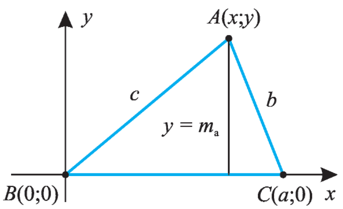
4050. Legyen a keresett kör középpontja O. Az O pont koordinátái: $(x; y)$. Ekkor felírhatjuk a következő egyenletet: $(x-3)^2+(y-2)^2=x^2$, mert a kör sugara $x>0$. Innen rendezéssel: $(y-2)^2=6\left(x-\frac{3}{2}\right)$. A mértani hely olyan parabola, amelynek tengelypontja a $C\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ pont, a tengelye párhuzamos az x tengellyel, fókuszának koordinátái: $F(3; 2)$ pont, a paramétere $p=3$. A parabola minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez.

4051. Az adott egyenletet átalakíthatjuk. $y=\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+1-\frac{b^2}{4}$. A csúcspont koordinátái: $C\left(\frac{b}{2}; 1-\frac{b^2}{4}\right)$. Innen $x=\frac{b}{2}$, $y=1-\frac{b^2}{4}$. Kiküszöbölve a b paramétert $y=1-x^2$. A csúcspontok b-től függően végigfutnak az $y=1-x^2$ egyenletű parabolán, amelynek minden pontja megfelel.

4052. Az adott egyenlet átalakítható. $y=4\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+2a-2$, ahol $a\in\mathbf{R}$. Innen leolvashatjuk a tengelypont koordinátáit: $x=\frac{a+1}{2}$, $y=2a-2$. Kiküszöbölve az a paramétert $a=2x-1$, $y=4x-4$. A mértani hely egyenes. Az egyenes minden pontja lehet egy-egy parabola csúcsa. Ugyanis, ha $x=\frac{a+1}{2}$, akkor $y=2a-2$. A $C\left(\frac{a+1}{2}; 2a-2\right)$ az adott egyenletű parabolák csúcsa.

4053. Helyezzük el az ABC háromszöget az ábrán látható módon koordináta-rendszerben. Ekkor (1) $y^2=c^2-b^2$, (2) $b^2=(x-a)^2+y^2$, (3) $c^2=x^2+y^2$. (1) egyenletből következik, hogy $c>b$ és legyen $a>0$. A felírt egyenletekből következik, hogy $y^2=2a\left(x-\frac{a}{2}\right)$, amely egyenlet szerint az A csúcs mértani helye parabola. A paramétere $p=a$, a tengelypontja $T\left(\frac{a}{2}; 0\right)$, a fókusza $F(a; 0)$. Az $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ pont nem tartozik a mértani helyhez, mert akkor az a csúcs a BC oldalon van, tehát nem keletkezik háromszög.

4053.



A parabola és az egyenes, a parabola és kör kölcsönös helyzete

4054. *a)* Két közös pont van: $P_1(6; 6)$, $P_2\left(-2; \frac{2}{3}\right)$. *b)* $P(6; -4)$, *c)* $P_1(1; 2)$, $P_2(9; -6)$.

4055. $M_1(6; 3)$, $M_2(1; 8)$.
4056. $M_1(4; 4)$, $M_2(1; -2)$.
4057. $M_1(3; 0)$, $M_2(7{,}5; 3)$.
4058. $M_1(1; 0)$, $M_2(10; 6)$.

4059. Az $y = tx^2 - x + 1$ csak akkor parabola egyenlete, ha $t \neq 0$. Ekkor minden $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$-ra van megoldás, van közös pont, mert a $tx^2 - x + 1 = 2tx - 1$ egyenlet diszkriminánsa: $D = (2t-1)^2 \geq 0$. Ha $t = \dfrac{1}{2}$, akkor egy közös pont van. $M(2; 1)$. Ha $t \neq \dfrac{1}{2}$, akkor $M_1(2; 4t-1)$, $M_2\left(\dfrac{1}{t}; 1\right)$. Ha $t = \dfrac{1}{2}$, akkor $M_1 = M_2$, az egyenes a parabola érintője.

4060. Minden m-re csak egy közös pont van, mert a diszkrimináns 0. Az egyenes érinti a parabolát az $M\left(\dfrac{1-2m}{2}; \dfrac{1-4m}{4}\right)$ pontban.

4061. A $p = x^2 - 4x + 4$ egyenlet gyökei: $a = 2 + \sqrt{p}$, $b = 2 - \sqrt{p}$, ahol $p > 0$. $a^4 + b^4 = 712$, ha $p = 10$, ekkor $a = 2 + \sqrt{10}$, $b = 2 - \sqrt{10}$.

4062. A húr végpontjainak koordinátái: $P_1(9; 18)$, $P_2(4; 12)$. A húr hossza $\sqrt{61}$ egység.

4063. A húr hossza $\dfrac{5\sqrt{145}}{4}$ egység.

4064. A húr hossza $\sqrt{522}$ egység.

4065. Nyilván $k \neq 0$. A parabola egyenletét az adott pontok rendre kielégítik. Tehát $\left.\begin{aligned} c &= k \\ ak^2 + bk + k &= 2k \\ 4ak^2 + 2bk + k &= 0 \end{aligned}\right\}$. Egyszerűsítve $k \neq 0$-val $\left.\begin{aligned} (1)\quad ak + b - 1 &= 0 \\ (2)\quad 4ak + 2b + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$. (1) és (2) egyenletekből $a = -\dfrac{3}{2k}$, $b = \dfrac{5}{2}$. Az a, b, c értékeit behelyettesítve az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletbe, $y = -\dfrac{3}{2k}x^2 + \dfrac{5}{2}x + k$. A k értékét úgy kell meghatározni, hogy a parabola áthaladjon a $Q(-1; 0)$ ponton. Ez pontosan akkor teljesül, ha (3) $0 = -\dfrac{3}{2k} - \dfrac{5}{2} + k$. Oldjuk meg a (3)-as egyenletet: $k_1 = 3$, $k_2 = -\dfrac{1}{2}$. Ha $k = 3$, akkor $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{5}{2}$, $c = 3$, ha $k = -\dfrac{1}{2}$, akkor $a = 3$, $b = \dfrac{5}{2}$, $c = -\dfrac{1}{2}$.

4066. A fókusz koordinátái: $F\left(0; \dfrac{9}{4}\right)$, az egyenes egyenlete: $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{9}{4}$. A húr végpontjainak koordinátái: $P_1 = \left(\dfrac{9\sqrt{3}}{2}; \dfrac{27}{4}\right)$, $P_2 = \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$. A húr hossza: 12 egység.

4067. A tengelyponton átmenő egyenesek egyenletei: $y = \sqrt{3}\,x$, $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$. Ezen egyenesek az $y = \dfrac{1}{6}x^2$ egyenletű parabolát a tengelyponttól különböző $P_1(6\sqrt{3}; 18)$ és $P_2(-2\sqrt{3}; 2)$ pontokban metszik. A P_1P_2 egyenes egyenlete: $2x - y\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$. Az egyenes az x tengelyt a $Q_1(-3\sqrt{3}; 0)$, az y tengelyt a $Q_2(0; 6)$ pontban metszi.

4068. A fókusz koordinátái: $F(0;2)$, a fókuszon átmenő egyenes egyenlete: $y = mx + 2$, amely az adott parabolát a $P_1(4m + 4\sqrt{m^2+1}; 4m^2 + 4m\sqrt{m^2+1} + 2)$ és a $P_2(4m - 4\sqrt{m^2+1}; 4m^2 - 4m\sqrt{m^2+1} + 2)$ pontokban metszi.
$P_1P_2 = 10 = \sqrt{(8\sqrt{m^2+1})^2 + (8m\sqrt{m^2+1})^2}$. Innen $m = \pm\frac{1}{2}$.
Két megoldás van: $x - 2y + 4 = 0$, vagy $x + 2y - 4 = 0$.
4069. Számítsuk ki az AB szakasz felezőmerőleges egyenesének a parabolával közös pontjait. Megoldás: $P_1(0;0)$, $P_2(6;12)$.
4070. $M_1(0;0)$, $M_2(4;4)$.

V

4071. A húr végpontjai: $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$. Ekkor $x_1 + x_2 = 10$ és $y_1 + y_2 = 4$. Másrészt M_1 és M_2 parabolapontok, ezért $\left.\begin{matrix}(1) & x_1^2 = 20y_1\\ (2) & x_2^2 = 20y_2\end{matrix}\right\}$. (2) és (1) különbsége: $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 20(y_2 - y_1)$. De $x_2 + x_1 = 10$, tehát $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}$, $(x_2 \neq x_1)$, ami a keresett húr meredeksége.
A húr egyenesének (az $(5;2)$ koordinátájú ponton átmenő szelő) egyenlete: $x - 2y - 1 = 0$.
4072. Az előző példa megoldásának gondolatmenetét követve, a keresett szelő egyenlete: $2x - y + 4 = 0$.
4073. Az origón áthaladó egyik oldal egyenesének egyenlete: $y = \sqrt{3}\,x$. Ez az egyenes a parabolát a $(0;0)$, $(4\sqrt{3};12)$ koordinátájú pontokban metszi. A szabályos háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0;0)$, $B(4\sqrt{3};12)$, $C(-4\sqrt{3};12)$.
4074. Mivel az y tengely az egyik magasság, azért az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0;0)$, $B\left(x_1; \frac{1}{8}x_1^2\right)$, $C\left(-x_1; \frac{1}{8}x_1^2\right)$, $x_1 > 0$. A magasságpont $M(0;2)$. Ekkor $\overrightarrow{AB}\left(x_1; \frac{1}{8}x_1^2\right)$, $\overrightarrow{CM}\left(x_1; 2 - \frac{1}{8}x_1^2\right)$ és $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$, $x_1 = 4\sqrt{5}$.
Az oldalak egyenletei: $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$, $y = 10$.
4075. Legyen $A(0;0)$. Az AB oldal egyenesének egyenlete: $y = x\sqrt{3}$. A B és a C csúcsok koordinátái: $B(2p\sqrt{3}; 6p)$, $C(-2p\sqrt{3}; 6p)$.
4076. A húrok paraméteres egyenlete: $y = mx + b$, ahol m adott, b változó. Ekkor $3x^2 - mx - 4 - b = 0$. A húrok végpontjai: $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$. x_1 és x_2 a másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 + x_2 = \frac{m}{3}$, a húrok felezőpontjai az $x = \frac{m}{6}$ egyenletű egyenesnek a parabola belsejébe eső pontjai: Ha $m = 4$, akkor $x = \frac{2}{3}$.
4077. $P_1P_2P_3$ háromszög csúcsainak koordinátái: $P_1(-10;10)$, $P_2(15;22{,}5)$, $P_3\left(x; \frac{1}{10}x^2\right)$.
A $P_1P_2P_3$ háromszög területe:
$31\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left|x(22{,}5 - 10) + 15\left(10 - \frac{1}{10}x^2\right) - 10\left(\frac{1}{10}x^2 - 22{,}5\right)\right|$. Rendezés után

$|-x^2+5x+75|=25$. Ha $\frac{5-5\sqrt{13}}{2}\le x\le\frac{5+5\sqrt{13}}{2}$, akkor $-x^2+5x+75=25$. Innen $P_3(-5;2,5)$, $P_3'(10;10)$. Ha $x<\frac{5-5\sqrt{13}}{2}$ vagy $x>\frac{5+5\sqrt{13}}{2}$, akkor $P_3''\left[\frac{5+5\sqrt{17}}{2};\frac{1}{10}\left(\frac{5+5\sqrt{17}}{2}\right)^2\right]$ és $P_3'''\left[\frac{5-5\sqrt{17}}{2};\frac{1}{10}\left(\frac{5-5\sqrt{17}}{2}\right)^2\right]$. A kapott x értékek kielégítik az x-re vonatkozó követelményeket! Így négy megoldás van.

4078. A PTA derékszögű háromszög csúcsainak koordinátái $P(x;x^2)$, $T(x;0)$, $A(4;0)$, ahol $0<x<4$. A PTA háromszög területe: $t=\frac{(4-x)x^2}{2}=2(4-x)\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}$. Alkalmazhatjuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget, mert $4-x>0$, $\frac{x}{2}>0$.

$\sqrt[3]{(4-x)\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}\le\frac{4-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{3}$, $(4-x)\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\le\left(\frac{4}{3}\right)^3$. A terület legnagyobb értéke $\frac{128}{27}$ és pontosan akkor, ha $4-x=\frac{x}{2}$, $x=\frac{8}{3}$. A keresett P pont koordinátái: $P\left(\frac{8}{3};\frac{64}{9}\right)$.

4079. A C csúcs koordinátái (2,5; 2). A BC egyenes irányszöge 45°, a BC egyenes egyenlete $y=x-0,5$. A B csúcs koordinátái kielégítik az $\left.\begin{array}{l}y=x-0,5\\ y=x^2-5x+8,25\end{array}\right\}$ egyenletrendszert. A négyzet keresett csúcsai: $B(3{,}5;3)$, $D(1{,}5;3)$, $A(2{,}5;4)$.

4080. A parabola fókusza $F\left(-\frac{7}{2};-2\right)$, ez a rombusz B csúcsa. Az A csúcs a B csúcstól 5 egység távolságra van és rajta van a parabolán. $\left.\begin{array}{r}\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+(y+2)^2=25\\ y=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\end{array}\right\}$.

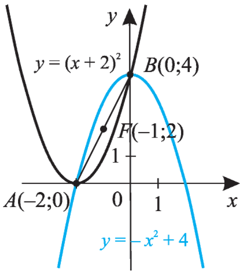
Az egyenletrendszerből az A csúcs koordinátái: $\left(-\frac{\sqrt{19}+7}{2};\frac{5}{2}\right)$. A rombusz K középpontja a parabola tengelyén van, a koordinátái $K\left(-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$, az AC átló hossza $\sqrt{19}$ egység, a BD átló hossza $2BK=9$ egység. A rombusz területe: $t=\frac{9\sqrt{19}}{2}$ területegység.

4081. Az AB szakasz, mint átmérő fölé rajzolt Thalész-kör egyenlete: $(x-4)^2+(y-1)^2=4$. Ez a kör az $(y-1)^2=x-2$ parabolát az $A(2;1)$ pontban érinti, a $P_1(5;1-\sqrt{3})$ és a $P_2(5;1+\sqrt{3})$ pontokban metszi. $P_1\sphericalangle=P_2\sphericalangle=90°$. Az AP_1BP_2 négyszög területe $4\sqrt{3}$ területegység.

V

V

4083.



4082. Legyen a parabola egyenlete $y^2=2px$. A csúcson átmenő egymásra merőleges egyenesek egyenletei: $y=mx$ és $y=-\frac{1}{m}x$, $(m\neq 0)$. A húrok végpontjai $P\left(\frac{2p}{m^2};\frac{2p}{m}\right)$ és $Q(2pm^2;-2pm)$. A PQ húr a parabola csúcsából derékszögben látszik. A PQ egyenes egyenlete: $mx+(m^2-1)y=2pm$. Legyen $y=0$, akkor $x=2p$. A húrok egyenesei a $(2p;0)$ ponton haladnak át az $m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ értékétől függetlenül.

4083. *a)* $p\neq 1$. A parabola pontosan akkor érinti az x tengelyt, ha a $(p-1)x^2-2px+4=0$ egyenletnek egy gyöke van (a két gyök azonos). $D=(2p-4)^2=0$, $p=2$. Ekkor $A(-2;0)$. *b)* Alakítsuk át az egyenletet: $y=(p-1)\left(x+\frac{p}{p-1}\right)^2+4-\frac{p^2}{p-1}$. A parabola csúcsa (tengelypontja) az y tengelyen van, ha $\frac{p}{p-1}=0$. Ekkor $p=0$, $B(0;4)$. Ábrázoljuk a $p=2$, illetve a $p=0$ értékeknek megfelelő parabolákat (4083. ábra). *c)* Mindkét parabola normál parabola. Az $F(-1;2)$ pontra valóban szimmetrikusak. *d)* Az A és a B pont.

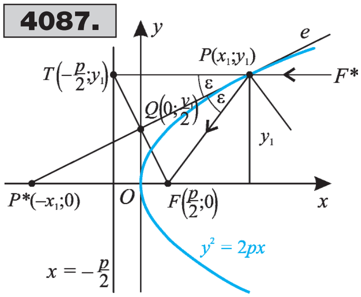
4084. Oldjuk meg az egyenletrendszert: $\left(y=\frac{1}{4a}x^2 \text{ és } y=\frac{1}{m}\left(x-\frac{a}{m}\right)\right)$. A megoldás az $(mx-2a)^2=0$ egyenlethez vezet. Innen $x=\frac{2a}{m}$, vagyis valóban egy közös pont van.

b) Oldjuk meg az egyenletrendszert. Egy megoldás van: $x=\frac{2a}{m}$.

4085. Oldjuk meg az $y=\frac{1}{2p}x^2$ és a $p(y+y_1)=x_1x$ egyenletekből álló egyenletrendszert, figyelembe véve, hogy $y_1=\frac{1}{2p}x_1^2$. Ekkor az $(x-x_1)^2=0$ egyenlethez jutunk. $x=x_1$, $y=y_1$, tehát valóban egy közös pont van, és az egyenes nem párhuzamos a parabola tengelyével. Az adott pontokban az érintők egyenletei: $2x-4y=1$, $x-y=1$, $6x+4y+9=0$.

4086. Az egyenes egyenletéből $x=\frac{y_1y}{p}-x_1$. Helyettesítsük az $y^2=2px$ egyenletben az x helyére: $y^2=2p\left(\frac{y_1y}{p}-x_1\right)$, innen $y^2-2y_1y+2px_1=0$. Mivel $(x_1;y_1)$ a parabola pontja, azért $2px_1=y_1^2$. Így $y=y_1$, $x=x_1$. Tehát a parabolának egy közös pontja van az egyenessel, az egyenes nem párhuzamos az x tengellyel, az $yy_1=p(x+x_1)$ érintő egyenlete. Ha $x_1=0$, akkor $y_1=0$. Az érintő egyenlete $x=0$. *Megjegyzés:* Az $y^2=2px$ egyenletű parabola az $y=\frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabolának az $y=x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképe. Tükrözzük az $y=\frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabola $p(y+y_1)=xx_1$ érintőjét az $y=x$ egyenletű egyenesre. Ekkor $p(x+x_1)=yy_1$, mert a $P(x_1;y_1)$ pont tükörképe: $P'(y_1;x_1)$ $(x\to y,\ y\to x,\ x_1\to y_1,\ y_1\to x_1)$.

4087.



Az 1, 2, 3 abszcisszájú pontokban az érintők egyenletei rendre: $2x \pm y\sqrt{2} + 2 = 0$, $x \pm y + 2 = 0$, $2x \pm y\sqrt{6} + 6 = 0$.

4087. *a)* Vizsgáljuk az $y^2 = 2px$ egyenletű parabolát. A $P(x_1; y_1)$ pontbeli érintő egyenlete $yy_1 = p(x + x_1)$, a fókuszon átmenő és az érintőre merőleges egyenes egyenlete: $y_1 x + py = \frac{p}{2} y_1$. Ez az egyenes az y tengelyt a $Q\left(0; \frac{y_1}{2}\right)$ pontban metszi. A Q pont rajta van az érintőn, mert $\frac{y_1^2}{2} = px_1$ igaz egyenlőség. *b)* Tükrözzük az $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ pontot a $Q\left(0; \frac{y_1}{2}\right)$ pontra. A T tükörkép koordinátái: $\left(-\frac{p}{2}; y_1\right)$. *c)* A Q pont ordinátája: $\frac{y_1}{2}$. *d)* Az $yy_1 = p(x + x_1)$ egyenletből, ha $y = 0$, akkor $x = -x_1$. $P^*(-x_1; 0)$. Ha a parabola egyenlete $y = \frac{1}{2p}x^2$ és az érintési pont $P(x_1; y_1)$, akkor az érintő az x tengelyt az $M\left(\frac{x_1}{2}; 0\right)$ pontban metszi. PM merőleges az érintőre, az F pontnak az érintőre vonatkozó tükörképe $Q\left(x_1; -\frac{p}{2}\right)$, rajta van a vezéregyenesen. Az érintő az y tengelyt a $(0; -y_1)$ pontban metszi.

V

4088. A 4087. ábra szerint a PTF háromszög egyenlő szárú háromszög, mert $PQ \perp FT$ és a Q pont felezi az alapot. $PT = PF$, az érintő felezi az FPT szöget. A P pontban az e érintőre állított merőleges felezi az F^*PF szöget. $(F^*P \parallel x)$. Ebből következik a feladat állítása.

4089. Az érintési pontok koordinátái: $P_1\left(\frac{1}{3}; 2\right)$, $P_2(3; 6)$, $P_3\left(\frac{3}{4}; -3\right)$. Az érintők egyenletei: e_1: $2y = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)$, e_2: $6y = 6(x + 3)$, e_3: $-3y = 6\left(x + \frac{3}{4}\right)$. Az érintők által meghatározott háromszög csúcspontjai: $A_1(1; 4)$, $A_2\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $A_3\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. A $P_1P_2P_3$ háromszög területe: $t = \frac{15}{2}$ területegység. Az $A_1A_2A_3$ háromszög területe $t_1 = \frac{15}{4}$ területegység. $t : t_1 = 2 : 1$.

4090. Az egyenes akkor érinti a parabolát, ha $m + 2 = 0$, $m = -2$. Az érintőre a $P(0; 0)$ érintési pontban emelt merőleges egyenlete: $y = \frac{1}{2}x$. A húr hossza: $d = \frac{5\sqrt{5}}{4}$ egység.

4091. Mivel a $P(2; 2)$ pont rajta van a parabolán, azért $2b + c = -2$. Az $y = x$ egyenletű egyenes érinti a parabolát, ha az $x^2 + (b - 1)x + c = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0. $b = -3$, $c = 4$.

4092. Legyen $A\left(a; \frac{a^2}{16}\right)$, $B\left(b; \frac{b^2}{16}\right)$. A gyújtópont $F(0; 4)$, a vezéregyenes egyenlete $y = -4$. Az AB egyenes egyenlete: $-\frac{a+b}{16}x + y = -\frac{ab}{16}$. F illeszkedik az AB egyenesre, akkor

$ab=-64$. Az A és a B pontbeli érintők egyenletei: $\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{ax}{8}-y=\dfrac{a^2}{16}\\ (2) & \dfrac{bx}{8}-y=\dfrac{b^2}{16}\end{array}\right\}$. (1)−(2) érintők metszéspontja ($a-b\neq 0$): $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{ab}{16}$. De mivel $ab=-64$, azért $M\left(\dfrac{a+b}{16}; -4\right)$, tehát M valóban a vezéregyenesre illeszkedik.

4093. Az $y=mx$ egyenes pontosan akkor érinti a parabolát, ha az $x^2-(8+m)x+16=0$ egyenlet diszkriminánsa 0. Ekkor $m_1=0$, $m_2=-16$. Az érintési pontok $P_1(4; 0)$, $P_2(-4; 64)$.

V

4094. Az origón átmenő, és egymásra merőleges érintők egyenletei: $y=mx$, $y=-\dfrac{1}{m}x$, ahol $m\neq 0$. Az $y=mx$ egyenes akkor és csakis akkor érintő, ha az $\left.\begin{array}{l}y=ax^2+bx+c\\ y=mx\end{array}\right\}$ egyenletrendszerhez tartozó diszkrimináns 0. $D_1=(b-m)^2-4ac=0$. Hasonlóképpen az $y=-\dfrac{1}{m}x$ érintőre $D_2=\left(b+\dfrac{1}{m}\right)^2-4ac=0$. Mindkét feltétel egyszerre teljesül, ha $(b-m)^2=\left(b+\dfrac{1}{m}\right)^2$. Innen $2b=m-\dfrac{1}{m}\cdot\left(m+\dfrac{1}{m}\neq 0\right)$. $(b-m)^2-4ac=0 \Leftrightarrow b^2-2bm+m^2-4ac=0$. Innen az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet diszkriminánsa: $b^2-4ac=2bm-m^2$, $b^2-4ac=m\left(m-\dfrac{1}{m}\right)-m^2$, $b^2-4ac=-1$.

4095. $y=6x-13$.

4096. $b=-6$, $E(3; 0)$ (Az $y=2x+6$ egyenes valóban érintő, mert nem párhuzamos a parabola tengelyével és a parabolával egy közös pontja van).

4097. A parabola egyenlete $y=a(x-u)^2$ alakú. Az érintő egyenlete $y=4x-16$. Az érintő az x tengelyt a $Q(4; 0)$ pontban metszi. Ebből adódik, hogy a csúcspont $T(3; 0)$. (4087. feladat). $y=(x-3)^2$.

4098. Az A pontbeli érintő egyenlete: $8x+y=25$. A csúcsérintő egyenlete: $y=1$. Az érintő a csúcsérintőt a $P(3; 1)$ pontban metszi. A 4087. feladatra hivatkozva a tengelypont $T(2; 1)$. A parabola egyenlete: $y=a(x-2)^2+1$. Mivel az $A(4; -7)$ illeszkedik a parabolára, $y=-2(x-2)^2+1$.

4099. Az AB egyenessel párhuzamos érintő érintési pontja adja azt a C pontot, amelyre az ABC háromszög területe a legkisebb. A C csúcs koordinátái: $C\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{63}{16}\right)$.

4100. Az $y=2x+b$ egyenletű egyenes érinti az $y=x^2$ parabolát, ha $b=1$. Az $y=2x-1$ egyenes érinti az $y=-(x-1)^2$ parabolát is a $(0; -1)$ pontban, $d=0$.

4101. A $P(x_1; y_1)$ pontbeli érintő egyenlete $yy_1=p(x+x_1)$, az érintőre a P pontban emelt merőleges egyenes egyenlete $y_1x+py=x_1y_1+py_1$. Ha $y=0$, akkor $x=x_1+py$, $(y_1\neq 0)$. A vetület $x-x_1=p=$ állandó.

4102. A $2x-y=3$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenessereg egyenlete $2x-y=b$ alakú. Ezek közül olyan egyenes érinti az $y=x^2$ parabolát, amelynek egy közös pontja van a parabolával. $b = 1$. A $2x - y = 1$ egyik pontja például a $P(0; -1)$ pont. A P pont a $2x - y - 3 = 0$ egyenestől $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ egység távolságra van. Ennyi a két párhuzamos egyenes távolsága is.

4103. A $P(x_1; y_1)$ pontbeli érintő az x tengelyt a $Q\left(\frac{x_1}{2}; 0\right)$ pontban metszi, feltéve, ha $x_1 \neq 0$. A PQ szakasz felezőpontjának koordinátái: $x = \frac{3x_1}{4}$, $y = \frac{y_1}{2}$. Innen $x_1 = \frac{4x_1}{3}$ és $y_1 = 2y$. De $y_1^2 = x_1^2$, tehát $y = \frac{8}{9}x^2$. A mértani hely az $y = \frac{8}{9}x^2$ egyenletű parabola, kivéve a (0; 0) pontot.

4104. Tegyük fel, hogy az adott egyenes $P(a; a)$ pontjából húzható két egymásra merőleges egyenes az $y = x^2$ parabolához. A P ponton átmenő egyenes egyenlete $y = mx + a - ma$. Válasszuk meg az m-et úgy, hogy ez az egyenes a parabola érintője legyen. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az $x^2 = mx + a - ma$ egyenlet diszkriminánsa 0 legyen, és követeljük, hogy $m_1 m_2 = -1$ legyen. De $m_1 m_2 = 4a$, tehát $4a = -1$, $a = -\frac{1}{4}$. A keresett P pont koordinátái: $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$. Vegyük észre, hogy a P pont a parabola vezéregyenesére illeszkedik.

4105. Az adott egyenessel párhuzamos $y = 2x + b$ egyenletű egyenesek közül az $y = 2x + \frac{3}{4}$ egyenes érinti a parabolát a $P\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$ pontban. A P pont az $y = 2x - 2$ egyenestől $d = \frac{11\sqrt{5}}{20}$ egység távolságra van.

4106. A $P(x_1; y_1)$ pontbeli $yy_1 = p(x + x_1)$ parabolaérintő az x tengelyt a $Q(-x_1; 0)$ pontban metszi. Szabályos háromszög akkor jöhet létre, ha $y_1 > 0$ esetben a PQ egyenes az x tengellyel 30°-os szöget alkot. $\frac{y_1}{2x_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1\right)^2 = 8x_1 \Rightarrow x_1 = 6$. A keresett pont koordinátái: $Q(-6; 0)$. A szabályos háromszög csúcsainak koordinátái: $(-6; 0)$, $\left(0; 2\sqrt{3}\right)$, $\left(0; -2\sqrt{3}\right)$.

4107. $P_1\left(12; 8\sqrt{3}\right)$ és a $P_2\left(\frac{4}{3}; -\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$. Az érintők merőlegesek egymásra.

4108. A normális az x tengelyt az $(x_1 + p; 0)$, az y tengelyt a $\left(0; \frac{y_1}{p}(x_1 + p)\right)$ pontban metszi.

4109. A $P(x_1; y_1)$ ponthoz tartozó érintő az x tengelyt az $A(-x_1; 0)$ pontban, a normális a $B(x_1 + p; 0)$ pontban metszi. Az APB egyenlő szárú háromszög alapjának középpontja a $P_1(x_1; 0)$ pont. Így $x_1 = \frac{-x_1 + x_1 + p}{2} = \frac{p}{2}$. Az érintési pont koordinátái: $P\left(\frac{p}{2}; \pm p\right)$.

4110. A keresett kör áthalad a $P_1\left(\frac{p}{2}; p\right)$ és a $P_2\left(\frac{p}{2}; -p\right)$ pontokon, a középpontjának koordinátái: $K(u; 0)$. A P_1 pontbeli parabolaérintő egyenlete: $y = x + \frac{p}{2}$. A P_1 ponthoz tartozó normális egyenlete: $y=-x+\frac{3p}{2}$. A normális átmegy a kör középpontján, ezért $K\left(\frac{3p}{2};\ 0\right)$.

A kör sugara: $KP_1=r=\sqrt{p^2+p^2}$, a keresett kör egyenlete: $\left(x-\frac{3p}{2}\right)^2+y^2=2p^2$.

4111. Az egyenes érinti a parabolát, ha nem párhuzamos a tengellyel, és egy közös pontjuk van. Oldjuk meg az $\left.\begin{array}{l} y=mx-2 \\ y=\frac{1}{4}x^2 \end{array}\right\}$ egyenletrendszert. Egy közös pont csak akkor van, ha a diszkrimináns 0. $D=16m^2-32 \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

V

Két érintő létezik. Az egyenleteik: $y=\sqrt{2}\,x-2$ és $y=-\sqrt{2}\,x-2$.

4112. $m=\frac{1}{2}$.

4113. Két közös pont van, ha $b>-\frac{1}{4}$, egy közös pont, ha $b=\frac{1}{4}$, nincs közös pont, ha $b<-\frac{1}{4}$.

4114. $b=1$.

4115. Az adott egyenessel párhuzamos parabolaérintő egyenlete $y=x+b$. A b paramétert úgy kell megválasztani, hogy az $\left.\begin{array}{l} y=-x+b \\ y=\frac{1}{8}x^2 \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek egy megoldása legyen.

$D=0$, $64+32b=0$, $b=-2$.

4116. $y=x+2$.

4117. Az adott egyenesre merőleges egyenessereg egyenlete $y=2x+b$. $b=-16$. Az érintő egyenlete $y=2x-16$.

4118. *a)* $y=3x+1$; *b)* Az adott egyenes iránytangense -2, a rá merőleges érintő iránytangense $\frac{1}{2}$. Az érintő egyenlete: $y=\frac{1}{2}x+6$. *c)* Az adott egyenes iránytangense $m_1=2$. Az érintő iránytangense m_2. Ekkor $\operatorname{tg} 45°=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$, $\left|\frac{2-m_2}{1+2m_2}\right|=1$. Két eset lehetséges. $\frac{2-m_2}{1+2m_2}=1$, innen $m_2=\frac{1}{3}$, vagy $\frac{2-m_2}{1+2m_2}=-1$, innen $m_2=-3$. Ha $m_2=\frac{1}{3}$, akkor az érintő egyenlete: $x-3y+27=0$, ha $m_2=-3$, akkor az érintő egyenlete. $3x+y+1=0$.

4119. A $3x+4y+46=0$ egyenletű egyenessel párhuzamos parabolaérintő egyenlete: $3x+4y+36=0$. A két párhuzamos egyenes távolsága adja meg a két ponthalmaz (egyenes és parabola) távolságát. $d=\left|\frac{-36+46}{5}\right|=2$.

4120. *a)* $p=1$; *b)* $p=2{,}5$; *c)* Ha $a=0$, akkor nincs megoldás. Legyen $a\neq 0$.

Ha $b=c=0$, akkor $p\in\mathbf{R}$, ha $b\neq 0$ és $c\neq 0$, akkor $p=\frac{2ac^2}{b^2}$, ha $b=0$ és $c\neq 0$ vagy $b\neq 0$ és $c=0$, akkor nincs megoldás.

4121. A P pont koordinátái: $P(x_1;\ y_1)$, ekkor a Q pont koordinátái: $Q(-x_1;\ 0)$. Pitagorasz tételét alkalmazva $(2x_1)^2+y_1^2=24^2$. Mivel $y_1^2=28x_1$, ezért egyszerűsítés után: $x_1^2+7x_1-144=0$. Mivel $x_1>0$, azért az egyenletnek csak a pozitív gyöke felel meg. $x_1=9$. Ekkor $y_1=\pm 6\sqrt{7}$. Két érintőt kapunk. $\sqrt{7}\,x-3y+9\sqrt{7}=0$ és $\sqrt{7}\,x+3y+9\sqrt{7}=0$.

4122. $P_1\left(\frac{8}{7};\ 2\right)$, $P_2(14;\ 7)$. Az érintők egyenletei: $y=\frac{7}{8}x+1$ és $y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$. Innen $m_1=\frac{7}{8}$, $m_2=\frac{1}{4}$ és $\operatorname{tg}\omega=\left|\frac{\frac{7}{8}-\frac{1}{4}}{1+\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4}}\right|$, $\omega=27{,}1°$.

V

4123. Az $A\left(\frac{8}{7};\ 0\right)$ és a $B(14;\ 0)$ pontok a parabola belső tartományába esnek $F(0{,}875;\ 0)$. Ezekre a pontokra nincs megoldás. Az $A\left(\frac{8}{7};\ 2\right)$ és a $B(14;\ 7)$ pontok rajta vannak a parabolán. Az érintők egyenletei: $y=\frac{7}{8}x+1$ és $y=\frac{1}{4}x+\frac{14}{4}$; $m_1=\frac{7}{8}$, $m_2=\frac{1}{4}$. $\operatorname{tg}\omega=\frac{20}{39}$, $\omega=27{,}1°$. Az érintők metszéspontja: $M\left(4;\ \frac{9}{2}\right)$.

4124. A fókuszon átmenő $m=\sqrt{3}$ iránytangensű egyenes egyenlete: $y=\sqrt{3}\,x-3\sqrt{3}$. Ez az egyenes a parabolát a $P_1\left(1;\ 2\sqrt{3}\right)$ és a $P_2\left(9;\ 6\sqrt{3}\right)$ pontokban metszi. A P_1 és a P_2 pontokban a parabola érintőinek egyenlete: $3x+\sqrt{3y}+3=0$ és $3x-\sqrt{3y}+9=0$, $\omega=60°$.

4125. Az $y=x+b$ egyenletű egyenes érinti az $y=x^2+1$ egyenletű parabolát, ha $b=\frac{3}{4}$, az $y^2=x-1$ egyenletű parabolát, ha $b=-\frac{3}{4}$. Az $y=x+\frac{3}{4}$ és az $y=x-\frac{3}{4}$ egyenletű egyenesek távolsága: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4126. *a)* Oldjuk meg az $\left.\begin{array}{ll}(1) & y=x^2+x\\ (2) & y^2-8y+12x=0\end{array}\right\}$ egyenletrendszert.

(3) $\left(x^2+x\right)^2-8\left(x^2+x\right)+12x=0$. Rendezve a (3)-as egyenletet: $x\left(x^3+2x^2-7x+4\right)=0$, (4) $x(x-1)\left(x^2+3x-4\right)=0$. (4) egyenletből: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-4$. A parabolák közös pontjainak koordinátái: $P_1(0;\ 0)$, $P_2(1;\ 2)$, $P_3(-4;\ 12)$.

b) $P_1(2;\ 2)$, $P_2(-1;\ -1)$, $P_3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, $P_4\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2};\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$;

c) $P_1(0;\ 0)$, $P_2(1;\ 1)$, $P_3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $P_4\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$;

d) $P_1(0;\ 0)$, $P_2(1;\ 1)$, $P_3(2;\ 4)$; *e)* $P_1(0;\ 0)$, $P_2(1;\ 1)$, $P_3(2;\ 4)$, $P_4(-3;\ 9)$.

V

4127. *a)* Mivel $y=x^2$, azért $x^4=2x$; $P_1(0;0)$, $P_2\left(\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}\right)$. *b)*, *c)* Nincs közös pont. *d)* $P\left(\frac{p}{4};\pm\frac{p\sqrt{2}}{2}\right)$.

4128. A parabolák egyenletei: $y^2=8x$ és $y^2=-8x+16$. $P_1\left(1;\,2\sqrt{2}\right)$, $P_2\left(1;\,-2\sqrt{2}\right)$.

4129. Az adott parabola egyenlete: $y^2=10x$. Innen $\frac{p}{2}=\frac{5}{2}$, a vezéregyenes egyenlete $x=-\frac{5}{2}$. A másik parabola tengelypontja: $T\left(\frac{5}{2};0\right)$, a fókusza $F\left(-\frac{5}{2};0\right)$, a paramétere $p=10$, egyenlete $y^2=-20\left(x-\frac{5}{2}\right)$. A közös pontok: $P\left(\frac{5}{3};\pm\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)$.

4130. A $P(9;2)$ ponton átmenő egyenessereg paraméteres egyenlete
$y-2=m(x-9)$, $y=mx-9m+2$, ahol $m\in\mathbf{R}$. Az m értékét úgy kell meghatározni, hogy az $\left.\begin{array}{r} y=mx-9m+2\\ 36y=x^2\end{array}\right\}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen. Az egyenletrendszerhez tartozó diszkrimináns: $D=36^2m^2-4\cdot 36\,(9m-2)=0$, ha $m_1=\frac{2}{3}$, $m_2=\frac{1}{3}$. Az érintő egyenlete: $2x-3y-12=0$, vagy $x-3y-3=0$.

4131. $A(2;-4)$ pontban az érintő egyenlete: $x+y+2=0$, a $(12{,}5;-10)$ pontban az érintő egyenlete: $2x+5y+25=0$.

4132. *a)* $P(4;\pm 3)$; *b)* $(2;\pm 6)$.

4133. $F(4;0)$. Az $y^2=16x$, $(x-4)^2+y^2=169$ egyenletrendszerből $P_1(9;12)$, $P_2(9;-12)$.

4134. $F\left(\frac{9}{8};0\right)$. Az $y^2=\frac{9}{2}x$, $\left(x-\frac{9}{8}\right)^2+y^2=\left(\frac{73}{8}\right)^2$ egyenletrendszerből $P(8;\pm 6)$. A tengelypont $T(0;0)$. $TP=10$ egység.

4135. Az $x^2+y^2=9$, $y=ax^2-5$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, ha $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{18}$. A parabola egyenlete: $y=\frac{1}{2}x^2-5$; a_2 értéke nem felel meg.

4136. Az $y^2=2px$, $(x-11)^2+y^2=40$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, ha $p=20$, vagy 2. A feladatnak a $p=2$ felel meg. $y^2=4x$, $E(9;\pm 6)$.

4137. A parabola az x tengelyt az $A(-5;0)$ és a $B(5;0)$ pontokban metszi. A keresett kör egyenlete: $x^2+(y-v)^2=13^2$. Mivel a kör átmegy az A és a B pontokon, azért $25+v^2=169$, $v=-12$ ($v=12$ nem felel meg.) A kör és a parabola közös pontjai $A(-5;0)$, $C(-12;-17)$, $D(12;-17)$, $B(5;0)$. Az $ABCD$ négyszög trapéz, a területe: $t=289$ területegység.

4138. A parabola és a kör közös pontjainak koordinátái: $A(0;0)$, $B\left(\sqrt{3};3\right)$, $C\left(-\sqrt{3};3\right)$. Az ABC háromszög területe: $t=\frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{2}=3\sqrt{3}$ területegység.

4139. Az $y=-2x$ egyenletű egyenes és az $y=x^2+2x$ egyenletű parabola közös pontjai $K_1(0;0)$, $K_2(-4;8)$. Két megoldás van: $K_1(0;0)$, $K_1P=r_1=\sqrt{13}$, $x^2+y^2=13$. $K_2(-4;2)$. $K_2P=r_2=\sqrt{37}$, $(x+4)^2+(y-8)^2=37$.

4140. A parabola egyenlete: $y + 3 = = (x - 1)^2$. Az $\left.\begin{array}{r} y + 3 = (x - 1)^2 \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \end{array}\right\}$ egyenletrendszerből:
(1) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$. $x = 1$ gyöke az (1)-es egyenletnek, ezért $(x - 1) \cdot P(x) = 0$ alakban írható. $x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 4x^2 + 4x + 12x - 12 = 0$.
Innen $(x - 1)x^3 - (x - 1) \cdot 3x^2 - (x - 1)4x + 12(x - 1) = 0$.
(2) $(x - 1)(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) = 0$. Hasonló meggondolással a (2)-es egyenlet is továbbalakítható. $(x - 1)(x - 2)(x^2 - x - 6) = 0$. A parabolának és a körnek négy közös pontja van. $P_1(-2; 6)$, $P_2(1; -3)$, $P_3(2; -2)$, $P_4(3; 1)$.

V

4141. A kör egyenlete $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$. A parabola paramétere $p = \frac{1}{2}$, tengelypontja $T(-2; -10)$, az egyenlete $y + 10 = (x + 2)^2$. A kör és egyenes közös pontjai $(1; -1)$, $(-5; -1)$, $(2; 6)$, $(-6; 6)$. A közös pontok trapézt feszítenek ki. A területe: 49 területegység.

4142. A parabola $P(x_1; y_1)$ pontbeli érintőjének egyenlete: $x_1 x = (y + y_1)$, az érintő normálegyenlete: $\frac{x_1 x - 3y - 3y_1}{\sqrt{x_1^2 + 9}} = 0$. A parabola érintője érinti az $x^2 + y^2 = 16$ egyenletű kört, ha $\left|\frac{x_1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 3y_1}{\sqrt{x_1^2 + 9}}\right| = 4$. Innen $9y_1^2 = 16(x_1^2 + 9)$. De $x_1^2 = 6y_1$, tehát $3y_1^2 - 32y_1 - 48 = 0$. Mivel $x_1^2 = 6y_1 > 0$, azért $y_1 = 12$ és $x_1 = \pm 6\sqrt{2}$. Két közös érintő létezik, az egyenleteik: $y = \pm 2\sqrt{2}\, x - 12$.

4143. A parabola és a kör metszéspontjai: $P_1\left(2; 2\sqrt{3}\right)$, $P_2\left(2; -2\sqrt{3}\right)$. A P_1 pontban az érintők egyenletei: $2x + 2\sqrt{3}y = 16$; $2\sqrt{3}y = 3(x + 2)$. A hajlásszög 70,9°.

4144. A $P(3p; 0)$ pont körül rajzolt r sugarú körnél az r-et úgy kell megválasztani, hogy az $\left.\begin{array}{r} y^2 = 2px \\ (x - 3p)^2 + y^2 = r^2 \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek x-re egyetlen gyöke legyen.
$x^2 - 4px + 9p^2 - r^2 = 0 \Rightarrow D = 16p^2 - 4\left(9p^2 - r^2\right) = 0 \Rightarrow r^2 = 5p^2$. Ekkor $x = 2p$. A háromszög Q, R csúcsainak koordinátái $Q(2p; 2p)$, $R(2p; -2p)$. A PQR háromszög területe: $t = 2p^2$.

4145. A téglalap parabolára illeszkedő csúcsainak koordinátái: $\left(x; \pm\sqrt{2px}\right)$, ahol $0 < x < a$.
A téglalap területe: $T = 2(a - x)\sqrt{2px}$. Innen $\frac{T^2}{4p} = 2x(a - x)(a - x)$. Ha $\frac{T^2}{4p}$ maximális, akkor T is maximális. A három pozitív tényező összege állandó $(2a)$. Ezért a mértani és a számtani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség szerint a szorzatuk akkor maximális, ha a tényezők egyenlők. $2x = a - x$, ha $x = \frac{a}{3}$. A maximális terület: $T_{max} = \frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2ap}{3}}$.