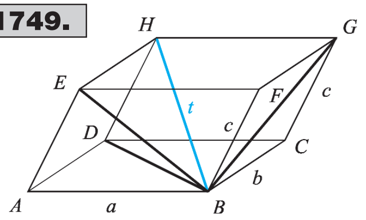
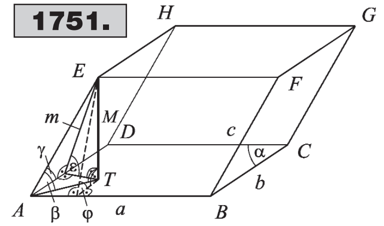
1749.



1751.



1748. Tekintsük az 1744. ábrát. Felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalainak négyzetösszegével. Az $ACGE$ paralelogrammában: $AG^2 + EC^2 = 2(AE^2 + AC^2)$. A $BDHF$ paralelogrammában: $DF^2 + BH^2 = 2(BF^2 + DB^2)$. Az $ABCD$ paralelogrammában: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$. A fenti összefüggéseket felhasználva: $AG^2 + EC^2 + DF^2 + BH^2 = 2AE^2 + 2AC^2 + 2BF^2 + 2BD^2 = 2AE^2 + 4AB^2 + 4AD^2 + 2BF^2 = 2c^2 + 4a^2 + 4b^2 + 2c^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

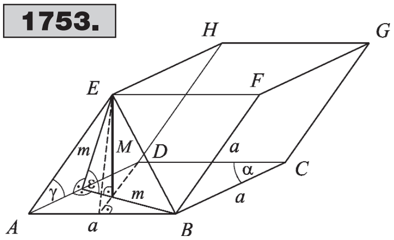
1749. Felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalainak négyzetösszegével. A $BCHE$ paralelogrammában $t^2 + EC^2 = 2BE^2 + 2b^2$. A $BFHD$ paralelogrammában $t^2 + DF^2 = 2DB^2 + 2c^2$. Az $ABGH$ paralelogrammában $t^2 + AG^2 = 2BG^2 + 2a^2$. A fenti összefüggéseket felhasználva: $2t^2 + \underline{t^2 + EC^2 + DF^2 + AG^2} = 2(BE^2 + DB^2 + BG^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Az aláhúzottak a testátlók négyzetei, amiknek összege az 1748. feladat szerint egyenlő az oldalak négyzetösszegével. $\Rightarrow 2t^2 + 4(a^2 + b^2 + c^2) = 2(BE^2 + DB^2 + BG^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow t^2 + a^2 + b^2 + c^2 = BE^2 + DB^2 + BG^2$.

1750. $V = \underline{\underline{15\,105{,}8\ \text{cm}^3}} \approx \underline{\underline{15{,}1\ \text{dm}^3}}$.

1751. $V = t \cdot M = (9 \cdot 13 \cdot \sin 48{,}6°)(25 \cdot \sin 68{,}3°) \approx \underline{\underline{2038{,}6\ \text{cm}^3}}$.

1752. Tekintsük az 1751. ábrát. Legyen $a = 11$ cm, $b = 8$ cm, $\alpha = 46{,}7°$, $c = 16$ cm, $\gamma = 62{,}5°$, $\varepsilon = 53°$. $t = 8 \cdot 11 \cdot \sin 46{,}7° \approx 64{,}04\ \text{cm}^2$ és $m = 16 \cdot \sin 62{,}5° \approx 14{,}2$ cm. $M = m \cdot \sin 53° \approx 11{,}34$ cm. $V = t \cdot M \approx \underline{\underline{726{,}25\ \text{cm}^3}}$.

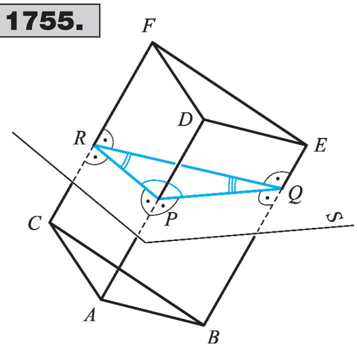
1753.



1753. Legyen $a = 11$ cm és $\alpha = \gamma = 52{,}3°$; $A = 6 \cdot a^2 \sin\alpha \approx \underline{\underline{574{,}43\ \text{cm}^2}}$. $m = a \cdot \sin\gamma \approx 8{,}7$ cm. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást és szögfelezők. Egybevágó rombuszok magasságai egyenlők. $\Rightarrow BUE\triangle$ egyenlő szárú, szárszöge ε. $\frac{e}{2} = a \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \approx 4{,}85$ cm, $\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{m} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \approx 33{,}88° \Rightarrow \varepsilon \approx 67{,}76°$. $M = m \cdot \sin\varepsilon \approx 8{,}05$ cm.

$V = a^2 \cdot \sin\alpha \cdot M \approx \underline{\underline{770{,}7\ \text{cm}^3}}$.

1755.



1754. Tekintsük a hasáb oldalélekre merőleges síkmetszetét! A síkmetszetháromszög oldalai az oldallapok magasságai. Az oldalélek egyenlők (b hosszúságúak). A háromszög-egyenlőtlenség szerint $m_a < m_b + m_c \Rightarrow t_a < t_b + t_c$.

1755. Tekintsük a hasáb oldalélekre merőleges síkmetszetét, a $PQR\triangle$-et! A síkra merőleges egyenes tétele miatt $AD \perp RP$ és $AD \perp QP \Rightarrow RPQ\sphericalangle$ a két oldallap szöge. $\Rightarrow$ A síkmetszet sokszög belső szögeinek összege egyenlő az oldallapsíkok által bezárt szögek összegével. A bizonyítás tetszőleges n oldalú hasábra elmondható. n oldalú hasáb síkmetszete n-szög, ezért $(n-2) \cdot 180°$ a szögek összege.

1756. Írjuk fel a felszínt és a térfogatot az élekkel kifejezve. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk fel. $A = 2\cdot(ab + bc + ac) = 6\cdot\dfrac{ab+bc+ac}{3} =$

$$= 6\cdot\frac{\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ac}{2}+\frac{ac}{2}}{3} = 6\cdot\frac{\frac{a\cdot(b+c)}{2}+\frac{b\cdot(c+a)}{2}+\frac{c\cdot(a+b)}{2}}{3} \geq$$

$$\geq 6\cdot\frac{a\cdot\sqrt{bc}+b\cdot\sqrt{ac}+c\cdot\sqrt{ab}}{3} \geq 6\cdot\sqrt[3]{abc\sqrt{a^2b^2c^2}} = 6\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 6\cdot\sqrt[3]{V^2}.$$

Egyenlőség $a = b = c$ esetén. $\Rightarrow$ Állandó térfogat mellett a minimális felszínű téglatest a kocka.

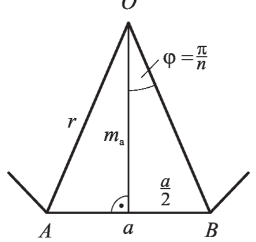
1757. Vágjuk fel a hasáb palástját az AA' él mentén, és terítsük ki a síkba. A kiterített paláston az út (a PP' szakasz) megrajzolható.

1758. A kimetszett síkidom merőleges vetülete az alaplap síkjára a hasáb alaplapja. Felhasználjuk, hogy a vetület területe a metsző sík alaplappal vett hajlásszögével kiszámítható:

$$t' = t\cdot\cos\alpha.\ \sqrt{50} = t\cdot\cos 45° \Rightarrow t = \frac{\sqrt{50}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{10\,\text{cm}^2}}.$$

1759. $$t_a = n\cdot t_{ABO} = n\cdot\frac{a\cdot m_a}{2} = n\cdot\frac{a\cdot\frac{a}{2\,\text{tg}\,\frac{\pi}{n}}}{2} = \frac{n\cdot a^2}{4\,\text{tg}\,\frac{\pi}{n}} \Rightarrow V = t_a\cdot m = \frac{m\cdot n\cdot a^2}{4\,\text{tg}\,\frac{\pi}{n}}.$$

1759.



1760. $V = t_{alap}\cdot m = \dfrac{6\cdot 0{,}4^2\cdot\sqrt{3}\cdot 23}{4} \approx \underline{\underline{9{,}56\,\text{cm}^3}}.$

1761. $V = t_{alap}\cdot m = \dfrac{2\cdot 3{,}4^2\cdot 8{,}02}{\text{tg}\,\frac{\pi}{8}} \approx \underline{\underline{447{,}65\,\text{cm}^3}}.$

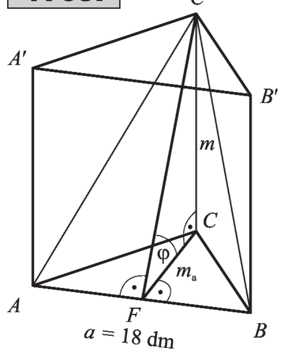
1762. Az alapterület Heron-képlettel:
$t_{alap} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol $a + b + c = 2s = 129$ cm $\Rightarrow$
$\Rightarrow s = 64{,}5$ cm.

$t_{alap} = \sqrt{64{,}5\cdot 31{,}5\cdot 22{,}5\cdot 10{,}5} \approx 692{,}82\,\text{cm}^2$. $V_{hasáb} = t_{alap}\cdot m = 692{,}82\cdot 82 = \underline{\underline{56\,811\,\text{cm}^3}}$.
$A_{hasáb} = 2\cdot t_{alap} + K_{alap}\cdot m = 2\cdot 692{,}82 + 129\cdot 82 = \underline{\underline{11\,963{,}64\,\text{cm}^2}}$.

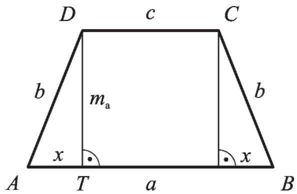
1763. Az alaplap háromszögre ($a = 2{,}18$ m; $b = 1{,}7$ m; $\alpha = 58{,}38°$) alkalmazzuk a szinusztételt: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow \dfrac{1{,}7}{2{,}18} = \dfrac{\sin\beta}{\sin 58{,}38°} \Rightarrow \sin\beta = 0{,}664 \Rightarrow \beta = 41{,}61°$. (Mivel $\beta < \alpha$, β nem tompaszög.) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 80{,}01°$. $t_{alap} = \dfrac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2} = 1{,}82\,\text{m}^2 \Rightarrow V = t_{alap}\cdot m \Rightarrow m = \dfrac{V}{t_{alap}} =$
$= \dfrac{26{,}75}{1{,}82} \approx \underline{\underline{14{,}66\,\text{m}}}$.

1764. $M = 3$ dm $= 0{,}3$ m. $V = \dfrac{m}{\varrho} = \dfrac{175{,}8}{0{,}3} = 586\,\text{dm}^3 \Rightarrow t_a = \dfrac{V}{M} = \dfrac{586}{3} \approx \underline{\underline{195{,}3\,\text{dm}^2}}$.

1765.



1767.



1765. Az alaplap szabályos háromszög, ezért $m_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. FCC' derékszögű háromszögben $m=m_a\cdot \operatorname{tg}\varphi=\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi$. A síkmetszet és az alaplap szöge $C'FC\sphericalangle=\varphi=62{,}7°$. $V=t_a\cdot m=$ $=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi=\frac{3a^3\cdot\operatorname{tg}\varphi}{8}\Rightarrow V\approx\underline{\underline{4237\ \mathrm{dm}^3}}$.

1766. $A=2\cdot 22{,}28+20\cdot 5\approx\underline{\underline{144{,}56\ \mathrm{cm}^2}}$; $V=22{,}28\cdot 5\approx\underline{\underline{111{,}4\ \mathrm{cm}^3}}$.

1767. Legyen $a=21\ \mathrm{cm}$, $b=9\ \mathrm{cm}$, $c=16\ \mathrm{cm}\Rightarrow x=2{,}5\ \mathrm{cm}$, $m=43\ \mathrm{cm}$. ATD derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel: $m_a^2=9^2-2{,}5^2\Rightarrow m_a\approx 8{,}65\ \mathrm{cm}$. $t_{alap}=\frac{(a+c)m_a}{2}=\frac{(21+16)\cdot 8{,}65}{2}\approx$ $\approx 159{,}95\ \mathrm{cm}^2$. $A=2t_{alap}+K_{alap}\cdot m=2\cdot 159{,}95+55\cdot 43\approx\underline{\underline{2685\ \mathrm{cm}^2}}$. $V=t_{alap}\cdot m=159{,}95\cdot 43\approx$ $\approx\underline{\underline{6877{,}9\ \mathrm{cm}^3}}$.

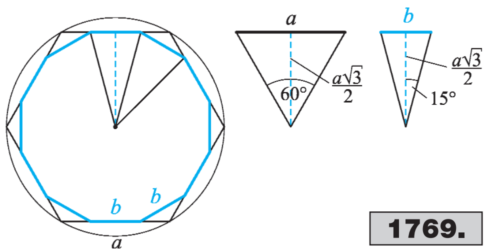
1768. $V=t_{alap}\cdot m=0{,}1496\cdot 2{,}46=0{,}368\ \mathrm{m}^3=368\ \mathrm{dm}^3\Rightarrow m_b=\varrho\cdot V=2{,}85\cdot 368=\underline{\underline{1049{,}2\ \mathrm{kg}}}$.

1769. A térfogatok aránya egyenlő lesz az alapterületek arányával. $\frac{b}{2}:\frac{a\sqrt{3}}{2}=\operatorname{tg}15°\Rightarrow$ $\Rightarrow b=a\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}15°$.

1. $t_{hatszög}=6\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}\cdot a^2}{2}$; $t_{tizenkétszög}=12\cdot\frac{a\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}15°\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}=9\cdot\operatorname{tg}15°\cdot a^2$.

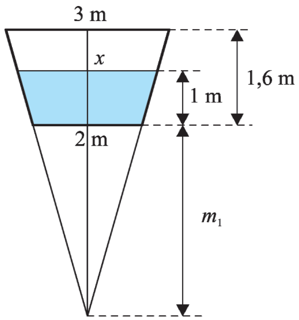
2. $t_{hatszög}:t_{tizenkétszög}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\right):\left(9\cdot\operatorname{tg}15°\cdot a^2\right)=$ $=\frac{\sqrt{3}}{6\cdot\operatorname{tg}15°}\approx\underline{\underline{1{,}077}}$.

1770. $V_{hasáb}=\underline{\underline{192\ \mathrm{cm}^3}}$; $A_{hasáb}\approx\underline{\underline{221{,}7\ \mathrm{cm}^2}}$.



1769.

1771.



1771. A hasonlóságból következik, hogy $\frac{m_1}{2} = \frac{m_1 + 1}{x} = \frac{m_1 + 1{,}6}{3} \Rightarrow m_1 = 3{,}2\text{ m} \Rightarrow x = 2{,}625\text{ m}$. A csatornát tekinthetjük húrtrapéz alapú egyenes hasábnak:
$t_{alap} = \frac{2 + 2{,}625}{2} \cdot 1 = 2{,}3125\text{ m}^2$. 1 másodperc alatt 1,4 m $\Rightarrow$ 1 óra alatt 5040 m, vagyis a hasáb magassága 5040 m. $V = t_{alap} \cdot m = 2{,}3125 \cdot 5040 = \underline{\underline{11\,655\text{ m}^3}}$.

1772. Tekintsük az 1767. ábrát. Legyen $b = 7{,}3\text{ m}$, $c = 8\text{ m}$, $m_a = 6\text{ m}$, $m = 50\text{ m}$. A töltés tekinthető olyan húrtrapéz alapú hasábnak, amelynek magassága 50 m. Pitagorasz tétele miatt $x = \sqrt{7{,}3^2 - 6^2} \approx 4{,}16\text{ m}$. $AB = DC + 2x = 8 + 2 \cdot 4{,}16 \approx 16{,}32\text{ m}$.

$$V = t_a \cdot m = \frac{(16{,}32 + 8) \cdot 6}{2} \cdot 50 \approx \underline{\underline{3647{,}4\text{ m}^3}}.$$

1773. Az alaplap egy egyenlő szárú derékszögű háromszög $\Rightarrow$ oldalai a; $a\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

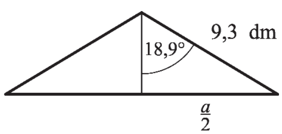
$$\frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = 8 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}\text{ m}.$$

$$A = 2t_{alap} + K_{alap} \cdot m, \text{ azaz } 25 = 2 \cdot 8 + \left(a + 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \cdot m \Rightarrow 9 = a\left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{9}{4\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)} = \frac{9\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \sqrt{2}}{8} = \frac{9\left(2 - \sqrt{2}\right)}{8}.$$

$$V = t_{alap} \cdot m = 8 \cdot \frac{9\left(2 - \sqrt{2}\right)}{8} = 9\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx \underline{\underline{5{,}27\text{ m}^3}}.$$

1774.



1774. $\frac{\frac{a}{2}}{9{,}3} = \sin 18{,}9° \Rightarrow a \approx 6{,}02\text{ dm}$ és $\frac{m_a}{9{,}3} = \cos 18{,}9° \Rightarrow$
$\Rightarrow m_a \approx 8{,}8\text{ dm}$. $A_{hasáb} = 2t_{alap} + K_{alap} \cdot m = 2 \cdot \frac{6{,}02 \cdot 8{,}8}{2} + (6{,}02 + 2 \cdot 9{,}3) \cdot 23{,}6 \approx \underline{\underline{634\text{ dm}^2}}$.

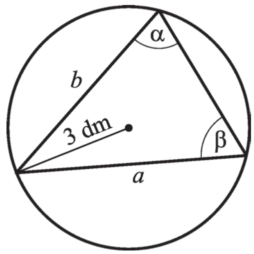
$$V_{hasáb} = t_{alap} \cdot m = \frac{6{,}02 \cdot 8{,}8}{2} \cdot 23{,}6 \approx \underline{\underline{625\text{ dm}^3}}.$$

1775. $A_{hasáb} = 2t_{alap} + K_{alap} \cdot m = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a \cdot m$, azaz $518{,}2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 660a \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{3}\,a^2 + 1320a - 1036{,}4 = 0 \Rightarrow a_1 < 0$, ez nem lehet egy szakasz hossza; $a_2 = 0{,}784$ dm $\Rightarrow$

$$\Rightarrow V = t_{alap} \cdot m = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot m = \frac{0{,}784^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 220 \approx \underline{\underline{58{,}6\text{ dm}^3}}.$$

1776. $V \approx \underline{\underline{13\,695\ \text{dm}^3}}$; $A \approx \underline{\underline{3506{,}8\ \text{dm}^2}}$.
1777. $V \approx \underline{\underline{37\,279\ \text{cm}^3}}$; $A \approx \underline{\underline{6463\ \text{cm}^2}}$.
1778. $V = t_{\text{alap}} \cdot m = \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 \cdot \sin 48{,}27° \approx \underline{\underline{310{,}23\ \text{dm}^3}}$.
1779. Az alapterület Heron-képlettel: $t_{\text{alap}} =$
$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{39{,}5 \cdot 19{,}5 \cdot 13{,}5 \cdot 6{,}5} \approx 259{,}98\ \text{dm}^2$.
$V = t_{\text{alap}} \cdot b \cdot \sin 69{,}6° = 259{,}98 \cdot 52 \cdot \sin 69{,}6° \approx 12\,671\ \text{dm}^3 \approx \underline{\underline{12{,}67\ \text{m}^3}}$.
1780. $\alpha = 50°7'$; $\beta = 70°13'$; $d = 7$ dm; $r = 3$ dm; $\varphi = 60°$.
$a = 2r \cdot \sin\alpha \approx 4{,}6$ dm; $b = 2r \cdot \sin\beta \approx \approx 5{,}65$ dm; $\gamma = 59{,}66°$.
$t_{\text{alap}} = \dfrac{ab\sin\gamma}{2} \approx 11{,}22\ \text{dm}^2 \Rightarrow V = t_{\text{alap}} \cdot d \cdot \sin\varphi \approx \underline{\underline{68\ \text{dm}^3}}$.

1780.

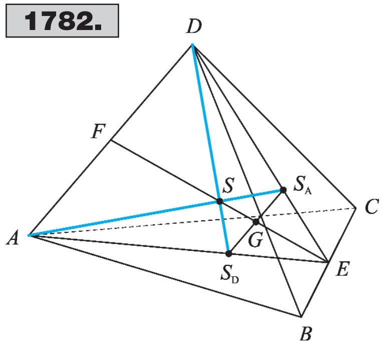


II

Tetraéder

1781. 1 rész: maga a test. 4 rész: a csúcsokhoz csatlakozó triéderekből. 4 rész: a lapokhoz csatlakozó térrészekből. 6 rész: az élekhez csatlakozó térrészekből. Összesen: $\underline{\underline{15\ \text{rész}}}$.
1782. Az $ABC\triangle$ S_D súlypontjára $AS_D = 2S_DE$; a $BCD\triangle$ S_A súlypontjára $DS_A = 2S_AE$. $AED\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt $S_AS_D \parallel DA \Rightarrow$ a párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva $S_AS_D = \dfrac{1}{3}AD$. $S_AS_DS\triangle \sim ADS\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{3} = \dfrac{S_AS}{AS} = \dfrac{S_DS}{DS} \Rightarrow S$ az AS_A, illetve DS_D szakaszok S_A-hoz, illetve S_D-hez közelebbi negyedelőpontja. Páronként bármely két laphoz tartozó súlyvonal metszéspontjáról belátható a fenti negyedelés. $\Rightarrow$ A súlyvonalak egy pontban metszik egymást. Ezt a pontot a tetraéder súlypontjának nevezzük.
1783. Tekintsük az 1782. ábrát. Az 1782. feladatban láttuk, hogy $S_AS_D \parallel DA$ és az $S_AS_DS\triangle$ középpontosan hasonló az $ADS\triangle$-höz az S pontra vonatkozóan $\lambda_S = -\dfrac{1}{3}$ aránnyal. Igaz továbbá, hogy $S_AS_DE\triangle$ középpontosan hasonló a $DAE\triangle$-höz az E pontra vonatkozóan $\lambda_E = \dfrac{1}{3}$ aránnyal. EF súlyvonal az $AED\triangle$-ben; $EF \cap S_AS_D = G$; F képe G az E középpontú hasonlóságban $\Rightarrow EG$ súlyvonal az $S_AS_DE\triangle$-ben $\Rightarrow G$ felezi S_AS_D-t. SG súlyvonal az S_AS_DS-ben; SF súlyvonal az $ADS\triangle$-ben. Mivel S_AS_D képe AD az S középpontú hasonlóságban $\Rightarrow SG$ képe SF ugyanabban a hasonlóságban. A középponton átmenő egyenes invariáns, így F, S, G és E egy egyenesen vannak $\Rightarrow FE$ átmegy S-en. Az E középpontú hasonlóság miatt $GE = \dfrac{1}{3}FE$;

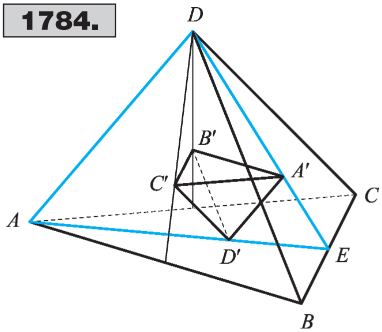
1782.



II

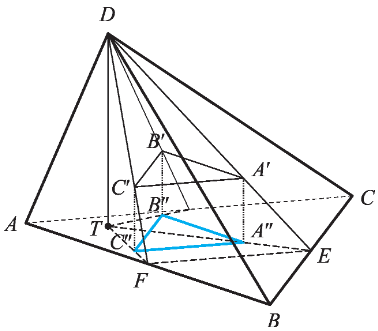
az S középpontú hasonlóság miatt $FS = \frac{3}{4}FG$. $FS =$
$= \frac{3}{4}(FE - GE) = \frac{3}{4}\left(FE - \frac{1}{3}FE\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}FE = \frac{1}{2}FE.$
Tehát S felezi FE-t.

1784.



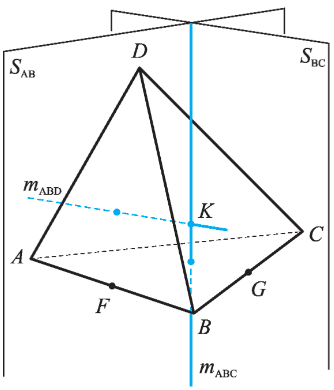
1784. Az 1782. feladatban láttuk, hogy $A'D'E\triangle \sim$ $\sim DAE\triangle$, $\lambda = \frac{1}{3}$ a hasonlóság aránya, E a hasonlóság középpontja $\Rightarrow A'D' \parallel DA$ és $A'D' = \frac{1}{3}DA$. Hasonlóan belátható ez a többi élpárra is. A két tetraéder élei páronként párhuzamosak. A súlypontok által meghatározott tetraéder éle harmada az eredeti tetraéder élének.

1785.



1785. Az 1784. feladatban láttuk, hogy $C'A' = \frac{1}{3}AC$ és $C'A' \parallel AC \Rightarrow C'A' \parallel [ABC] \Rightarrow C''A'' \parallel AC$ és $C''A'' = C'A' =$ $= \frac{1}{3}AC$. Hasonlóan belátható, hogy $A''B'' \parallel AB$ és $A''B'' =$ $= \frac{1}{3}AB$, valamint $B''C'' \parallel BC$ és $B''C'' = \frac{1}{3}BC$.

1786.



1786. Legyen S_{AB} az AB él felező merőleges síkja. Bármely $P \in S_{AB}$ esetén $PA = PB$. Legyen S_{BC} az BC él felező merőleges síkja. Bármely $Q \in S_{BC}$ esetén $QB = QC$. S_{BC} nem párhuzamos S_{AB}-vel, mert AB sem párhuzamos BC-vel $\Rightarrow S_{AB} \cap S_{BC} = \mathrm{m}_{ABC}$ létezik, és merőleges $[ABC]$-re. Bármely $R \in m_{ABC}$ esetén $RA = RB = RC$, mert R benne van mindkét felező merőleges síkban. Legyen S_{AD} az AD él felező merőleges síkja. Bármely $T \in S_{AD}$ esetén $TA =$ $= TD$. S_{AD} nem párhuzamos m_{ABC}-vel, mert m_{ABC} merőleges az $[ABC]$ síkra, de S_{AD} nem merőleges rá. Legyen $S_{AD} \cap m_{ABC} = K$. $K \in m_{ABC} \Rightarrow KA = KB = KC$; $K \in S_{AD} \Rightarrow$ $\Rightarrow KA = KD$. A két állításból $\Rightarrow KD = KC \Rightarrow K \in S_{DC}$, tehát a negyedik él felező merőleges síkja is átmegy K-n. $KA = KB = KC = KD$ miatt a K középpontú, KA sugarú gömb az $ABCD$ tetraéder köré írható gömb.

1787. Legyen $S_1 = [ABD]$, $S_2 = [BCD]$, $S_3 = [ACD]$, $S_4 = [ABC]$. S_1 és S_2 lapszögének szögfelező síkja Σ_{12}. Bármely $P \in \Sigma_{12}$ esetén $\mathrm{d}(P;\ S_1) = \mathrm{d}(P;\ S_2)$. S_1 és S_3 lapszögének szögfelező síkja Σ_{13}. Bármely $Q \in \Sigma_{13}$ esetén $\mathrm{d}(Q;\ S_1) = \mathrm{d}(Q;\ S_3)$. Legyen $\Sigma_{12} \cap \Sigma_{13} = e$ ($D \in e$, mert $D \in S_1$, $D \in S_2$). Bármely $R \in e$ esetén $\mathrm{d}(R;\ S_1) = \mathrm{d}(R;\ S_2)$, mert $R \in \Sigma_{12}$. $\mathrm{d}(R;\ S_1) = \mathrm{d}(R;\ S_3)$, mert $R \in \Sigma_{13}$. A két állításból $\Rightarrow \mathrm{d}(R;\ S_2) = \mathrm{d}(R;\ S_3) \Rightarrow R$ rajta van az S_2 és S_3 síkok lapszögének szögfelező síkján, Σ_{23} síkon. $D \in \Sigma_{23}$ és $R \in \Sigma_{23}$ miatt $e = \Sigma_{12} \cap \Sigma_{13} \cap \Sigma_{23}$. Legyen Σ_{24} az S_2 és S_4 síkok lapszögének szögfelező síkja. e nem párhuzamos a Σ_{24} síkkal, mert akkor a tetraéder által körülzárt térrész nem tartalmazhatná mindkettőt $\Rightarrow e \cap \Sigma_{24} = O$ létezik. $O \in e$ miatt $\mathrm{d}(O; S_1) = \mathrm{d}(O; S_2) = \mathrm{d}(O; S_3)$; $O \in \Sigma_{24}$ miatt $\mathrm{d}(O; S_2) = \mathrm{d}(O; S_4)$. A két állításból $\Rightarrow \mathrm{d}(O; S_1) = \mathrm{d}(O; S_4) \Rightarrow O \in \Sigma_{14}$. Hasonlóan belátható, hogy $O \in \Sigma_{34}$, tehát a belső szögfelező síkok egy pontban metszik egymást. Ez az O pont egyenlő távol van a tetraéder lapsíkjaitól $\Rightarrow O$ köré $\mathrm{d}(O; S_i)$ sugarú gömb írható, ami érinti a lapsíkokat.