *a)* $\alpha = 37°29'$ és $\delta_1 = 30°30'$. *b)* $AB \approx 647{,}7$ m és $BD \approx 726{,}7$ m. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ és $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}$. *c)* $AD \approx 96{,}9$ m.
$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos(\beta - \beta_1)$.

**3458.** *a)* $\alpha = 27°14'$ és $\delta_1 = 26°37'$. *b)* $AB \approx 722{,}6$ m és $BD \approx 666{,}5$ m. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}$.

**3456.**



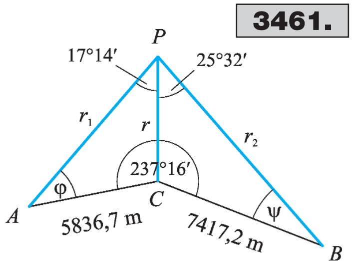
IV

*c)* $AD \approx 767{,}4$ m.
$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos(\beta + \beta_1)$.

**3459.** *a)* $BC \approx 1050{,}6$ m, $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_3}$. *b)* $CD \approx 1345{,}3$ m, $\frac{CD}{BC} = \frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_5}$. *c)* $CE \approx 1061{,}1$ m, $\frac{CE}{CD} = \frac{\sin\alpha_7}{\sin\alpha_8}$. *d)* $EF \approx 689{,}3$ m, $\frac{EF}{CE} = \frac{\sin\alpha_{10}}{\sin\alpha_{12}}$. *e)* $FG \approx 602{,}6$ m, $\frac{FG}{EF} = \frac{\sin\alpha_{14}}{\sin\alpha_{15}}$.

**3460.** *a)* $\varphi + \psi = 99°39'$. *b)* $\varphi \approx 25°48'$. $\frac{r}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ és $\frac{r}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$, ezekből $\frac{a \cdot \sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{b \cdot \sin\psi}{\sin\beta}$. S innen $2{,}2066 \cdot \sin\varphi \approx \sin(99°39' - \varphi)$. Majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt az egyenlet jobb oldalára. Ezután osszuk $\cos\varphi$-vel az egyenlet mindkét oldalát. Kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}4835$. *c)* $r \approx 382{,}17$ m. *d)* $r_1 \approx 835{,}57$ m, $\frac{r_1}{a} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}$. *e)* $r_2 \approx 140{,}01$ m, $\frac{r_2}{b} = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta}$.

**3461.**




**3461.** Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
*a)* $PAC\sphericalangle + PBC\sphericalangle = \varphi + \psi = 79°58'$.
*b)* $PAC\sphericalangle = \varphi = 36°44'$. *c)* $PC = r \approx 11783$ m. *d)* $PA = r_1 \approx 15931{,}7$ m. *e)* $PB = r_2 \approx 16039{,}7$ m.