**3278.** $x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangensre való összegzési képletet, majd kapunk egy egyenletet $\mathrm{tg}\, x$-re. Szorozzunk be a nevezővel és $\mathrm{tg}\, x$- re egy másodfokú egyenletet kapunk, amelyet oldjunk meg.

**3279.** $x_1 \approx 1{,}1503 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}1503 + l \cdot \pi$. A $\mathrm{tg}\, 2x$-et fejezzük ki $\mathrm{tg}\, x$-szel, majd szorozzunk a nevezővel. Rendezés után alakítsuk szorzattá az egyenletet!

**3280.** *a)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt a bal oldalon, majd helyettesítsük be a megfelelő nevezetes hegyesszögek szögfüggvényeinek értékeit, ezután osszunk $\cos x$-szel, amikor ez nem nulla. Mutassuk meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla. *b)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Hasonló módon járjunk el, mint az előző feladatnál! *c)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. Hasonló módon járjunk el, mint az előző két feladatnál! *d)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan kezdjük el, mint az előzőeket, majd rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá! *e)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatnál. *f)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

**3281.** *a)* $x \approx 0{,}2318 + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Vegyük figyelembe, hogy $\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$, másrészt $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$, a kapott egyenletet osszuk el $\cos^2 2x$-szel, amikor ez nem nulla! Ekkor $\mathrm{tg}\, 2x$-re kapunk egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg! Mutassuk meg, hogy $\cos 2x$ nem lehet nulla! *b)* $x_1 \approx -0{,}0477 + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_2 \approx 0{,}6760 + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$. Hasonló módon kezdhetjük megoldani, mint az előző egyenletet. Kapunk $\sin 5x$-re egy másodfokú egyenletet, ha $\cos^2 5x = 1 - \sin^2 5x$-et figyelembe vesszük.

**3282.** *a)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel $\cos 2x$ képletét és a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot! Ezután alakítsunk szorzattá!
$2 \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x) + (\sin x - \cos x) = 0$. Folytassuk! *b)* $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$.
Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd alakítsunk szorzattá!
$2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$. Folytassuk!

**3283.** *a)* $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *b)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot. *c)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot, csak itt 2-vel osszuk el az egyenletet! *d)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot. *e)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$;

IV

IV

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. *f)* $x_1 = \frac{\pi}{24} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{24} + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. *g)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 \approx 0{,}5536 + l \cdot \frac{\pi}{2}$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatokat, csak itt $\sqrt{5}$-tel osszuk el az egyenletet!

**3284.** *a)* $x_1 \approx 2{,}6516 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatokat, csak itt $\sqrt{34}$-gyel osszuk el az egyenletet! *b)* $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}9656 + l \cdot 2 \cdot \pi$. $\sqrt{13}$-mal osszuk el az egyenletet! *c)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, majd szorozzunk a nevezőkkel, ezután pedig osszuk az egyenletet 2-vel!

**3285.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{4}$. Az egyenlet bal oldala egyenlő $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$-mal.

**3286.** $x_1 = -\frac{\pi}{32} + k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{72} + l \cdot \frac{\pi}{9}$. Osszuk az egyenletet $\sqrt{2}$-vel! Ezután vegyük észre, hogy a kapott egyenlet bal oldala egyenlő $\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$-gyel! Ez pedig tovább egyenlő $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$-vel.

**3287.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Szorozzunk a nevezőkkel, majd osszuk az egyenletet $\sqrt{2}$-vel! Vegyük észre, hogy a kapott egyenlet bal oldala éppen $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$!

**3288.** $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{10}$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{24} + l \cdot \frac{\pi}{4}$. Adjunk az egyenlet mindkét oldalához $2 \cdot \cos 14x$-et! Majd vegyük észre, hogy a kapott egyenlet bal oldala éppen $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$-nak a négyzete! Erről pedig gondoljuk meg, hogy éppen egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\frac{1 - \cos\left(2 \cdot \left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\right)}{2}.$$

## Összetettebb, illetve nehezebb trigonometrikus egyenletek

**3289.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_3 = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_4 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, másrészt vegyük figyelembe, hogy $\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$! Harmadrészt a koszinuszok összegére vonatkozó azonosság segítségével alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát: $\cos x + \cos 3x = 2 \cdot \cos x \cdot \cos 2x$. Ezután rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

**3290.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0{,}6847 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx -0{,}6847 + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx 2{,}4569 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 \approx -2{,}4569 + n \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$. Ezt helyettesítsük be, majd rendezzük nullára az egyenletet és ezután alakítsuk szorzattá!

**3291.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\sin 3x = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$ és $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$! Ezeket helyettesítsük be, majd rendezzük nullára az egyenletet és ezután alakítsuk szorzattá!
$\sin^2 x \cdot (2 \cdot \sin x - 1) - (2 \cdot \sin x - 1) = 0$. Folytassuk!

**3292.** $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a kotangens és a tangens definícióját, majd szorozzunk a nevezőkkel! Alkalmazzuk visszafelé a kétszeres szögek megfelelő szögfüggvényeire vonatkozó képleteket! Ezután alakítsuk át az egyenletet úgy, hogy csak $\cos 2x$ legyen benne a szögfüggvény, erre kapunk egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg.

**3293.** $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Osszuk az egyenletet $\sqrt{2}$-vel, majd a kapott egyenletről vegyük észre, hogy a bal oldala éppen $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$! Vegyük figyelembe, hogy a kapott egyenlet bal oldala nem nagyobb 1-nél, míg a jobb oldala nem kisebb 1-nél. Ebből következik, hogy az egyenlet csak akkor állhat fenn, ha mindegyik oldala külön-külön 1-gyel egyenlő.

**3294.** $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Vegyük figyelembe, hogy $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ és alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét! Ekkor észrevehetjük, hogy az egyenlet bal oldala éppen $\sin x + \cos x$ négyzete. Rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

**3295.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$; $x_4 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + n \cdot \pi$. A bal oldalon hozzunk közös nevezőre, majd vegyük észre, hogy a kapott számláló értéke 1! Míg a kapott nevező éppen $\sin 2x$ fele.

**3296.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alakítsuk szorzattá a bal oldalt még jobban! A jobb oldalon végezzük el a négyzetre emelést és használjuk fel, hogy $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$! Majd a kapott egyenletet rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá!

**3297.** $x_1 = \frac{\pi}{10} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{9 \cdot \pi}{10} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{10} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{11 \cdot \pi}{10} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Különböztessünk meg két esetet, az 1. esetben $\sin x \geq 0$, míg a 2. esetben $\sin x < 0$.

**3298.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Mutassuk meg először, hogy $\sin 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$. Ezután ezt helyettesítsük be az egyenletbe, majd szorozzunk a nevezővel! Ekkor kapunk $\operatorname{tg} x$-re egy harmadfokú egyenletet. Azt alakítsuk szorzattá a következő módon: $\operatorname{tg}^3 x - 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x + 3 \cdot \operatorname{tg} x - 2 = 0$,
$\left(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x\right) - \left(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x\right) + 2 \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0$. Folytassuk!

**3299.** $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx 0{,}6435 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx 0{,}9273 + n \cdot 2 \cdot \pi$. Vezessünk be új változót: $y = \sin x + \cos x$. Ekkor $y$-ra egy másodfokú egyenletet kapunk, amelyet oldjunk meg! Utána a szokott módon megoldhatjuk a kapott két részegyenletet, ha mindegyiket osztjuk $\sqrt{2}$-vel.

**3300.** $x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{2}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=\frac{\pi}{6}+m\cdot 2\cdot\pi$; $x_4=\frac{5\cdot\pi}{6}+n\cdot 2\cdot\pi$.
Használjuk fel, hogy $\sin 3x=3\cdot\sin x\cdot\cos^2 x-\sin^3 x$ és $\cos 2x=1-2\cdot\sin^2 x$. Ezeket helyettesítsük be és rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!
$\left(2\cdot\sin x-2\cdot\sin^3 x\right)-\left(1-\sin^2 x\right)=0$. Folytassuk!

**3301.** $x_1=-\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{3}+l\cdot\pi$. Osszuk el az egyenletet 2-vel! A bal oldalon levő második és harmadik tag összege éppen $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. Így $\cos 3x=-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos 3x=\sin\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos 3x=\cos\left(-x-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$.

**3302.** $x_1=k\cdot\frac{\pi}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{2}+l\cdot\pi$; $x_3=\frac{\pi}{2}+m\cdot 2\cdot\pi$. Összefoglalva a megoldásokat: $x=n\cdot\frac{\pi}{2}$. Használjuk fel, hogy $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ és $1-\cos^2 2x=\sin^2 2x$. Alakítsuk át ezután a szinuszok összegére vonatkozó tétellel az egyenlet jobb oldalát: $\sin 3x+\sin x=$ $=2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$. Majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

**3303.** $x_1=k\cdot\pi$; $x_2=\frac{\pi}{6}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=-\frac{\pi}{6}+m\cdot 2\cdot\pi$; $x_4=\frac{5\cdot\pi}{6}+n\cdot 2\cdot\pi$; $x_5=-\frac{5\cdot\pi}{6}+p\cdot 2\cdot\pi$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, másrészt $\sin 4x=2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x=$ $=4\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\left(2\cdot\cos^2 x-1\right)$. Szorozzunk a nevezővel, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

**3304.** $x_1\approx 0{,}4240+k\cdot 2\cdot\pi$; $x_2\approx 1{,}9948+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3\approx 0{,}4240+m\cdot 2\cdot\pi$; $x_4\approx 4{,}2884+n\cdot 2\cdot\pi$. **1. eset:** $\pi\cdot\cos x=\frac{\pi}{2}-\pi\cdot\sin x+p\cdot 2\cdot\pi$, ebből $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}+2\cdot p$. Osszuk ezt az egyenletet $\sqrt{2}$-vel és gondoljuk meg, hogy csak $p=0$ lehet. Kapjuk, hogy $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Folytassuk! A **2. esetben:** $\pi\cdot\cos x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\pi\cdot\sin x\right)+q\cdot 2\cdot\pi$. Hasonlóan folytathatjuk, mint az 1. esetnél.

**3305.** $x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$; $x_2=2$. Az egyenlet a következőre vezet: $|3x-5|\cdot\cos x=(1-x)\cdot|\cos x|$. Alkalmazzuk az esetek szétválasztását! **1. eset:** $\cos x=0$. **2. eset:** $\cos x>0$. **3. eset:** $\cos x<0$.

**3306.** $x_1=-\frac{\pi}{66}+k\cdot\frac{\pi}{11}$; $x_2=\frac{\pi}{9}+l\cdot\frac{\pi}{6}$. Osszuk el az egyenletet 2-vel! Az így kapott egyenlet második és harmadik tagjának összege $\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$; $\sin 17x+\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=0$; $\sin 17x=-\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$; $\sin 17x=\sin\left(-5x-\frac{\pi}{3}\right)$.

**3307.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióját! Hozzunk közös nevezőre a bal oldal számlálójában, majd alkalmazzuk visszafelé a $\cos 2x$ képletét! Ezután szorozzunk $(\sin x \cdot \cos x)$-szel, majd rendezzük nullára az egyenletet, ezután pedig alakítsuk szorzattá!

**3308.** $x = 2 \cdot \pi + k \cdot 24 \cdot \pi$. Gondoljuk meg, hogy az egyenlet bal oldala nem nagyobb, mint 3. Ezért pontosan akkor teljesülhet az egyenlet, amikor az $\sin \frac{x}{4} = 1$ és $\cos\left(\frac{x - 2 \cdot \pi}{3}\right) = 1$.

IV

**3309.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Összefoglalva: $x = \frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$. Osszuk el az egyenletet 2-vel! $\left(\frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x\right) \cdot \sin 3x = 1$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 3x = 1$. Gondoljuk meg, hogy ez pontosan akkor lehet, ha mindkettő tényező 1-gyel egyenlő, vagy ha mindkét tényező $(-1)$-gyel egyenlő!

**3310.** $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Adjunk mindkét oldalhoz 1-et, majd alakítsuk szorzattá a bal oldalt! $(\sin x + 1)(\cos x + 1) = 2$. Gondoljuk meg, hogy ez pontosan akkor lehet, ha az első tényező 1 és a második tényező 2, illetve fordítva! Miért nem lehetnek negatívak a tényezők?

**3311.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0{,}9117 + l \cdot \pi$; $x_3 \approx -0{,}9117 + m \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$, $\cos 6x = 4 \cdot \cos^3 2x - 3 \cdot \cos 2x$ és $\cos^6 x = \left(\cos^2 x\right)^3 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3$. Helyettesítsük be ezeket az egyenletbe, rendezzük az egyenletet és $\cos 2x$-re egy másodfokú egyenletet kapunk. $4 \cdot \cos^2 2x + 5 \cdot \cos 2x + 1 = 0$.

**3312.** $(k; 0)$ és $(k; 2)$ ahol $k$ tetszőleges egész szám. Gondoljuk meg, hogy az egyenlet akkor és csak akkor állhat fenn, ha: $\sin(\pi \cdot x) = 0$ és $\log_2(y^2 - 2y + 1) = 0$!

**3313.** $x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ és $y = \frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{\pi}{4}$. Gondoljuk meg, hogy az egyenlet akkor és csak akkor teljesülhet, ha $\operatorname{tg} 2x + \sqrt{3} = 0$ és $\operatorname{ctg}\left(4y - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

**3314.** $x_1 = \frac{1}{2} + k$; $x_2 = \frac{1}{8}$. Az egyenletből a következő egyenlet következik: $8 \cdot x^2 \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot x) + 15 \cdot x \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot x) = 2 \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot x)$. Ezt rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá!

**3315.** $x_1 = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{8} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{8} + m \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{3 \cdot \pi}{8} + n \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ és $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ és ezeket helyettesítsük be az egyenletbe! Végezzük el az ötödik hatványra való emelést például a binomiális tétellel, rendezzük az egyenletet és kapjuk, hogy: $0 = 24 \cdot \cos^4 2x - 10 \cdot \cos^2 2x - 1$. Ezt másodfokú egyenletre vezethetjük vissza.

IV

**3316.** *a)* $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\alpha - \beta\right) - \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$ azonosságot! *b)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\alpha - \beta\right) + \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$ azonosságot! *c)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Alkalmazzuk a $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\alpha + \beta\right) + \sin\left(\alpha - \beta\right)\right)$ azonosságot! *d)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\alpha + \beta\right) - \sin\left(\alpha - \beta\right)\right)$ azonosságot! *e)* $x = k \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, majd alkalmazzuk a következő két azonosságot: $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\alpha - \beta\right) - \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$, $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\alpha - \beta\right) + \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$.

**3317.** *a)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{10} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_3 = \frac{\pi}{14} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7}$. Alkalmazzuk a $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$ azonosságot! Rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! *b)* $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát, a jobb oldalát, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! *c)* $x_1 = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{10}$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$. Az egyenlet mindkét oldalát alakítsuk szorzattá, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

**3318.** *a)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{13}$; $x_2 = l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\alpha - \beta\right) + \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$ azonosságot! Majd ezután a koszinuszok különbségének szorzattá alakítására való azonosságot. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{10}$; $x_2 = \frac{\pi}{22} + l \cdot \frac{\pi}{11}$. Alkalmazzuk mindkét oldalra a $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\alpha + \beta\right) + \sin\left(\alpha - \beta\right)\right)$ azonosságot!

**3319.** $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_3 = -\frac{\pi}{12} + m \cdot \frac{\pi}{2}$. Alkalmazzuk az egyenlet bal oldalára a $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$ azonosságot! Majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

**3320.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{18} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{18} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Alkalmazzuk az első két tagra szinuszok összegének szorzattá alakítására való azonosságot! Majd vegyük figyelembe, hogy $2 \cdot \sin^2 x = 1 - \cos 2x$. Ezután rendezzük az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

**3321.** $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Az egyenlet első két tagja által alkotott összeget alakítsuk szorzattá! Ezután az egész egyenletet szorzattá alakíthatjuk.

**3322.** $x_1=\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$; $x_2=-\frac{2\cdot\pi}{3}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=\frac{\pi}{2}+m\cdot\pi$; $x_4=\frac{\pi}{6}+n\cdot\pi$; $x_5=\frac{5\cdot\pi}{6}+p\cdot\pi$; $(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x=\cos x+(1+\cos 2x)$, $2\cdot\sin 2x\cdot\cos x+\sin 2x=\cos x+2\cdot\cos^2 x$. Mindkét oldalt alakítsuk szorzattá, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

**3323.** $x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$; $x_2=l\cdot\frac{2\cdot\pi}{5}$; $x_3=\pi+m\cdot 2\cdot\pi$. $(\sin 3x+\sin x)+(\sin 4x+\sin 2x)=0$. Majd mindkét zárójeles kifejezést alakítsuk szorzattá! Ezután az egész egyenletet szorzattá alakíthatjuk.

**3324.** $x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$; $x_2=\frac{\pi}{5}+l\cdot\frac{2\cdot\pi}{5}$; $x_3=\pi+m\cdot 2\cdot\pi$. $(\cos 3x+\cos x)+(\cos 4x+\cos 2x)=0$. Mindkét zárójeles kifejezést alakítsuk szorzattá! Ezután az egész egyenletet szorzattá alakíthatjuk.

**3325.** $x_1=k\cdot\pi$; $x_2=l\cdot\frac{\pi}{2}$. Az egyenlet bal oldalát alakítsuk szorzattá!

**3326.** $x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$; $x_2=\frac{\pi}{12}+l\cdot\frac{\pi}{3}$; $(\sin 4x+\sin 2x)-(\cos 4x+\cos 2x)=0$. Mindkét zárójeles kifejezést alakítsuk szorzattá! Ezután az egyenletet is szorzattá alakíthatjuk.

**3327.** *a)* $x_1=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{4\cdot\pi}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{10}+l\cdot\frac{2\cdot\pi}{5}$; $(\sin 4x+\sin x)-(\cos 4x+\cos x)=0$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. *b)* $x_1=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}$; $x_2=-\frac{\pi}{10}+l\cdot\frac{2\cdot\pi}{5}$. $(\sin 4x+\sin x)+(\cos 4x+\cos x)=0$. *c)* $x_1=\pi+k\cdot 2\cdot\pi$; $x_2=\frac{\pi}{6}+l\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}$. $(\sin 2x+\sin x)-(\cos 2x+\cos x)=0$.

**3328.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$. Alkalmazzuk a $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$ és a $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$ azonosságokat!

**3329.** *a)* $x_1\approx 0{,}2052+k\cdot\frac{\pi}{3}$; $x_2\approx -0{,}2052+l\cdot\frac{\pi}{3}$. Alkalmazzuk a $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$ azonosságot! A jobb oldalon végezzük el a következő átalakítást: $3\cdot\sin^2 4x-1=2-3\cdot\cos^2 4x=2-3\cdot\frac{1+\cos 8x}{2}$. A rendezés után az egyenletünk a következő alakúvá válik: $\cos 6x=\frac{1}{3}$. *b)* $x_1=k\cdot\frac{\pi}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{8}+l\cdot\frac{\pi}{4}$. $\frac{1}{4}\cdot\sin 4x=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x$. Ezután rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá! *c)* $x_1=k\cdot\frac{\pi}{4}$; $x_2=\frac{\pi}{2}+l\cdot\pi$; $x_3=\frac{\pi}{6}+m\cdot 2\cdot\pi$; $x_4=\frac{5\cdot\pi}{6}+n\cdot 2\cdot\pi$. Használjuk fel, hogy $\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ és

IV

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! *d)* $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + k\cdot\pi$; $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + l\cdot\pi$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ és $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$. *e)* $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + k\cdot\pi$; $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + l\cdot\pi$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ és $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$.

**3330.** *a)* $x_1 = \dfrac{\pi}{12} + k\cdot\dfrac{\pi}{2}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + l\cdot\pi$. Szorozzunk a nevezőkkel és hozzuk az egyenletet a következő alakúra: $4\cdot\sin 2x\cdot\cos x = \sqrt{3}\cdot\cos x + \sin x$. Majd alkalmazzuk a $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)$ azonosságot! Rendezzük, majd pedig 2-vel osszuk el az egyenletet! Kapjuk, hogy $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x - \dfrac{1}{2}\cdot\sin x$, ebből $\sin 3x = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$. *b)* $x_1 = \dfrac{\pi}{8} + k\cdot\dfrac{\pi}{4}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + l\cdot\pi$; $x_3 = -\dfrac{\pi}{3} + m\cdot\pi$. Alkalmazzuk a $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ azonosságot háromszor, rendezés után kapjuk, hogy: $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$. Alkalmazzuk most a $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot, mégpedig a $2x$-es tagra és a $6x$-es tagra. Ezután szorzattá alakíthatjuk az egyenletet! *c)* $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + k\cdot\dfrac{\pi}{3}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{20} + l\cdot\dfrac{\pi}{10}$; $x_3 = \dfrac{\pi}{2} + m\cdot\pi$. Alkalmazzuk a $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ azonosságot négyszer! Ekkor kaphatjuk rendezés után, hogy: $\cos 6x + \cos 8x + \cos 12x + \cos 14x = 0$; $\left(\cos 12x + \cos 6x\right) + \left(\cos 14x + \cos 8x\right) = 0$. Alkalmazzuk most a zárójeles összegekre a $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot! Ezután szorzattá alakíthatjuk az egyenletet.

**3331.** $x_1 = -\dfrac{7}{4}$; $x_2 = \dfrac{1}{4}$. Fogás:

$$\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}\cdot\cos(\pi\cdot x) + \frac{1}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}\cdot\sin(\pi\cdot x)\right) = \sqrt{2}.$$

Ez azért lesz hasznos, mert: $\left(\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}\right)^2 = 1.$

Így van olyan $\alpha$ szög, amelyre: $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}$ és $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}$.

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy:

$$\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}\cdot\left(\sin\alpha\cdot\cos\left(\pi\cdot x\right) + \cos\alpha\cdot\sin\left(\pi\cdot x\right)\right) = \sqrt{2},$$

$\sqrt{2-\text{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}\cdot\sin(\pi\cdot x+\alpha)=\sqrt{2}$. Másrészt $\sqrt{2-\text{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}\le\sqrt{2}$ és $\sin(\pi\cdot x+\alpha)\le 1$. Így az egyenlet akkor és csak akkor teljesülhet, ha mindkét előző egyenlőtlenségben egyenlőség áll elő. Elég vizsgálni a $\sqrt{2-\text{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}=\sqrt{2}$ egyenletet. Ezt megoldva, kapjuk, hogy $x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}$, ahol $k$ tetszőleges egész szám. Az eredeti egyenlet gyökei ezek közül kerülhetnek ki. Ha a 4-gyel való oszthatóság szempontjából vizsgáljuk a $k$ értékét és a négy esetet behelyettesítéssel kipróbáljuk az eredeti egyenletnél, akkor azt kapjuk, hogy pontosan akkor lesz megoldás, ha $k=4\cdot m$, ahol $m$ tetszőleges egész szám. Tehát $x=\frac{1}{4}+2\cdot m$ a megoldás, de ezek közül a feladat csak azokat kéri, amely a $[-3;1]$ intervallumba esnek. Ezek pedig $m=0$-nál, illetve $m=-1$-nél vannak, azaz $x=\frac{1}{4}$, illetve $x=-\frac{7}{4}$.

IV

## Paraméteres trigonometrikus egyenletek

**3332.** $x=\frac{\pi}{2}\cdot k\cdot\pi$ az egyenlet azon megoldása, amely tetszőleges $a$ valós szám esetén megoldása az egyenletnek. Ismert, hogy $\cos 3x=4\cdot\cos^3 x-3\cdot\cos x$, ezt helyettesítsük be az egyenletbe, majd rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá! $\cos x\cdot\left(4\cdot\cos^2 x-3-a\right)=0$.

**1. eset:** ha $\cos x=0$, ebből kapjuk, hogy $x=\frac{\pi}{2}\cdot k\cdot\pi$ és ez tetszőleges a valós szám esetén megoldása az egyenletnek.

**2. eset:** ha $4\cdot\cos^2 x-3-a=0$, ebből $\cos^2 x=\frac{3+a}{4}$, ennek csak akkor van megoldása a valós számok halmazán, ha $0\le\cos^2 x\le 1$ miatt $0\le\frac{3+a}{4}\le 1$, ebből pedig $-3\le a\le 1$. Tehát a második eset nem áll fenn minden $a$ valós számra.

**3333.** $-1\le p<3$ értékekre van az egyenletnek olyan megoldása, amelyre $0<x<\pi$. Ismert, hogy $\sin 3x=3\cdot\sin x-4\cdot\sin^3 x$, ezt helyettesítsük be, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! Kapjuk, hogy $\sin x\cdot\left(3-4\cdot\sin^2 x-p\right)=0$. 1**. eset:** $\sin x=0$, ebből $x=k\cdot\pi$, ez a feltétel miatt nem lehet, hiszen $0<x<\pi$.

**2. eset:** $3-4\cdot\sin^2 x-p=0$, ebből $\sin^2 x=\frac{3-p}{4}$, és $0<x<\pi$ miatt $0<\sin^2 x\le 1$.

Így $0<\frac{3-p}{4}\le 1$, ebből $-1\le p<3$.

**3334.** **1. eset:** Ha $a\ne-\frac{\pi}{2}+(n-m)\cdot\pi$, ahol $n$ és $m$ tetszőleges egészek, akkor $x_1=k\cdot\pi$; $x_2=-a+n\cdot\pi$ a megoldások, ahol $k$ tetszőleges egész szám.

**2. eset:** Ha $a=-\frac{\pi}{2}+(n-m)\cdot\pi$, akkor $x=k\cdot\pi$ a megoldás. $\cos x\cdot\cos(a+x)=\cos a$, alkalmazzuk a $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$ azonosságot.

$\frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(a + x - x\right) + \cos\left(a + x + x\right)\right) = \cos a$, ebből $\cos\left(2x + a\right) = \cos a$. Ebből $x = k \cdot \pi$, illetve $x = -a + n \cdot \pi$ következik. $\cos x \neq 0$, ebből $x \neq \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$. Így $k \cdot \pi \neq \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$, ebből $k \neq \frac{1}{2} + m$, itt az egyenlőség nem is következhet be. Másrészt $\frac{\pi}{2} + m \cdot \pi \neq -a + n \cdot \pi$, ebből $a \neq -\frac{\pi}{2} + (n - m) \cdot \pi$.

IV

**3335.** $-1 \leq m \leq 1$ paraméterértékek mellett van megoldása az egyenletnek a valós számok halmazán. Használjuk fel $\cos 2x$ képletét, ezután kapunk $\cos x$-re egy másodfokú egyenletet. Oldjuk meg! Azt kapjuk, hogy **1. eset:** $\cos x = \frac{3 \cdot m}{2}$, ebből következik, hogy $-\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{2}{3}$. **2. eset:** $\cos x = -m$, ebből következik, hogy $-1 \leq m \leq 1$. A két eset egyenlőtlenségeinek egyesítése (uniója): $-1 \leq m \leq 1$.

**3336.** $-4 \leq p \leq 2$ valós paraméter esetén van az egyenletnek valós megoldása. Tekintsük a $\cos x$-re másodfokú egyenletet! Ennek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Ebből következik, hogy (1) $\frac{9}{4} \geq p$. Másrészt tekintsük a megoldóképletből kapott $\cos x$ értékeket! Ezeknek a $[-1; 1]$ intervallumba kell esni. Az egyik eset nem állhat fenn, a másik esetből (2) $-4 \leq p \leq 2$ következik. Az (1) és (2) egyenlőtlenségnek egyaránt teljesülnie kell. Ez a közös rész pedig $-4 \leq p \leq 2$.

**3337.** $-5 \leq p \leq 3$ paraméterértékek esetén van az egyenletnek valós megoldása. A $\sin x$-re másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Ebből következik, hogy (1) $p \leq 4$. Másrészt az egyenlet gyökeinek a $[-1; 1]$ intervallumba kell esniük. Az egyikből nem kapunk megoldást. Míg a másikból kapjuk, hogy (2) $-5 \leq p \leq 3$. Az (1) és (2) egyenlőtlenség közös része: $-5 \leq p \leq 3$.

**3338.** $\alpha_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\alpha_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + m \cdot 6 \cdot \pi$ esetén lesz az egyenletnek két egyenlő valós gyöke. Feltételek: $\cos\alpha > 0$ és $\sin\alpha \neq 0$, ezekből $-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2 \cdot \pi < \alpha < 0 + 2 \cdot \pi$; $0 + n \cdot 2 \cdot \pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Az egyenletnek akkor és csak akkor van két egyenlő gyöke, amikor a diszkriminánsa nulla: $\left(\frac{2}{\sqrt{\sin\alpha}}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\sin\alpha} + 2 \cdot \sqrt{2}\right) = 0$. Ennek a megoldásaiból válogassuk ki azokat, amelyek eleget tesznek a feltételeknek.

**3339.** Pontosan egy valós megoldása akkor van az egyenletnek, ha $c$ irracionális szám. $x = 0$ megoldása az egyenletnek. Tehát azt kell megállapítanunk, hogy mely $c$-re nincs az egyenletnek nullától különböző megoldása. Mivel $1 + \sin^2(cx) \geq 1$ és $\cos x \leq 1$, ezért az egyenlet akkor és csak akkor teljesül, ha $\sin^2(cx) = 0$ és $\cos x = 1$. Tehát $x = \frac{k \cdot \pi}{c}$ és $x = m \cdot 2 \cdot \pi$. Ezekből $\frac{k \cdot \pi}{c} = m \cdot 2 \cdot \pi$, így $c = \frac{k}{2 \cdot \pi}$, azaz $c$ racionális szám. Ha viszont $c$ racionális szám, akkor van az egyenletnek nem nulla megoldása. Legyen ugyanis $c = \frac{p}{q}$, ahol $p$ és $q$ egész számok, akkor mutassuk meg, hogy $x = 2 \cdot q \cdot \pi$ kielégíti az egyenletet. Ezekből következik, hogy az egyenletnek akkor és csak akkor van 0-tól különböző megoldása a valós számok halmazán, ha $c$ racionális szám. Tehát az egyenletnek egyetlen megoldása ($x = 0$) akkor van, ha $c$ irracionális szám.

**3340.** $p \le 0$ vagy $p = 1$ vagy $p \ge 3$ paraméter értékeknél lesz gyöke az egyenletnek a valós számok halmazán. Először tekintsük a $p = 1$ esetet, erre azt kapjuk, hogy az egyenletnek minden valós szám megoldása. Ha $p \ne 1$, akkor oszthatjuk az egyenletet $(p - 1)$-gyel. Tekintsük a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsát, ez pedig pozitív lesz. Oldjuk meg az egyenletet, kapjuk, hogy **1. eset:** $\sin x = \frac{2}{p-1}$; **2. eset:** $\sin x = -(p+1)$. Valós gyök akkor van, ha ezek közül legalább az egyik a $[-1; 1]$ intervallumba esik. Oldjuk meg a két kettős egyenlőtlenséget!

**3341.** $(0; 0)$ vagy $(1; 0)$ azon számpárok, amelyekre az egyenlőség minden valós $x$ számra teljesül. Először helyettesítsünk $x = \pi$-t, majd helyettesítsünk $x = 2 \cdot \pi$-t! A második kapott eredményből $b = 0$ következik. Ezt visszahelyettesítve az előző eredménybe, kapjuk, hogy $a = k$, ahol $k$ egész szám. Vegyük figyelembe, hogy a $\cos(a \cdot \pi)$ a $[-1; 1]$ intervallumba esik, ebből következtessünk arra, hogy $a = 0$ vagy $a = 1$.

**3342.** $\frac{-1-\sqrt{10}}{2} \le p \le \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$ paraméterértékek esetén van valós megoldása az egyenletnek. Alkalmazzuk a következő helyettesítést: $p = p \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$. A nullára rendezés után osszuk el az egyenletet $\cos x$-szel, amikor ez nem nulla. Ekkor $\operatorname{tg} x$-re kapunk egy egyenletet. Ha $p = 1$, akkor van az egyenletnek valós megoldása. Ha $p \ne 1$, akkor $\operatorname{tg} x$-re másodfokú egyenletünk van. Ennek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Vizsgáljuk meg még azt az esetet, amikor $\cos x = 0$ !

**3343.** $-\sqrt{2} \le p \le \sqrt{2}$ paraméterértékekre van az egyenletnek valós megoldása. A $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítést végrehajtva, egy olyan egyenletet kapunk, amely $\sin^2 x$-re másodfokú. Ennek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Ebből kapjuk, hogy (1) $-\sqrt{3} \le p \le \sqrt{3}$. Oldjuk meg az egyenletet $\sin^2 x$-re! Használjuk fel, hogy $0 \le \sin^2 x \le 1$! Az egyik gyök nem eshet ide, a másikból viszont azt kapjuk, hogy (2) $-\sqrt{2} \le p \le \sqrt{2}$. Az (1) és (2) közös része a (2) egyenlőtlenség.

**3344.** $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ az egyenlet megoldása tetszőleges $p$ valós paraméter esetén. Alakítsuk szorzattá még jobban az egyenlet jobb oldalát az $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a \cdot b + b^2)$ azonosság segítségével. **1. eset:** Ha $\sin x + \cos x = 0$, akkor $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, minden $p$ valós szám esetén. **2. eset:** Ha $\sin x + \cos x \ne 0$, akkor $0 = p \sin^2 x - (p+2) \cdot \sin x \cdot \cos x + p \cdot \cos^2 x$ alakra alakíthatjuk az egyenletet. **2.** *a)* **eset:** Ha $\cos x \ne 0$, akkor oszthatjuk az előző egyenletet $\cos x$-szel. Ekkor kapunk $\operatorname{tg} x$-re egyenletet, amelynek $p = 0$ esetén is van megoldása és ha $p \ne 0$, akkor a kapott másodfokú egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív. Ebből következik, hogy $-\frac{2}{3} \le p \le 2$ és $p \ne 0$. Tehát ebben az esetben nem minden valós $p$-re van megoldás. **2.** *b)* **eset:** Ha $\cos x = 0$, akkor az egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha $p = 0$.

**3345.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, tetszőleges $p$ valós paraméter esetén, $x_2 = \frac{\pi}{3 \cdot (p-1)} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{p-1}$, ha $p \ne 1$, $x_3 = -\frac{\pi}{3 \cdot (p-1)} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{p-1}$, ha $p \ne 1$. Használjuk fel a $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot! Ennek a segítségével a következő alakra hozhatjuk az egyenletet: $\cos x \cdot \left(2 \cdot \cos\left((p-1) \cdot x\right) - 1\right) = 0$.