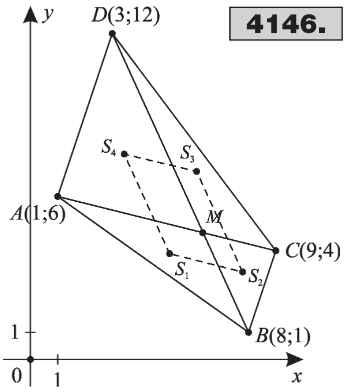
Vegyes feladatok



4146.

4146. Legyen az átlók metszéspontja $M(m_1;\, m_2)$. Ekkor $S_1\left(\frac{9+m_1}{3};\, \frac{7+m_2}{3}\right)$;

$S_2\left(\frac{17+m_1}{3};\, \frac{5+m_2}{3}\right)$; $S_3\left(\frac{12+m_1}{3};\, \frac{16+m_2}{3}\right)$;

$S_4\left(\frac{4+m_1}{3};\, \frac{18+m_2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{S_1S_2}\left(\frac{17+m_1}{3}-\frac{9+m_1}{3};\, \frac{5+m_2}{3}-\frac{7+m_2}{3}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{S_1S_2}\left(\frac{8}{3};\, -\frac{2}{3}\right)$. $\overrightarrow{S_4S_3}\left(\frac{8}{3};\, -\frac{2}{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{S_1S_2} \,\#\, \overrightarrow{S_4S_3}$.

4147. e: $x+2y=4$, $g\perp e$, g: $2x-y=3$. $e\cap g=T$; $T(2;\, 1)$.
$2=\frac{5+x_1}{2}$, $1=\frac{7+x_2}{2}\Rightarrow M'(-1;\, -5)$.

4148. $3x+y=-9$.

4149. $\mathbf{n}(12;5)$, az egyenes egyenlete: $12x+5y=32$. A tengelyeket az $A\left(\frac{8}{3};\, 0\right)$, $B\left(0;\, \frac{32}{5}\right)$ pontokban metszi. AB felezőpontja: $F\left(\frac{4}{3};\, \frac{16}{5}\right)$ a köré írt kör középpontja. $S\left(\frac{8}{9};\, \frac{32}{15}\right)$.
$|AO|=\frac{8}{3}$; $|AB|=\frac{104}{15}$; $AO:AB=5:13$ Az A-ból induló szögfelező 5 : 13 arányban osztja az OB oldalt, így $OT:TB=5:13\Rightarrow T\left(0;\, \frac{16}{9}\right)$. f_α: $A\left(\frac{8}{3};\, 0\right)$, $T\left(0;\, \frac{16}{9}\right)\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=\frac{16}{3} \\ f_\gamma: y=x \end{array}\right\}\Rightarrow$
$\Rightarrow O\left(\frac{16}{15};\, \frac{16}{15}\right)$.

4150. $5x+3y=5$.

4151. $M(m;\, 0)$, $\overrightarrow{AM}(m+4;\, -4)$, $\overrightarrow{BM}(m-2;\, 4)$, $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=$
$=(m+4)(m-2)-16=0\Rightarrow M_1(4;\, 0)$, $M_2(-6;\, 0)$.

4152. $M(-1;\, 0)$.

4153. $\overrightarrow{AM}\perp BC$, BC: $x+3y=31$; $\overrightarrow{BM}\perp AC$, AC: $x+5y=7$; $AC\cap BC=C$;
$C(67;\, -12)$.

4154. *a)* $AB=2$, $AC=2\sqrt{5}$; $BC=4$. *b)* $A_1(4;\, 4)$, $B_1(4;\, 3)$, $C_1(2;\, 3)$. *c)* $S\left(\frac{10}{3};\, \frac{10}{3}\right)$;
d) $r=\sqrt{5}$.

4155. *a)* CA: $y=x+1$, DB: $7x+5y=3$, $CA\cap DB=M$; $M\left(-\frac{1}{6};\, \frac{5}{6}\right)$.
b) $\omega=80{,}5°$. *c)* $t=42$ területegység. $k=4\sqrt{13}+\sqrt{10}+\sqrt{122}$.

4156. *a)* $\left.\begin{matrix} 5x-3y=1 \\ 15x-y=67 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(5;\ 8);\quad \left.\begin{matrix} 5x-3y=1 \\ 5x+y=13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B(2;\ 3);\quad \left.\begin{matrix} 15x-y=67 \\ 5x+y=13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(4;\ -7).$

b) $AB=\sqrt{34},\ BC=\sqrt{104},\ AC=\sqrt{226}.\ \overrightarrow{AB}(-3;\ -5),\ \overrightarrow{AC}(-1;\ -15),\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$
$=3+75=78;\ \sqrt{34}\cdot\sqrt{226}\cdot\cos\alpha=78 \Rightarrow \alpha=27{,}15°;\ \beta=137{,}73°;\ \gamma=15{,}12°.$

c) $t=\dfrac{\sqrt{34}\cdot\sqrt{226}\cdot\sin 27{,}15°}{2}=20$ területegység.

4157. $A(0;\ 0);\quad B(9;\ 0).\ C(2;\ 4);\quad t=\dfrac{9\cdot 4}{2}=18$ területegység; $\alpha=63{,}43°;$
$\beta=29{,}74°;\ \gamma=86{,}83°.$

4158. $A(3;0),\ B(0;9),\ C(18;0),\ D(0;-6).\ AD\colon 2x-y=6;\ \ BC\colon\ x+2y=18.$
$AD\cap BC\colon \left.\begin{matrix} 2x-y=6 \\ x+2y=18 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M(6;\ 6)$, ami kielégíti az $x-y=0$ egyenletű egyenest.

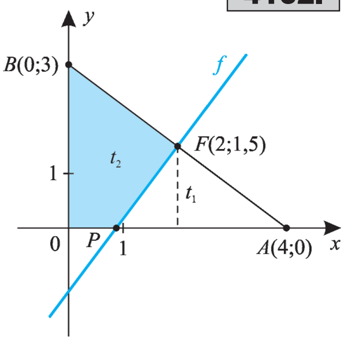
4159. Az adott befogóra a P_2 pont illeszkedik. A P_1-ből az $y=-x+8$ egyenletű egyenesre állított merőleges talppontja adja a keresett csúcsot. $P_3(2;\ 6)$.

4160. $M(4;\ 1)$.

4161. Az azonos t-hez tartozó egyenesek metszéspontja a $2x+3y=5x-7y \Rightarrow 3x-10y=0$ egyenletű egyenesen vannak. Az egyenes minden pontja és csakis ezek a pontok tartoznak a mértani helyhez.

4162. $A(4;0),\ B(0;3),\ F\left(2;\ \dfrac{3}{2}\right),\quad f\colon -4x+3y=-\dfrac{7}{2},$
$P\left(\dfrac{7}{8};\ 0\right);\quad t_{OAB}=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6;\quad t_1=\dfrac{1}{2}\left(4-\dfrac{7}{8}\right)\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{75}{32};$
$t_2=6-\dfrac{75}{32}=\dfrac{117}{32}.$

4162.



4163. $A(2;\ 5);\quad B(5;\ 1).\ \ AC\colon\ x-y=1;$
$BC\colon\ 2x-5y=5;\quad AC\cap BC=C;\quad C(0;\ -1).$

4164. $A(0;10),\ B(8;0),\ C(x;14),$
$x>0;\quad t=\dfrac{1}{2}\left|0+8(14-10)+x(10-0)\right|=$
$=\dfrac{1}{2}\left|32+10x\right|=\left|16+5x\right|,\ \left|16+5x\right|=36 \Rightarrow x=4.$

4165. $A(4;\ 3);\quad B(10;\ 6),\ \ C(6;\ 12);\quad D(2;\ 5).\ \overrightarrow{AC}(2;\ 9);\ \overrightarrow{DB}(8;\ 1);\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=25;$
$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{85};\quad \left|\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{65};\quad 25=\sqrt{85}\cdot\sqrt{65}\cdot\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{17\cdot 13}}.$

$\sin\varphi=\sqrt{1-\dfrac{25}{17\cdot 13}}=\dfrac{14}{\sqrt{17\cdot 13}};\quad t=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{85}\cdot\sqrt{65}\cdot\dfrac{14}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{13}}=35$ területegység.

4166. $t=\dfrac{1}{2}\left|1\cdot(4-6)+0\cdot(6-0)+c(0-4)\right|=\dfrac{1}{2}\left|-2-4c\right|=\left|1+2c\right|,\ \ \left|1+2c\right|=13 \Rightarrow$
$\Rightarrow c_1=6,\ c_2=-7.$

4167. *a)* $A(-9;-6)$, $B(10;-7)$, $C(6;8)$. $\overrightarrow{AB}(19;-1)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{362}$, $\overrightarrow{AC}(15;14)$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{421}$, $\overrightarrow{BC}(-14;15)$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{241}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=15\cdot 19-14=271$;
$271=\sqrt{421}\cdot\sqrt{362}\cdot\cos\alpha \Rightarrow \alpha=46°$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}==4\cdot 15+15\cdot 14=150$;
$150=\sqrt{421}\cdot\sqrt{241}\cdot\cos\gamma \Rightarrow \gamma=62°$, $\beta=72°$. *b)* $\mathbf{a}(-9;-6)$, $\mathbf{b}(10;-7)$, $\mathbf{c}(6;8)$;
$|\mathbf{a}|=\sqrt{117}$; $|\mathbf{b}|=\sqrt{149}$; $|\mathbf{c}|=10$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-48=\sqrt{117}\cdot\sqrt{149}\cdot\cos(\mathbf{a};\mathbf{b})\Rightarrow$
$\Rightarrow(\mathbf{a};\mathbf{b})\sphericalangle=111{,}3°$; $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=4=\sqrt{149}\cdot 10\cdot\cos(\mathbf{b};\mathbf{c})\Rightarrow(\mathbf{b};\mathbf{c})\sphericalangle=88{,}1°$;
$(\mathbf{a};\mathbf{c})\sphericalangle=360°-(111{,}3°+88{,}1°)=160{,}6°$.

4168. 20 területegység.

4169. $4x-5y=11$.

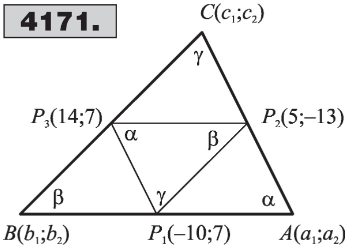
4170. $A(a;0)$, $B(0;b)$, $F\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$, $\mathbf{n}(-a;b)$. Az AB felezőmerőlegese:
$f:-ax+by=\frac{b^2-a^2}{2}$. Legyen $d\neq 0$ és $A'(a+d;0)$, $B'(0;b+d)$. $\overrightarrow{A'B'}[-(a+d);b+d]$, $F'\left(\frac{a+d}{2};\frac{b+d}{2}\right)$; $A'B'$ felezőmerőlegese: $-(a+d)x+(b+d)y=\frac{(b+d)^2-(a+d)^2}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}-(a+d)x+(b+d)y&=\frac{b^2-a^2}{2}+(b-a)d\\ ax-by&=-\frac{b^2-a^2}{2}\end{aligned}\right\}+\Rightarrow -dx+dy=(b-a)d\,/:d\Rightarrow -x+y=$$

$=b-a$. Az $y=x+b-a$ kifejezést visszahelyettesítve f egyenletébe: $P\left(\frac{a-b}{2};\frac{b-a}{2}\right)$, ami d-től független.

4171. *a)* P_4-re három megoldást kapunk: $A(-19;-13)$, $B(-1;27)$, $C(29;-13)$. Mindhárom paralelogramma területe egyenlő a $P_1P_2P_3$ háromszög területének kétszeresével.
$t=2\cdot\frac{P_1P_2\cdot m_{P_3}}{2}=24\cdot 20=480$ területegység. $P_1P_2=25$, $P_2P_3=\sqrt{481}$, $P_1P_3=24$.
$k_1=2(P_1P_3+P_2P_3)=2\left(24+\sqrt{481}\right)$, $k_2=2(P_1P_2+P_2P_3)=2\left(25+\sqrt{481}\right)$,
$k_3=2(P_1P_2+P_1P_3)=98$. *b)* Egy-egy paralelogramma szöge egyenlő a $P_1P_2P_3$ háromszög valamelyik szögével. Az $AP_1P_3P_2$ paralelogrammában: $\overrightarrow{P_3P_2}(-9;-20)$, $\overrightarrow{P_3P_1}(-24;0)$.

4171.



$-24\cdot(-9)=24\sqrt{481}\cdot\cos\alpha\Rightarrow\alpha=65{,}8°$,
P_2 szög $=180°-65{,}8°=114{,}2°$. A $BP_1P_2P_3$ paralelogrammában: $9(-15)+20\cdot 20=25\sqrt{481}\cdot\cos\beta\Rightarrow\beta=61{,}1°$, illetve $118{,}9°$. $CP_3P_1P_2$ paralelogrammában: $\gamma=53{,}1°$, illetve $126{,}9°$.

4172. *I. megoldás:* AC felezőpontja: $K(2;1)$, $\overrightarrow{KA}(4;-5)$, $2\cdot\overrightarrow{KA}(8;-10)$, $\overrightarrow{KB}(10;8)$, $\overrightarrow{KD}(-10;-8)$. $\mathbf{b}=\mathbf{k}+\overrightarrow{KB}\Rightarrow$
$\Rightarrow\mathbf{b}(12;9)$, $B(12;9)$, $\mathbf{d}=\mathbf{k}+\overrightarrow{KD}\Rightarrow D(-8;-7)$.

II. megoldás: $K(2;1)$, $AC=\sqrt{164} \Rightarrow\Rightarrow KB=\sqrt{164}$. A keresett B, illetve D pontok rajta vannak AC felezőmerőlegesén, K-tól pedig $\sqrt{164}$ egység távolságra vannak.

Így az $\left.\begin{matrix}(x-2)^2+(y-1)^2=164\\ 4x-5y=3\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják a keresett csúcsokat.

4173. $AB\cap AD=A$; $\left.\begin{matrix}y=1\\ \underline{4x-3y=1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A(1;1)$, $AB\cap BD=B$; $\left.\begin{matrix}y=1\\ \underline{2x+y=13}\end{matrix}\right\}\Rightarrow B(6;1)$,

$AD\cap BD=D$; $\left.\begin{matrix}4x-3y=1\\ \underline{2x+y=13}\end{matrix}\right\}\Rightarrow D(4;5)$. AC felezőpontja azonos BD felezőpontjával

$\dfrac{c_1+1}{2}=\dfrac{6+4}{2}$, $\dfrac{c_2+1}{2}=\dfrac{1+5}{2}\Rightarrow C(9;5)$.

V

4174. $\left.\begin{matrix}ax+by=1\,/\cdot a\neq 0\\ \underline{bx+ay=1\,/\cdot b\neq 0}\end{matrix}\right\}-\Rightarrow \left(a^2-b^2\right)x=a-b\Rightarrow x=\dfrac{1}{a+b}$, $y=\dfrac{1}{a+b}$.

Az $M\left(\dfrac{1}{a+b};\dfrac{1}{a+b}\right)$ pont koordinátái kielégítik az $x-y=0$ egyenletű egyenest.

Ha $a=0$, $b\neq 0$, akkor $\left.\begin{matrix}by=1\\ \underline{bx=1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow M_1\left(\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{b}\right)$. Ha $a\neq 0$, $b=0$, akkor $\left.\begin{matrix}ay=1\\ \underline{ax=1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow M_2\left(\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{a}\right)$, ekkor M_1, illetve M_2 is kielégítik a harmadik egyenletet. $a=b=0$ nem lehetséges.

4175. Helyezzük el a háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a csúcspontjainak koordinátái: $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(c;d)$ legyen $(a\neq 0,\ d\neq 0)$. Ekkor az oldalak felezőpontjai: $A_1\left(\dfrac{a+c}{2};\dfrac{d}{2}\right)$, $B_1\left(\dfrac{c-ac}{2};\dfrac{d}{2}\right)$, $C_1(0;0)$. Az ABC háromszög súlypontja $S\left(\dfrac{c}{3};\dfrac{d}{3}\right)$, az $A_1B_1C_1$ háromszög súlypontja $S_1\left(\dfrac{c}{3};\dfrac{d}{3}\right)$. Valóban $S\equiv S_1$.

4176. Legyen $A(a;0)$, $B(b;0)$, $C(0;c)$ $(a\neq b,\ c\neq 0)$. Innen $S\left(\dfrac{a+b}{3};\dfrac{c}{3}\right)$.

$AB^2+BC^2+CA^2=a^2-2ab+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2=2a^2+2b^2+2c^2-2ab$.

$$3\left(AS^2+BS^2+CS^2\right)=3\cdot\left[\left(\frac{b-2a}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{a-2b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2+\left(\frac{a+b}{3}\right)^2+\left(\frac{2c}{3}\right)^2\right]=$$

$$=3\cdot\frac{6a^2+6b^2+6c^2-6ab}{9}=2a^2+2b^2+2c^2-2ab.$$

4177. e: $3x+4y=16$, f: $3x+4y=1$, $P(5;3)$. Az E pont az e egyenes tetszőleges pontja $E(0;4)$. F az f egyenesen: $F_1\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$, illetve $F_2(-1;1)$. A keresett egyenes irányvektora: $\overrightarrow{EF_1}$, illetve $\overrightarrow{EF_2}$. $\overrightarrow{EF_1}\left(1;-\dfrac{9}{2}\right)\Rightarrow \mathbf{n}(9;2)\ \Rightarrow 9x+2y=51$; $\overrightarrow{EF_2}(-1;-3)\Rightarrow \mathbf{n}(3;-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-y=12$.

4178. $P_1(-1;4)$; $P_2(3;2)$.

4179. A feladat feltételeinek két egyenes tesz eleget: e_1 átmegy A-n és párhuzamos PQ-val, e_2 átmegy A-n és PQ felezőpontján. e_1: $x+2y=15$, e_2: $3x+y=15$.

4180. $PM:MQ=3:2\Rightarrow m_1=\dfrac{2\cdot(-5)+3\cdot5}{5}=1;\quad m_2=\dfrac{2\cdot4+3\cdot1}{5}=\dfrac{11}{5}$. $M\left(1;\ \dfrac{11}{5}\right)$.

$PN:NQ=2:3\Rightarrow N\left(-1;\ \dfrac{14}{5}\right)$. $\overrightarrow{MA}\left(3;\ \dfrac{24}{5}\right)\Rightarrow \mathbf{n}(8;-5)$, MA: $8x-5y+3=0$. $\overrightarrow{NA}\left(5;\ \dfrac{21}{5}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{n}(21;-25)$, NA: $21x-25y+87=0$.

4181. $3x^2-4y^2+4xy+8x-8y-3=0$, $3x^2-4y^2+6xy-2xy+9x-x-6y-2y-3=0$,

$x(3x-2y-1)+2y(3x-2y-1)+3(3x-2y-1)=(3x-2y-1)(x+2y+3)=0$.

A ponthalmaz két egyenes. A $3x-2y-1=0$ és az $x+2y+3=0$ egyenletű egyenesek minden pontja és csak ezek a pontok felelnek meg.

V

4182. $\overrightarrow{AB}(30;\ 10)\Rightarrow \mathbf{v}(3;1)$, $\mathbf{n}(1;-3)$, AB: $x-3y=0\Rightarrow T(9;\ 3)$, m_c: $3x+y=30$. A C csúcsot m_c metszi ki az AB Thalész köréből. $K(0;0)$, $r=15\Rightarrow x^2+y^2=225$.

$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=225\\ 3x+y=30\end{array}\right\}\Rightarrow y=30-3x,\ x^2+(30-3x)^2=225\Rightarrow x^2-18x+65=0.\ C_1(13;\ -9),\ C_2(5;\ 15).$

4183. Tükrözzük az A pontot az e egyenesre. A kapott A_1 pontot B-vel összekötve, kimetszi e-ből a keresett P pontot. $T(-2;\ 0)$. A-t T-re tükrözve: $A_1(2;\ -10)$. $\overrightarrow{A_1B}(2;\ 24)\Rightarrow P(3;\ 2)$.

4184. AB: $y=\dfrac{1}{4}x$, e: $y=mx-1$, ahol $m>\dfrac{1}{4}$. Az x tengely $\cap$-e: M; $\left.\begin{array}{l} y=mx-1\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{m};\ 0\right)$; $\quad AB\cap e=N$; $\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{4}x\\ y=mx-1\end{array}\right\}\Rightarrow N\left(\dfrac{4}{4m-1};\ \dfrac{1}{4m-1}\right)$. $\qquad t_{ABC}=\dfrac{4\cdot1}{2}=2$.

$t_{AMN}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{4m-1}=1\Rightarrow 8m^2-2m-1=0\Rightarrow m_1=\dfrac{1}{2}$, $m_2=-\dfrac{1}{4}$, az utóbbi nem megoldás. Az egyenes egyenlete: $x-2y=2$.

4185. *a)* $t_1=\dfrac{1{,}5+0{,}5}{2}\cdot2=2$ területegység; *b)* $t_2=\dfrac{3+1{,}5}{2}\cdot2=4{,}5$ területegység.

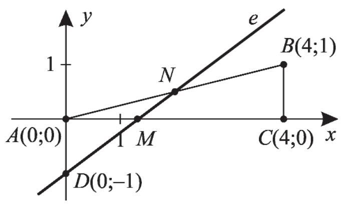
4186. *I. megoldás:* $\mathbf{a}(-2;-2)$, $\mathbf{b}(4;2)$; $\quad\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}\,(6;\ 4)$, $\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ $+90°$-os, illetve $-90°$-os elforgatottja. $\overrightarrow{BC_1}=(-6;\ 9)$, $\overrightarrow{BC_2}=(6;\ -9)$. $\mathbf{c}_1=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_1}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_2}\Rightarrow$

$\Rightarrow C_1(-2;\ 11)$, $C_2(8;\ -7)$. $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{BC_2}=\overrightarrow{AD_2}$, $\mathbf{d}_1=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD_1}$, $\mathbf{d}_2=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD_2}\Rightarrow$

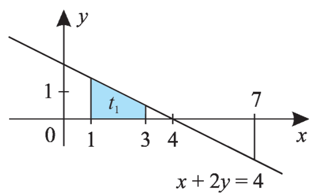
$\Rightarrow D_1(-8;\ 7)$, $D_2(4;\ -11)$.

II. megoldás: $AB=2\sqrt{13}$, $BC=3\sqrt{13}$. $BC\perp AB\Rightarrow BC$ egyenlete: $3x+2y=16$,

4184.



4185.



$(x-4)^2+(y-2)^2=9\cdot 13$. A kapott egyenletrendszert megoldva kapjuk a C_1, illetve C_2 pontot. B-t AC felezőpontjára tükrözve kapjuk D-t.

4187. *a)* $\left.\begin{array}{r} e\colon 4x+7y=15\,/\cdot 2 \\ \underline{f\colon 9x-14y=4} \end{array}\right\} + \Rightarrow M(2;\ 1);\quad -x+3y=1.$

b) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. $g\colon bx+ay=ab$. Mivel $M\in g\Rightarrow 2b+a=ab$, $t=4=\dfrac{ab}{2}\Rightarrow ab=8$;

$2b+a=8$, $a=8-2b$. $b(8-2b)=8\Rightarrow (b-2)^2=0\Rightarrow b=2$, $a=4$. $g\colon x+2y=4$.

c) $\mathbf{v}_1(7;\ -4)$, $\mathbf{v}_2(14;\ 9)$, $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=62=\sqrt{65}\cdot\sqrt{277}\cdot\cos(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\Rightarrow(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\sphericalangle=62{,}48°$.

4188. $\overrightarrow{AB}(4;\ -3)$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\alpha=36{,}9°$, $\beta=90°-36{,}9°=53{,}1°$.

4189. Legyen A merőleges vetülete A_1, B merőleges vetülete B_1.

$\left.\begin{array}{l} e\colon x-y=0 \\ \underline{f\colon x+y=8} \end{array}\right\} + \Rightarrow A_1(4;\ 4);\quad \left.\begin{array}{l} e\colon x-y=0 \\ \underline{g\colon x+y=4} \end{array}\right\} + \Rightarrow B_1(2;\ 2).\ A_1B_1=2\sqrt{2}.$

4190. $A(-1;\ 0)$; $B(5;\ 6)$.

4191. Vezessen A-hoz az $\mathbf{a}(2;3)$, B-hez a $\mathbf{b}(6;6)$, helyvektor. Az $\overrightarrow{AB}(4;\ 3)$ + 90°-kal, illetve $-90°$-kal történő elforgatásával kapjuk $\overrightarrow{AD_1}$-et, illetve $\overrightarrow{AD_2}$-t. $\overrightarrow{AD_1}(-3;\ 4)$, $\overrightarrow{AD_2}(3;\ -4)$. $\mathbf{d}_1=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD_1}$, $\mathbf{d}_2=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD_2}\Rightarrow D_1(-1;\ 7)$, $D_2(5;\ -1)$. $\overrightarrow{BC_2}=\overrightarrow{AD_2}$, $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_1}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_2}\Rightarrow C_1(3;\ 10)$, $C_2(7;\ 2)$.

4192. $2\cdot AS=1\cdot SB\Rightarrow AS:SB=1:2\Rightarrow S(5;\ 1)$.

4193. $AB=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $t=10=\dfrac{AB\cdot m_c}{2}\Rightarrow m_c=\dfrac{20}{5\sqrt{2}}$. $C(c;\ 0)$. $\overrightarrow{AB}(7;\ -1)\Rightarrow\mathbf{n}(1;7)$,

$AB\colon x+7y=12\Rightarrow\dfrac{x+7y-12}{5\sqrt{2}}=0$. $\dfrac{|c-12|}{5\sqrt{2}}=\dfrac{20}{5\sqrt{5}}\Rightarrow|c-12|=20$, $c_1=32$, $c_2=-8$.

$C_1(32;\ 0)$, $C_2(-8;\ 0)$.

4194. $\mathbf{p}(2;\ 4)$, $\mathbf{p}_1(-3;\ 0)$, $\mathbf{o}_1=(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)$, $O_1(5;\ 4)$.

4195. $CD\colon x+2y=17$, $BC\colon 2x+y=5$.

4196. Legyen a $P(2;-2)$ ponton áthaladó egyenesek egy normálvektora $\mathbf{n}(1;n)$. Ekkor:

$x+ny=2-2n\Rightarrow\dfrac{x+ny+2n-2}{\sqrt{1+n^2}}=0$, $\dfrac{|5+2n+2n-2|}{\sqrt{1+n^2}}=3\Rightarrow|4n+3|=3\sqrt{1+n^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 7n^2+24n=0$, $n=0$ vagy $n=-\dfrac{24}{7}$. $\mathbf{n}(1;0)$, $P(2;\ -2)\Rightarrow x=2$; $\mathbf{n}(7;-24)$, $P(2;\ -2)\Rightarrow$

$\Rightarrow 7x-24y=62$.

4197. Legyen $e_1\colon x+2y=1$, $e_2\colon x+2y=3$. $P\in e_1\Rightarrow P(-1;\ 1)$, $Q\in e_2\Rightarrow Q(-1;\ 2)$.

$PR:RQ=1:3\Rightarrow R\left(-1;\ \dfrac{5}{4}\right)$. A keresett egyenes átmegy az R ponton és párhuzamos az adott egyenesekkel: $2x+4y=3$.

4198. $\left.\begin{array}{r} e\colon x+y=1 \\ \underline{f\colon y=-1} \end{array}\right\} + \Rightarrow A(2;\ -1).\ AS:SA_1=2:1\Rightarrow A_1\left(-\dfrac{5}{2};\ \dfrac{1}{2}\right).$

Legyen $B \in f \Rightarrow B(b;\,-1)$, $C \in e \Rightarrow C(c;\,1-c)$. BC felezőpontja: A_1: $\dfrac{b+c}{2} = -\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{-1+1-c}{2} = \dfrac{1}{2}$. Innen: $B(-4;-1)$, $C(-1;2)$. $\overrightarrow{BC}(3;\,3) \Rightarrow \mathbf{n}(1;-1)$, BC: $x-y=-3$.

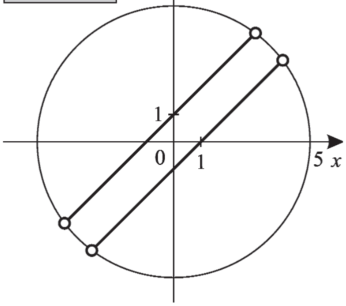
4199. e: $y=x+1$, f: $y=x-2$, $P_1(0;\,1)\in e$, $P_2(0;\,-2)\in f$, $Q_1(-1;\,0)\in e$, $Q_2(2;\,0)\in f$. $P_1P_2 = Q_1Q_2 = 3$, ezért a keresett egyenesek: $x=0$, illetve $y=0$.

4200. Legyen $A(1;2)$, $B(-1;-1)$, f: $2x+y=1$. Az A pontot f-re tükrözve az A_1 pont a BC oldalegyenesre illeszkedik. A BC és az f egyenesek metszéspontja adja a keresett C csúcsot. $C\left(-\dfrac{13}{5};\,\dfrac{31}{5}\right)$.

4201. $A(1;1)\in f_\alpha$: $2x-y=1$. Tükrözzük a B pontot az f_α egyenesre $\Rightarrow B_1 \in AC$. $g \perp f_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{n}_g(1;\,2)$, g: $x+2y=13$. $f_\alpha \cap g = T$; $\left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ \underline{x+2y=13} \end{array}\right\} \Rightarrow T(3;\,5)$. Tükrözzük B-t a T-re, $B_1(1;\,6)$. Így: $AC = AB_1$: $x=1$, AB: $3x-4y=-1$. $C\in AC \Rightarrow C(1;\,c)$. $t_{ABC} = \dfrac{AC\cdot m_b}{2} = \dfrac{|c-1|\cdot 4}{2} = 5 \Rightarrow |c-1| = \dfrac{5}{2}$. $c_1 = \dfrac{7}{2}$, $c_2 = -\dfrac{3}{2}$, ami nem megoldás; $C\left(1;\,\dfrac{7}{2}\right)$. Innen BC egyenlete: $x-8y=-27$.

4202. $B(6;4)$, $e=BC$, $AC\perp BC$, ezért AC: $x-y=-4$. $AC\cap BC = C$; $C(3;\,7)$. $AB = 2\sqrt{17}$, $AC = 5\sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$; $\dfrac{AC\cdot BC}{2} = \dfrac{AB\cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = \dfrac{15}{\sqrt{17}}$.

4203.



4203. $\dfrac{(x-y)^2-1}{\sqrt{25-x^2-y^2}} = 0 \Rightarrow \dfrac{(x-y-1)(x-y+1)}{\sqrt{25-x^2-y^2}} = 0.$

4204. A bal oldali kifejezés átalakítva. $3x^2-(8y+5)x-$ $-(3y^2-5y-2)=0$. Az egyenlet gyöktényezős alakban. $(x-3y-1)(3x+y-2)=0$. A keresett pontok a két egyenes pontjainak uniója. Mindkét egyenes két-két különböző pontban metszi a koordinátatengelyeket: $P_1\left(\dfrac{2}{3};\,0\right)$, $P_2\left(0;\,-\dfrac{1}{3}\right)$, $P_3(1;\,0)$, $P_4(0;\,2)$. A $P_2P_3P_4$ háromszög magasságpontja a $P_1\left(\dfrac{2}{3};\,0\right)$ pont.

4205. $y-1=m(x-2)$, mert az y tengellyel párhuzamos egyenesek nem elégítik ki a feltételt.

M_1; $\left.\begin{array}{l} y=mx-2m+1 \\ \underline{y=x+5} \end{array}\right\} \Rightarrow M_1\left(\dfrac{2m+4}{m-1};\,\dfrac{7m-1}{m-1}\right)$, $m\neq 1$;

M_2; $\left.\begin{array}{l} y=mx-2m+1 \\ \underline{y=x+2} \end{array}\right\} \Rightarrow M_2\left(\dfrac{2m-3}{m-1};\,\dfrac{1}{m-1}\right)$.

$M_1M_2^2 = \left(\dfrac{7}{m-1}\right)^2 + \left(\dfrac{7m}{m-1}\right)^2 = 25 \Rightarrow 12m^2+25m+12=0$. $m_1 = -\dfrac{3}{4}$, $m_2 = -\dfrac{4}{3}$. A keresett egyenesek: $3x+4y-10=0$, illetve $4x+3y-11=0$.

4206. $P_1(x_1;\ y_1)$, $P_2(x_2;\ y_2)$, $Q_1\left(3x_1;\ \frac{y_1}{3}\right)$, $Q_2\left(3x_2;\ \frac{y_2}{3}\right)$. $P_1P_2 = Q_1Q_2 \Rightarrow P_1P_2^2 = Q_1Q_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 9(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{9}(y_2 - y_1)^2$, $\frac{8}{9}(y_2 - y_1)^2 = 8(x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 = 9.$

$\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$. Azok a szakaszok elégítik ki a feladat feltételeit, amelyek meredeksége ± 3.

4207. Az $AEFG$ négyzet csúcsai: $A(0;0)$, $E(4;-4)$, $F(0;-8)$, $G(-4;-4)$. A BE egyenes egyenlete: $-x + 3y = -8$, a CF egyenes egyenlete: $-2x + y = -8$, a DG egyenes egyenlete: $3x + y = 8$. $BE \cap CF$: $P\left(\frac{16}{5};\ -\frac{8}{5}\right)$. $P \in DG$.

4208. A csúcspontok koordinátái: $A_1\left(-2\sqrt{3};\ 2\right)$, $B_1\left(3;\ -3\sqrt{3}\right)$, $C_1\left(3 + 2\sqrt{3};\ 2 + 3\sqrt{3}\right)$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 2\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$.

4209. Az ABC háromszög súlypontja: $S_1(5;\ 3;\ 0)$. A BCD háromszög súlypontja: $S_2\left(\frac{19}{3};\ \frac{13}{3};\ \frac{4}{3}\right)$. Az ACD háromszög súlypontja: $S_3\left(\frac{13}{3};\ \frac{11}{3};\ \frac{4}{3}\right)$. Az ABD háromszög súlypontja: $S_4\left(\frac{10}{3};\ 2;\ \frac{4}{3}\right)$. $DS_1^2 = (4-5)^2 + (4-3)^2 + 4^2 = 18$, $AS_2^2 = \frac{546}{9}$; $BS_3^2 = \frac{66}{9}$; $CS_4^2 = \frac{530}{9}$. Az élek hosszának négyzetei: $AB^2 = 40$, $BC^2 = 34$, $AC^2 = 130$, $AD^2 = 48$, $BD^2 = 24$, $CD^2 = 50$. Ekkor $\frac{1304}{9} : 326 = 4:9$.

4210. $C(1;5)$. Az AB egyenlete: $x + 3y = 30$. $AB \cap s_c = C_1(3;\ 9)$. A Thalész-kör középpontja: $C_1(3;9)$, a sugara: $r = CC_1 = \sqrt{20}$. Az A és a B csúcsok koordinátáit az

$\left.\begin{aligned}(x-3)^2 + (y-9)^2 &= 20\\ x + 3y &= 30\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják.

$A\left(3 + 3\sqrt{2};\ 9 - \sqrt{2}\right)$, $B\left(3 - 3\sqrt{2};\ 9 + \sqrt{2}\right)$.

4211. Kössük össze a paralelogramma belsejében vagy az oldalán elhelyezkedő, a csúcsoktól különböző rácspontot a paralelogramma csúcsaival. Ekkor négy vagy három háromszög keletkezik. A $t = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$ területképlet szerint, mivel a háromszögek csúcsainak koordinátái egész számok, $t \geq \frac{1}{2}$. Ebből már következik a feladat igaz állítása. $T \geq 4 \cdot \frac{1}{2}$, vagy $T \geq 3 \cdot \frac{1}{2}$, $T > 1$.

4212. AC-vel párhuzamos egyenes egyenlete $y = x$. $M(3;\ 3)$, $N\left(\frac{9}{2};\ \frac{9}{2}\right)$. $t_{ABC} = 6$ területegység, $t_{AMNC} = 4{,}5$ területegység.

4213. A négyszög csúcspontjai legyenek: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, $D(x_4;\ y_4)$. Ekkor az AB felezőpontja: $F_1\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, a BC oldal felezőpontja az F_2, a CD oldal felezőpontja F_3, a DA oldal felezőpontja F_4. Legyen az F_1F_3, felezőpontja P, az F_2F_4 felezőpontja Q.
$P\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$, $Q\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$. Innen látható, hogy $P\equiv Q$. Legyen az AC átló felezőpontja E, a BD átló felezőpontja G.
$E\left(\frac{x_1+x_3}{2};\ \frac{y_1+y_3}{2}\right)$, $G\left(\frac{x_2+x_4}{2};\ \frac{y_2+y_4}{2}\right)$. Könnyen igazolható, hogy az EG felezőpontja $M\equiv P\equiv Q$.
Megjegyzés: A tétel állítása igazolható úgy is, ha a csúcsok helyvektoraival, az **a**, **b**, **c**, **d** vektorokkal számolunk.

4214. A $P(x;y)$ pont koordinátáira felírhatjuk a következő egyenletet:
$(x-4)^2+y^2+20=x^2+(y-2)^2$. Innen $2x-y-8=0$. A mértani hely egyenes, amelynek minden pontja megfelel.

4215. A háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-6;0)$, $B(6;0)$, $C(u;\ -3u+5)$, A súlypont koordinátái: $S(x;\ y)$. Ekkor $x=\frac{u}{3}$, $y=\frac{5-3u}{3}$. Innen $y=\frac{5-9x}{3}$, a súlypont a $9x+3y=5$ egyenletű egyenesen mozog. Nem keletkezik háromszög, ha a C csúcs az x tengelyen van.
A $P\left(\frac{5}{9};\ 0\right)$ pont nem tartozik a mértani helyhez.

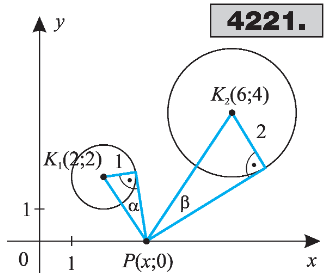
4216. Az AB egyenes egyenlete $3u+5v=30$. Az átfogó P pontjának koordinátái $\left(u;\ \frac{30-3u}{5}\right)$, ahol $0<u<10$. A téglalap K középpontjának koordinátái $x=\frac{u}{2}$, $y=\frac{30-3u}{10}$, ahol $0<u<5$. A mértani hely pontjainak koordinátái között az $y=\frac{30-3\cdot 2x}{10}$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $3x+5y=15$ összefüggés áll fenn. A mértani hely egyenes szakasz, a szakasz végpontjai nem tartoznak a ponthalmazhoz.

4217. A $K(u;\ v)$ középpont rajta van az $u-v=-2$ egyenesen, másrészt $r=|v|$ és $(u-7)^2+(v-2)^2=v^2$. Megoldás: $(x-3)^2+(y-5)^2=25$ és $(x-15)^2+(y-17)^2=289$.

4218. $(x-3)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

4219. $t\approx 30{,}2$ területegység.

4220. Helyezzük el az $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ csúcspontokkal adott háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a háromszög S súlypontja az origóban legyen. Ekkor $x_1+x_2+x_3=0$, $y_1+y_2+y_3=0$. A $P(x;\ y)$ pontra (1)
$PA^2+PB^2+PC^2=x_1^2+x_2^2+x_3^3+y_1^2+y_2^2+y_3^3+3\left(x^2+y^2\right)$, mert $x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$. Az (1) összeg akkor minimális, ha $x=y=0$, $P\equiv S$.



4221. A feladat szerint azt követeljük, hogy $\alpha = \beta$ legyen. Ekkor felírhatjuk a következő egyenlőséget:
$$\frac{1}{K_1P} = \frac{2}{K_2P} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2+4} = \frac{4}{(x-6)^2+16}.$$
Két megoldás van. $P_1\left(\frac{10}{3}; 0\right)$, $P_2(-2; 0)$.

4222. Az érintési pontok: $E_1(11; -9)$, $E_2(11; -25)$. Az adott kör középpontja: $K(17; -17)$. Az E_1 pontban érintő kör középpontja rajta van az E_1K egyenesen, amelynek egyenlete: $4x + 3y = 17$. Az érintő kör középpontja $K^*(u; v)$, a sugara $r = |v|$. Felírhatjuk a következő egyenleteket: $\left.\begin{aligned} 4u + 3v = 17 \\ (u-11)^2 + (v+9)^2 = v^2 \end{aligned}\right\}$. Két megoldás van: $(x-8)^2 + (y+5)^2 = 25$; $(x-38)^2 + (y+45)^2 = 2025$. Hasonló meggondolással kapjuk az $E_2(11; -25)$ pontban érintő kör egyenletét. Itt is két megoldás van:
$$(x+64)^2 + (y+125)^2 = 15\,625 \text{ és } \left(x - \frac{58}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{125}{9}\right)^2 = \left(\frac{125}{9}\right)^2.$$

4223. A keresett kör középpontja $K(u; v)$ ahol $v = 8$. A sugár $r = 12 - u$, $OK = 4 + r$, ahol O az origó. Ekkor $\sqrt{u^2 + 64} = 4 + 12 - u$. Innen $u = 6$. Megoldás: $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 36$.

4224. A húr F felezőpontját megkapjuk, ha a $K(4; -2)$ ponton átmenő és az adott egyenesre merőleges egyenes egyenletét felírjuk, azután a két egyenes közös pontját kiszámítjuk. $F\left(1; \frac{11}{2}\right)$.
$R^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + KF^2$. A kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = \frac{171}{2}$.

4225. Mivel $x^2 + y^2 = 1$, ezért $x^2 + xy + y^2 = 1 + xy$. Szükséges, hogy x és y azonos előjelű legyen. Ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor $xy \le \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2}$. $\left(\sqrt{xy} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\,!\right)$.
Tehát $x^2 + xy + y^2 \le \frac{3}{2}$. Egyenlőség akkor van, ha $x = y$; $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4226. A k_1 és k_2 körök metszik egymást, mert $CD = 10 < 2\sqrt{50}$. Az AB húr egyenesének egyenlete: $4x + 3y = 11$; $\overrightarrow{DC}(8; 6)$; $\frac{\overrightarrow{DC}}{2}(4; 3)$. Ebből következik, hogy $DC \perp AB$. Az $ADBC$ négyszög rombusz. $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2$; $AB = 10$ egység. $t_{ADBC} = 50$ területegység.

4227. $a = -3$. Az $x - 3y = 7$ egyenes érinti az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű kört, ha $r^2 = \frac{49}{10}$.

V