3674. *a)* $m = 2$, $\mathbf{n}(2; -1) \Rightarrow 2x - y = 2$; *b)* $3x - 5y = 21$; *c)* $\mathbf{n}(3; 1) \Rightarrow 3x + y = -\frac{85}{12}$; *d)* $\mathbf{n}(4; -3)$, $4x - 3y = 7\sqrt{2}$.

3675. *a)* $m = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$; *b)* $\mathbf{n}(b; a)$, $\mathbf{n}'(a; -b) \Rightarrow ax - by = 0$; *c)* $\mathbf{n}(1; -1) \Rightarrow \mathbf{n}'(1; 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow x + y = 7$; *d)* $4x - 3y = 12$; *e)* $2x - 9y = 41$; *f)* $2x + 3y = 5$; *g)* $x = -4$; *h)* $P\left(1; -\frac{17}{3}\right)$, $\mathbf{n}(4; 3) \Rightarrow \mathbf{n}'(3; -4) \Rightarrow 3x - 4y = \frac{77}{3}$.

V

3676. *a)* $\frac{15}{8} = \frac{3}{p} \Rightarrow p = \frac{8}{5}$. Ebből a két egyenes: $15x - 8y = 35$, illetve $15x - 8y = -q$. Két különböző egyenest kapunk, ha $q \in \mathbf{R} \setminus \{-35\}$. *b)* $\frac{15}{8} \cdot \frac{3}{p} = -1 \Rightarrow p = -\frac{45}{8}$, $q \in \mathbf{R}$.

3677. $T(a; b)$.

3678. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 4a^2 + a = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{4}$; az $a_2 = 0$, nem felel meg a feladat feltételeinek.

3679. *a)* $\overrightarrow{AB}(1; 5) \Rightarrow \mathbf{n}(5; -1) \Rightarrow 5x - y = 0$; *b)* $\mathbf{n} = \overrightarrow{BA}(8; 7) \Rightarrow 8x + 7y = -4$; *c)* $\overrightarrow{AB}(0; 8) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 0) \Rightarrow x = 5$, továbbá $\mathbf{n}(0; 1) \Rightarrow y = 3$.

3680. $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}(x - 4; 9) \Rightarrow \mathbf{n}(9; 4 - x)$, $\mathbf{n}'(4; 3)$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 36 + 3(4 - x) = 0 \Rightarrow x = -32$.

3681. $\overrightarrow{AB}(10; y - 4)$, $\mathbf{n}(4; 3)$, $\overrightarrow{AB} \perp \mathbf{n} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = 0$, $40 + 3(y - 4) = 0 \Rightarrow y = -\frac{28}{3}$.

3682. $2x - 3y = -11$, $3x + 2y = 16$.

3683. *a)* $e: x - 3y = -1$, $f: x + y = 10$. $e \cap f$: $\left.\begin{array}{r} x - 3y = -1 \\ x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow M(7{,}25;\ 2{,}75)$; $\alpha = 63{,}4°$.

b) e: $13x + 5y = 0$. f: $3x + 2y = -1$. $e \cap f: N\left(\frac{5}{11}; -\frac{13}{11}\right)$; $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = 13 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 49$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{194}$, $|\mathbf{n}'| = \sqrt{13}$, $49 = \sqrt{194} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 12{,}6°$.

3684. *a)* $F_{AB}\left(-2; \frac{19}{3}\right)$. *b)* $F_{AB}\left(\frac{10}{3}; 2\right)$.

3685. *a)* $F(-4; 1)$, $\overrightarrow{AB}(2; 6) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 3) \Rightarrow x + 3y = -1$; *b)* $2x - 8y = 17$; *c)* $2x + 1 = 0$; *d)* $y = 6$.

3686. *AB* felezőmerőlegese: $8x + y = 42$, amelyet a *P* pont koordinátái kielégítenek, tehát igaz az állítás.

3687. Az *AB* felezőmerőlegesének és az adott egyenesnek a metszéspontja adja a megálló helyét. *AB* felezőmerőlegese: $x + y = 7$. $\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ 2x - 3y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{23}{5}; \frac{12}{5}\right)$. $AM \approx 2{,}3$ km.

3688. Az első egyenes az *y* tengelyt az $E_1(0; -2)$ pontban, a második egyenes az $E_2(0; -4)$ pontban metszi. $F(0; -3)$. A középpárhuzamos: $5x - 3y = 9$. $P(3; 2)$.

3689. A feladat feltételeinek két egyenes felel meg: $e_1 \parallel PQ$ és $e_2 = AF_{PQ}$. $\overrightarrow{PQ}(12; -6) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{n}(1; 2) \Rightarrow e_1$: $x + 2y = 17$; $F_{PQ}(3; 2)$, $\overrightarrow{AF}(2; -6) \Rightarrow \mathbf{n}(3; 1) \Rightarrow e_2$: $3x + y = 11$.

3690. *a)* Két ilyen egyenes van: $x - 6y + 59 = 0$, illetve $13x - 2y = 69$. *b)* $4x - 3y + 2 = 0$, illetve $3x - 2y + 1 = 0$.

3691. $\overrightarrow{CB}(5;\ 2)$, $\overrightarrow{CA}(4;\ -10)$, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow$ a háromszög derékszögű. Keressünk többféle megoldást is.

3692. $\mathbf{n}(8; 5)$. Legyen O az origó, $K(0; 8)$ az átfogó felezőpontja. Ekkor $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \mathbf{n} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{OC}(8;\ 13)$, $C(8;\ 13)$. $\mathbf{n}'(-5; 8)$ az $\mathbf{n}$ 90°-os elforgatottja. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} + \mathbf{n}'$, $\overrightarrow{OA}(-5;\ 16)$. $A(-5; 16)$. A-t K-ra tükrözve kapjuk a $B(5; 0)$ csúcsot. AC egyenlete: $\overrightarrow{AC}(13;\ -3)$, $\mathbf{n}(3;\ 13) \Rightarrow$ $\Rightarrow 3x + 13y = 193$, BC egyenlete: $\overrightarrow{BC}(3;\ 13)$, $\mathbf{n}(13;\ -3) \Rightarrow 13x - 3y = 65$. C csúcsot K-ra tükrözve is megoldást kapuk. Végtelen sok megoldás létezik, mert $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k\cdot\mathbf{n}$ is megoldást ad, ahol $k \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

V

3693. *I. megoldás:* AM egyenes egyenlete $y - 2 = m(x + 4)$. BM egyenes egyenlete:

$$y+6=-\frac{1}{m}(x-2).\quad y=mx+4m+2 \Rightarrow B(0;\ 4m+2).$$

$$4m + 2 = \frac{2}{m} + 6 \Rightarrow y = -\frac{1}{m}x + \frac{2}{m} + 6 \Rightarrow B\left(0;\ \frac{2}{m} + 6\right),\ 2m^2 + 4m - 1 = 0.$$

$$m_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{4} \Rightarrow M_1\left(0;\ 2\left(\sqrt{6} - 1\right)\right),\ m_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{4} \Rightarrow M_2\left(0;\ -2\left(\sqrt{6} + 1\right)\right).$$

II. megoldás: $\overrightarrow{BM}(-2;\ y + 6)$. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk B koordinátáit.
III. megoldás: $AM^2 = 4^2 + (y - 2)^2$, $BM^2 = 4 + (y + 6)^2$, $AB^2 = 36 + 64$. Pitagorasz tételét alkalmazva $AM^2 + BM^2 = AB^2$. Az egyenlet megoldásával megkapjuk M koordinátáit.

3694. $x + 3y = 13$.

3695. Az adott pont és az adott befogó egyenes távolsága adja a befogó hosszát, amelyből a kívánt magasság kiszámítható. A befogó egyenlete: $2x + y = 2$. $BC \cap AC = C$; $C(-1;\ 4)$. $AC = 4\sqrt{5}$, $m = 2\sqrt{10}$.

3696. $C\left(\frac{22}{5};\ \frac{6}{5}\right)$.

3697. $A(4; 2)$, $B(8; b)$, $C(-2; c)$. $\overrightarrow{CA}(6;\ 2-c)$, $\overrightarrow{CB}(10;\ b-c)$. $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} =$ $= 60 + (2 - c)(b - c) = 0 \Rightarrow c^2 - (b + 2)c + 2b + 60 = 0$. Akkor létezik a feltételnek megfelelő háromszög, ha az egyenletnek legalább egy valós megoldása van, vagyis $D \geq 0$, $D = (b + 2)^2 - 4(2b + 60) \geq 0 \Rightarrow b \geq 2 + 4\sqrt{15}$ vagy $b \leq 2 - 4\sqrt{15}$.

3698. Ha a kocka éle a, akkor a befogók: a és $a\sqrt{2}$. Legyen $A(a; 0)$, $B\left(0;\ a\sqrt{2}\right)$, $C(0; 0)$.

Ekkor $A_1\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AA_1}\left(-a;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{CC_1}\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CC_1} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{CC_1}.$$

3699. Legyen $A\left(0;\ a\sqrt{3}\right)$, $B(-a; 0)$, $C(a; 0)$. $S\left(0;\ \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$. SC felezőpontja $F_1\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$.

f_1: $\mathbf{n}\left(3; -\sqrt{3}\right)$, $F_i\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) \Rightarrow 3x - \sqrt{3}y = a$, $y = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{3}$. $H\left(\frac{a}{3}; 0\right)$ a BC oldal harmadolópontja. Ugyanígy f_2 egyenletét kielégítik a másik harmadolópont koordinátái.

3700. $A(9; 0)$, $B(-3; -6)$.

3701. Legyen $A(0; a)$, $B(b; 0)$, $C(-b; 0) \Rightarrow D(0; 0)$. $\overrightarrow{AC}(b; a)$, $\mathbf{n}(a; -b)$, AC: $ax - by = -ab$, DE: $bx + ay = 0$. $DE \cap AC = E$; $\left.\begin{array}{l} ax - by = -ab \\ bx + ay = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} /\cdot a \\ /\cdot b \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2x - aby = -a^2b \\ b^2x + aby = 0 \end{array}\right\} + \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{a^2b}{a^2+b^2} \Rightarrow y = \frac{ab^2}{a^2b^2}$, $E\left(-\frac{a^2b}{a^2+b^2}; \frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)$. $F\left(-\frac{a^2b}{2\left(a^2+b^2\right)}; \frac{ab^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)$.

$\overrightarrow{EB}\left(\frac{2a^2b+b^3}{a^2+b^2}; -\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)$. $\overrightarrow{FA}\left(\frac{a^2b}{2\left(a^2+b^2\right)}; \frac{2a^3+ab^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)$. $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{FA}$.

3702. AT egyenlete $y = 1$. Mivel $BC \perp AT$, BC egyenlete. $x = 16$. Ezért $F(16; 13)$, $B(16; b)$, $C(16; c)$. F a BC felezőpontja: $c = 26 - b$. $AB = BC \Rightarrow b^2 - 34b + 117 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow B_1\left(16; 17 + 2\sqrt{43}\right)$, $C_1\left(16; 9 - 2\sqrt{43}\right)$, $B_2\left(16; 17 - 2\sqrt{43}\right)$, $C_2\left(16; 9 + 2\sqrt{43}\right)$.

3703. P kielégíti a szimmetriatengely egyenletét, tehát $PQ = PR$. QR a háromszög alapja. T legyen az alap felezőpontja. QR: $2x + y = -5$. $QR \cap PT = T$; $T\left(-\frac{16}{5}; \frac{7}{5}\right)$. Az egyenlő szárú háromszög száraihoz tartozó magasságai egyenlők $2 \cdot t_{PQT} = t_{PQR}$, $2 \cdot \frac{QT \cdot PT}{2} = \frac{PQ \cdot m}{2}$,

$QT = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $PT = \frac{13\sqrt{5}}{5}$, $PQ = \sqrt{41}$. $m \approx 4{,}9$.

3704. $P_1(-10; -11)$.

3705. Mivel PQ párhuzamos az adott egyenessel, PQ felezőmerőlegese metszi ki az egyenesből a keresett pontot. $M(4; -2)$.

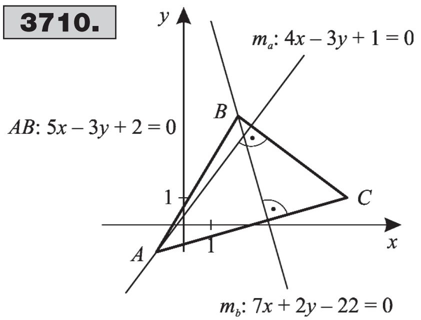
3706. *a)* $P\left(-\frac{27}{5}; \frac{12}{5}\right)$. *b)* $P(11{,}5; -14{,}5)$.

3707. *a)* m_b: $x = 2$; $\overrightarrow{BA}(6; -6) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -1)$, $C(0; 0)$; m_c: $x - y = 0$; $m_b \cap m_c = M$;
$\left.\begin{array}{r} x = 2 \\ \underline{x - y = 0} \end{array}\right\} \Rightarrow M(2; 2)$. *b)* $M(-4; -1)$; *c)* $M(4; -16)$; *d)* m_b: $x = 0$; $\overrightarrow{CB} = \mathbf{n}(c; b) \Rightarrow$
$\Rightarrow m_a: cx + by = ac$. $\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ \underline{cx + by = 0} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(0; \frac{ac}{b}\right)$. *e)* $\overrightarrow{AB}(3; -1)$, m_c: $\mathbf{n}(3; -1)$, $C(3; 5) \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x - y = 4$; $\overrightarrow{BC}(-1; 4)$, m_a: $\mathbf{n}(1; -4)$, $A(1; 2) \Rightarrow x - 4y = -7$. $m_a \cap m_c = M$;
$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 4 \;/\cdot 4 \\ \underline{x - 4y = -7} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{23}{11}$; $y = \frac{25}{11} \Rightarrow M\left(\frac{23}{11}; \frac{25}{11}\right)$.

3708. *a)* $S\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$. A körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. AC felezőmerőlegese: $x + 2y = 4$, AB felezőmerőlegese: $x = 2$. $K(2; 1)$. m_b: $x + 2y = 5$,

m_c: $x = 1$, $M(1; 2)$. $\overrightarrow{MS}\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{SK}\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, ebből: $\overrightarrow{MS} = 2 \cdot \overrightarrow{SK}$, a három pont egy egyenesen van. *b)* $S\left(\frac{5}{2}; 2\right)$, $K(1; 2)$, $M(3; 2) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ a három pont az $y = 2$ egyenletű egyenesre illeszkedik. *c)* $S\left(\frac{13}{3}; 2\right)$, $K\left(4; \frac{7}{4}\right)$, $M\left(5; \frac{5}{2}\right)$, $\overrightarrow{SM} = 2 \cdot \overrightarrow{KS}$. *d)* $S\left(\frac{4}{3}; 6\right)$, $K\left(\frac{13}{4}; \frac{13}{2}\right)$, $M\left(-\frac{5}{2}; 5\right)$, $\overrightarrow{SM} = 2 \cdot \overrightarrow{KS}$.

3710.



V

3709. Mivel a három nevezetes pont egy egyenesen van, ezért közülük kettő meghatározza az Euler-egyenest. $141x - 35y = 212$.

3710. $AB \cap m_a = A$; $A(-1; -1)$. $AB \cap m_b = B$; $B(2; 4)$. $BC: 3x + 4y = 22$, $AC: 2x - 7y = 5$. $BC \cap AC = C$; $C(6; 1)$.

3711. *a)* $BC: x = 2$, $AC: x - 4y = -14$. $BC \cap AC = C$; $C(2; 4)$. *b)* $C\left(5; -\frac{5}{4}\right)$; *c)* $C(67; -12)$.

3712. *a)* Az adott pont koordinátái nem elégítik ki egyik magasságvonal egyenletét sem, ezért legyen: $A(3; -4)$; $m_b: 7x - 2y = 1$; $m_c: 2x - 7y = 6$; $AC \perp m_b$, $AC: 2x + 7y = -22$; $AC \cap m_c = C$; $C(-4; -2)$. $AB \perp m_c$, $AB: 7x + 2y = 13$; $AB \cap m_b = B$; $B(1; 3)$. *b)* $B(-2; -1)$, $C(7; -7)$, *c)* $B(-11; -7)$, $C(-0{,}4; 4{,}9)$.

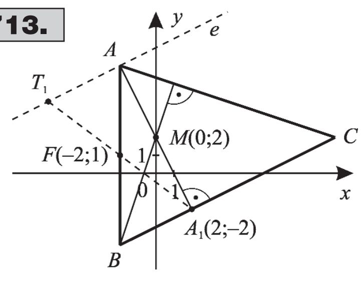
3713. A_1A egyenlete: $2x + y = 2$. T az A_1 F-re vonatkozó tükörképe. $T(-6; 4)$. $TA \parallel CB \Rightarrow$ $\Rightarrow TA$ egyenlete: $x - 2y = -14$. $TA \cap A_1A = A$; $A(-2; 6)$. A-t F-re tükrözve kapjuk a $B(-2; -4)$ csúcsot. $BM \perp AC$, $AC: x + 3y = 16$, $BC: x - 2y = 6$. $AC \cap BC = C$; $C(10; 2)$.

3714. Legyen $C(x_1; y_1)$. Ekkor (1) $2x_1 - 3y_1 = 0$, $S(x; y)$. $\frac{-2 + 1 + x_1}{3} = x \Rightarrow x_1 = 3x + 1$ és $\frac{2 + 0 + y_1}{3} = y \Rightarrow y_1 = 3y - 2$. Behelyettesítve (1)-be, $2(3x + 1) - 3(3y - 2) = 0 \Rightarrow 6x - 9y = -8$, kivéve az egyenesnek azt a Q pontját, amely AB egyenesére illeszkedik, ahol $Q\left(-\frac{1}{6}; \frac{7}{9}\right)$.

3715. $AS : SA_1 = 2 : 1 \Rightarrow A_1(9; 0)$. $BC \perp AM$, BC egyenlete: $2x - y = 18$. $AC \perp BM$, $\overrightarrow{BM}(b_1 - 4; b_2 + 2)$, AC egyenlete: $(b_1 - 4)x + (b_2 + 2)y = 0$. BC felezőpontja A_1, innen $b_1 + c_1 = 18$, $b_2 + c_2 = 0$. B koordinátái kielégítik BC egyenletét: $2b_1 - b_2 = 18$, C koordinátái kielégítik AC egyenletét: $(b_1 - 4)c_1 + (b_2 + 2)c_2 = 0$.

A kapott $\left\{\begin{aligned} b_1 + c_1 &= 18; \\ b_2 + c_2 &= 0; \\ 2b_1 - b_2 &= 18; \\ (b_1 - 4)c_1 + (b_2 + 2)c_2 &= 0 \end{aligned}\right.$ egyenletrendszert megoldva kapjuk: $B(12; 6)$, $C(6; -6)$. A feladatnak egy megoldása van.

3713.



3716. $x=\frac{31}{11}$; $y=-\frac{45}{11}$.

3717. *a) I. megoldás:* Legyen $A(3;5)$, $C(4;2)$. A négyzet középpontja $K\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$. $\overrightarrow{KC}\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ $+90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{KD}\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{OD}(5;4)$, $D(5;4)$. D-t tükrözve K-ra: $B(2;3)$.

II. megoldás: A keresett B, illetve D pont rajta van AC felezőmerőlegesén, és $KD=KB=KC=KA$. AC felezőmerőlegese: $x-3y=-7$. $KA=KD\Rightarrow KA^2=KD^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{10}{4}.\quad \left.\begin{array}{r} x^2+y^2-7x-7y+22=0\\ x=3y-7\end{array}\right\}\Rightarrow y^2-7y+12=0,\ y_1=4,\ \ y_2=3,$$

$D(5;4)$, $B(2;3)$.

b) $\left(\frac{11}{2};\frac{7}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{13}{2}\right)$.

3718. $C(-1;-1)$. $B(-2;6)$. $D(6;0)$.

3719. K-ból AD-re állított merőleges kimetszi AD felezőpontját, F-et. KF egyenlete: $\mathbf{n}(1;\ 2)$, $x+2y=3$. $AD\cap KF=F$; $\left.\begin{array}{r}2x-y=-4\\ x+2y=3\end{array}\right\}\Rightarrow F(-1;2)$. $\overrightarrow{KF}(-2;1)$ $-90°$-kal elforgatva: $\overrightarrow{KE}(1;2)$. $\overrightarrow{KE}=\overrightarrow{FD}$ miatt $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{OD}(0;4)\Rightarrow D(0;4)$. D-t F-re tükrözve: $A(-2;0)$, A-t K-ra tükrözve $C(4;2)$, D-t K-ra tükrözve: $B(2;-2)$.

3720. e_1: $x+2y+1=0$, e_2: $6x-3y=5$, e_3: $2x-y=1$, e_4: $4x+8y+7=0$. $\mathbf{n}_1(1;2)$, $\mathbf{n}_2(6;-3)$, $\mathbf{n}_3(2;-1)$, $\mathbf{n}_4(4;8)$. $\mathbf{n}_1\parallel\mathbf{n}_4$, illetve $\mathbf{n}_2\parallel\mathbf{n}_3$, $\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0\Rightarrow\mathbf{n}_1\perp\mathbf{n}_2$, illetve $\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}_4=0\Rightarrow$ $\Rightarrow\mathbf{n}_3\perp\mathbf{n}_4$. Valóban téglalapot határolnak.

3721. $D(1;2)$. $C(7;-1)$.

3722. AC egyenlete: $y=6$. $AC\cap AB=A$; $A(2;6)$. A-t M-re tükrözve: $C(22;6)$. $AB\perp BC$, BC: $x+3y=40$, $AB\cap BC=B$; $B(4;12)$. B-t M-re tükrözve: $D(20;0)$.

3723. $A(3;3)$. $D(-1;-1)$, $B(1;5)$.

3724. AB egyenlete: $x-3y=-1$. $C\in y=x-1\Rightarrow C(c;c-1)$. $AC=5\sqrt{2}\Rightarrow AC^2=50$, $(c-2)^2+(c-1-1)^2=50\Rightarrow(c-2)^2=25\Rightarrow c-2=\pm5$. $C_1(7;6)$, $C_2(-3;-4)$. $CB\perp AB$, C_1B: $\mathbf{n}(3;1)$, $3x+y=27$. C_2B: $\mathbf{n}(3;1)$, $3x+y=-13$. $AB\cap C_1B=B_1$; $B_1(8;3)$. $AB\cap C_2B=B_2$; $B_2(-4;-1)$. AC_1 felezőpontja: $K_1\left(\frac{9}{2};\frac{7}{2}\right)$, C_1-t K_1-re tükrözve: $D_1(1;4)$. AC_2 felezőpontja: $K_2\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$, C_2-t K_2-re tükrözve: $D_2(3;-2)$.

3725. $B(14;4)$. $D(-15;6)$.

3726. BD átló egyenlete $y=x-2$. A-t M-re tükrözve: $C(14;6)$. Legyen $B(b_1;b_2)$, $b_2=b_1-2$, $\overrightarrow{AB}(b_1;b_1-6)$, $\overrightarrow{CB}(b_1-14;b_1-8)$. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. $b_1(b_1-14)+(b_1-6)(b_1-8)=0\Rightarrow B_1(12;10)$, $B_2(2;0)$. Mivel $B_1=D_2$ és $B_2=D_1$, a feladatnak egy megoldása van.

V

3727. A téglalap középpontja: $K\left(\frac{7}{2}, 2\right)$. $AK = \frac{5}{2}$. $AK = BK \Rightarrow AK^2 = BK^2$. Legyen $B(x; y)$, ahol $x = 3y \Rightarrow B(3y; y)$. $\left(3y - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$. Így $B_1(6; 2)$, $B_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. B-t K-ra tükrözve kapjuk D-t, $D_1(1; 2)$, $D_2\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

3728. Legyenek a téglalap csúcsaihoz vezető helyvektorok rendre: **a, b, c, d**. Ekkor, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}(3; -1)$, $3 \cdot \overrightarrow{AB}(9; -3)$. $\overrightarrow{AB}$ 90°-os elforgatottja $\overrightarrow{BC_1}(3; 9)$, illetve $\overrightarrow{BC_2}(-3; -9)$. $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b} + \overrightarrow{BC_1}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} + \overrightarrow{BC_2}$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \overrightarrow{AD_1}$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{a} + \overrightarrow{AD_2}$, ahol $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{BC_2}$. Innen: $C_1\left(\frac{15}{2}; 9\right)$, $C_2\left(\frac{3}{2}; -9\right)$, $D_1\left(\frac{9}{2}; 10\right)$, $D_2\left(-\frac{3}{2}; -8\right)$.

3729. Legyenek a téglalap csúcsaihoz, illetve az adott felezőponthoz vezető helyvektorok rendre **a, b, c, d, e, f**. $\overrightarrow{FE} = (\mathbf{e} - \mathbf{f})\,(9; -3)$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{FE}(3; -1)$. $\frac{1}{3}\overrightarrow{FE}$ $+90°$-kal elforgatva: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}\,(1; 3)$. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EA}\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. $\mathbf{a} = \mathbf{e} + \overrightarrow{EA} \Rightarrow A\,(4; 0)$. $\mathbf{d} = \mathbf{f} + \overrightarrow{FD}$, ahol $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EA}$. Innen $D(-5; 3)$. A-t E-re, D-t F-re tükrözve: $B(3; -3)$, $C(-6; 0)$.

3730. Legyen $A(0; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; a)$, $D(0; a)$. $AP^2 + CP^2 = x^2 + y^2 + (x-b)^2 + (y-a)^2$, $BP^2 + DP^2 = (x-b)^2 + y^2 + x^2 + (y-a)^2$.

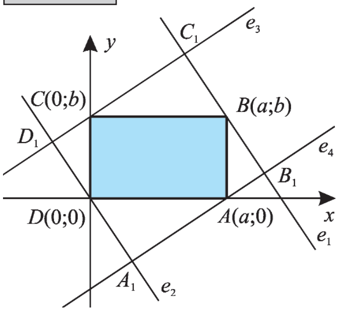
3731. Legyen $A(a; 0)$, $B(a; b)$, $C(0; b)$, $D(0; 0) \Rightarrow K\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$. $e_1 \parallel e_2$, $e_3 \parallel e_4$, és $e_1 \perp e_3$, e_2: $y = mx$, e_4: $y = -\frac{1}{m}(x - a)$. $e_2 \cap e_4 = A_1$, $A_1\left(\frac{a}{m^2+1}; \frac{ma}{m^2+1}\right)$. e_1: $y - b = m(x - a) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = mx - ma + b$; e_3: $y = -\frac{1}{m}x + b$. $e_1 \cap e_3 = C_1$, $C_1\left(\frac{m^2 a}{m^2+1}; \frac{(m^2+1)b - am}{m^2+1}\right)$.

A_1C_1 felezőpontja $K_1(x_1; y_1)$ $x_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{am^2}{m^2+1} + \frac{a}{m^2+1}\right] = \frac{a}{2}$,

$y_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{(m^2+1)b - am + am}{m^2+1}\right] = \frac{b}{2}$. $K_1\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

3731.



3732. Legyen $A(0; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; a)$, $D(0; a)$. A szögfelező egyenlete: $y = x \Rightarrow P(b; b)$. BD egyenlete: $ax + by = ab$. $BD \cap AP = M$; $M\left(\frac{ab}{a+b}; \frac{ab}{a+b}\right)$. AC egyenlete: $ax - by = 0$, $y = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow x = \frac{b^2}{a+b}$, $N\left(\frac{b^2}{a+b}; \frac{ab}{a+b}\right)$. $\overrightarrow{DB}(b; -a)$, $\overrightarrow{NP}\left(\frac{ab}{a+b}; \frac{b^2}{a+b}\right)$. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{NP}$.

3733. $A(6;6)$ illeszkedik az $x-3y=-12$ egyenletű egyenesre. A-t K-ra tükrözve: $C(2;2)$. $DB\perp AC$, BD egyenlete: $x+y=8$. $AB\cap BD=B$; $B(3;5)$. B-t K-ra tükrözve: $D(5;3)$.

3734. AC egyenlete: $x-y=-2$. BD egyenlete $x+y=4$.

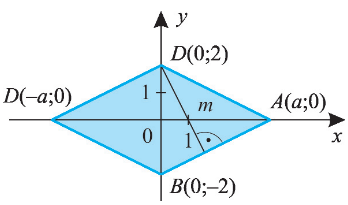
3735. $\overrightarrow{AB}(-a;b)$ $-90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{AP}(b;a)$. $\mathbf{p}=\mathbf{a}+\overrightarrow{AP}$, $(a+b;a)$ BP felezőpontja $K\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$. $\overrightarrow{CB}(a;b)$, $+90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{CS}(-b;a)$. $\mathbf{s}=\mathbf{c}+\overrightarrow{CS}$, $S(-a-b;a)$, SB felezőpontja: $L\left(-\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$. Hasonlóan: $M\left(-\frac{a+b}{2};-\frac{a+b}{2}\right)$, $N\left(\frac{a+b}{2};-\frac{a+b}{2}\right)$. Innen $\overrightarrow{KM}(a+b;a+b)$, $\overrightarrow{LN}(-(a+b);a+b)$, tehát $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN}=0$ és $|\overrightarrow{KM}|=|\overrightarrow{LN}|\Rightarrow$ $\Rightarrow KLMN$ négyzet.

3736. $A(-22;-12)$. $C(4;14)$. $B(-2;-6)$. $D(-16;8)$.

3737. BD átló $x-y=2$. $AC: x+y=9$. $AC\cap BD=K$; $K\left(\frac{11}{2};\frac{7}{2}\right)$. A-t K-ra tükrözve: $C(4;5)$.

$a=\sqrt{29}$. $\begin{matrix} AB^2=29: \\ BD: \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} (x-7)^2+(y-2)^2=29 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\}$ Innen $B(9;7)$, $D(2;0)$.

3738.



3738. $BD=4$, $AC=2a$, $(a>0)$, $BC=\sqrt{a^2+4}$.

$t=\frac{BD\cdot AC}{2}=BC\cdot m.$

$4a=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+4}\Rightarrow 3a^2+12=4a^2\Rightarrow a=2\sqrt{3}$.

$A(2\sqrt{3};0)$, $C(-2\sqrt{3};0)$. AB egyenlete: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$,

BC egyenlete: $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$; CD egyenlete:

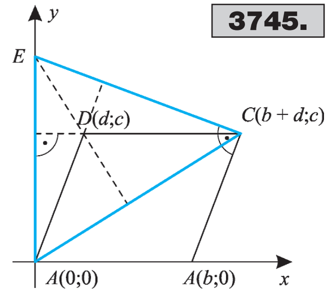
$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$, AD egyenlete: $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$.

3739. $\overrightarrow{AB}(5;2)\Rightarrow\overrightarrow{CD}(5;2)$ CD: $2x-5y=-57$, $\overrightarrow{BP}(4;12)\Rightarrow\mathbf{n}_{BC}(3;-1)$ BC: $3x-y=12$. $CB\cap CD=C$; $C(9;15)$. AC felezőpontja $K\left(5;\frac{19}{2}\right)$, B-t K-ra tükrözve: $D(4;13)$. $AB=\sqrt{29}$, $BC=3\sqrt{10}$, innen $k=2(\sqrt{29}+3\sqrt{10})$.

3740. $E\left(\frac{3}{8};\frac{39}{20}\right)$.

3741. A-t Q-ra tükrözve: $C(3;1)$. BQ egyenlete: $2x-y=0$; AB: $x+y=2$. $AB\cap BQ=B$; $B\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. $AC=2\sqrt{5}$, $BQ=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $BD=\frac{2\sqrt{5}}{3}$, $t=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{10}{3}$ területegység.

3742. Az AC egyenlete $y=1$. $AB=\sqrt{5}$, $C(c;1)$. $BC=\sqrt{(c-1)^2+4}=2\sqrt{5}\Rightarrow$ $\Rightarrow(c-1)^2+4=20\Rightarrow(c-1)^2=16$. $c_1=5$, $c_2=-3$, $C_1(5;1)$, $C_2(-3;1)$. B-t AC felezőpontjára tükrözve kapjuk a D pontot. Így $D_1(6;3)$, $D_2(-2;3)$.



3745.

3743. $BD = AC = 5\sqrt{5}$.

3744. $E\left(12; \frac{9}{2}\right)$, $F(9; 9)$. AE: $y = \frac{3}{8}x$, AF: $y = x$, $BD: 3x + 2y = 30$. $AE \cap BD = P$; $P(8; 3)$, $AF \cap BD = Q$; $Q(6; 6)$. BD harmadolópontjai: $H_1(8; 3)$, $H_2(6; 6)$, tehát $P = H_1$, $Q = H_2$.

3745. CE: $dx + cy = d(d + b) + c^2$, E; $\left.\begin{array}{l} dx+cy=d^2+db+c^2 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow E\left(0; \frac{c^2+d^2+bd}{c}\right)$. $\overrightarrow{ED}\left(d; -\frac{d^2+bd}{c}\right)$. $\overrightarrow{AC}(b + d; c)$, $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AC} = bd + d^2 - d^2 - bd = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{ED} \perp \overrightarrow{AC}$. Ha a paralelogramma téglalap, akkor $E = D$. A feladat állítása elemi úton is könnyen belátható. Az ACE háromszögben CD, illetve AD magasságvonalak, metszéspontja D, a háromszög magasságpontja. Így ED a harmadik magasságvonal.

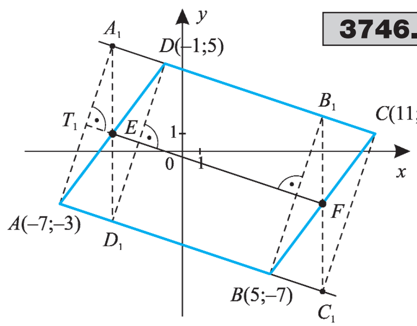
3746. $C(c; 1)$, $D(-1; d)$, $A(-7; 3)$, $B(5; -7)$. $\frac{c-7}{2} = \frac{-1+5}{2} \Rightarrow c = 11 \Rightarrow C(11; 1)$, $\frac{d-7}{2} = \frac{1-3}{2} \Rightarrow d = 5 \Rightarrow D(-1; 5)$. $E(-4; 1)$, $F(8; -3)$, $\overrightarrow{EF}(12; -4) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 3)$. EF: $x + 3y = -1$ egyenesre tükrözzük a paralelogramma csúcsait. EF-re merőleges egyenesek normálvektora: $\mathbf{n}(3; -1)$. AT_1: $3x - y = -18$. $AT_1 \cap EF = T_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x - y = -18 / \cdot 3 \\ x + 3y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_1\left(-\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$. A-t T_1-re tükrözve: $A_1(-4; 6)$. A_1-t E-re tükrözve kapjuk a $D_1(-4; -4)$ pontot. Mivel $A_1D_1 \perp$ az x tengelyre, B_1C_1 is merőleges, ezért B_1C_1 egyenlete: $x = 8$. $\overrightarrow{DC}(12; -4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{n}(1; 3)$, CD: $x + 3y = 14 \Rightarrow B_1(8; 2)$. B_1-et F-re tükrözve: $C_1(8; -8)$.

3747. $\overrightarrow{AB}(8; 4) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -2)$, GH egyenlete: $x - 2y = -3$, BC egyenlete: $x = 8$, AD egyenlete $x = 0$. Innen: $G\left(0; \frac{3}{2}\right)$, $H\left(8; \frac{11}{2}\right)$. AB egyenlete: $x - 2y = 0$, DC egyenlete: $x - 2y = -12$, EF egyenlete $x = 5$. Innen: $F\left(5; \frac{5}{2}\right)$, $E\left(5; \frac{17}{2}\right)$. $\overrightarrow{FH}(3; 3) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -1)$, FH egyenlete: $x - y = \frac{5}{2}$, $\overrightarrow{AC}(8; 10) \Rightarrow \mathbf{n}(5; -4)$, AC egyenlete: $5x - 4y = 0$, $\overrightarrow{GE}(5; 7) \Rightarrow \mathbf{n}(7; -5)$, GE egyenlete: $7x - 5y = -\frac{15}{2}$. $GE \cap FH = M \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 7x - 5y = -\frac{15}{2} \\ x - y = \frac{5}{2} / \cdot 5 \end{array}\right\} - \Rightarrow$

$\Rightarrow M\left(-10; -\frac{25}{2}\right)$. AC egyenletébe behelyettesítve: $-50 + 4 \cdot \frac{25}{2} = 0$, így mindhárom egyenes átmegy az M ponton.



3746.

3748. Tükrözzük a C pontot az AB felezőmerőlegesére. *a)* $F\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}(-6;7)\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{n}(-6;7)$. A felezőmerőleges f: $-6x+7y=\frac{5}{2}$. $e\perp f$, e: $7x+6y=-1$. $T\left(-\frac{22}{85};\frac{23}{170}\right)$. C-t T-re tükrözve: $D\left(\frac{41}{85};-\frac{62}{85}\right)$. *b)* $D\left(-\frac{23}{13};\frac{2}{13}\right)$; *c)* $D(1{,}2;\,-6{,}4)$.

3749. *I. megoldás:* $AC=\sqrt{164}=2\sqrt{41}$. $t=\frac{AC\cdot BD}{2}=41\Rightarrow BD=\sqrt{41}$. $AM:MC=3:2\Rightarrow M\left(\frac{24}{5};6\right)$. $MC=\frac{2}{5}2\cdot\sqrt{41}=\frac{4}{5}\sqrt{41}$. $MB=\frac{5}{8}MC\Rightarrow\frac{5}{8}\overrightarrow{MC}\left(2;\frac{5}{2}\right)$ $+90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{MB}\left(-\frac{5}{2};2\right)$, $-90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{MD}\left(\frac{5}{2};-2\right)$. $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD}$. Innen $B(7{,}3;\,4)$, $D(2{,}3;\,8)$.

II. megoldás: $MB=\frac{\sqrt{41}}{2}$, $M\left(\frac{24}{5};6\right)$. B, illetve D az AC-re M-ben állított merőlegesre illeszkedik $\left(4x+5y=\frac{246}{5}\right)$, illetve $\frac{\sqrt{41}}{2}$ egység távolságra van M-től. Így B-t, illetve D-t az

$$\left.\begin{aligned}\left(x-\frac{24}{5}\right)^2+(y-6)^2&=\frac{41}{4}\\ 4x+5y&=\frac{246}{5}\end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszer megoldása adja.

3750. *a)* Legyen $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $M(m;0)$. Ekkor $D(-a;a+m)$, $C(a;a-m)$, CD felezőpontja $F(0;a)$, $\overrightarrow{DC}(2a;-2m)\Rightarrow\mathbf{n}(a;-m)$. CD felezőmerőlegese: $ax-my=-am$. AB felezőmerőlegese: $x=0\Rightarrow P(0;a)$, ha $m\neq 0$. Ha $m=0$, akkor a két felezőmerőleges egybeesik. *b)* $\overrightarrow{CD}(a;-m)\Rightarrow\mathbf{n}(m;a)$, CD: $mx+ay=a^2$. MN: $\mathbf{n}(a;-m)$, $ax-my=am$. $CD\cap MN=N$;

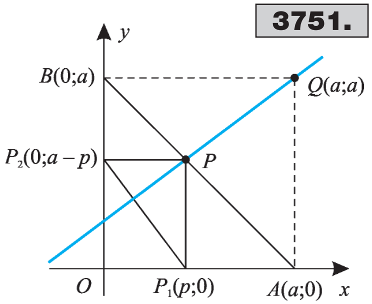
$$\left.\begin{aligned}ax-my&=am\\ mx+ay&=a^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow N\left(\frac{2a^2m}{a^2+m^2};\frac{a^3-a^2m^2}{a^2+m^2}\right).\ \overrightarrow{AN}\left(\frac{2a^2m+a^3+am^2}{a^2+m^2};\frac{a^3-a^2m}{a^2+m^2}\right);$$

$$\overrightarrow{BN}\left(\frac{2a^2m-a^3-am^2}{a^2+m^2};\frac{a^3-a^2m}{a^2+m^2}\right);$$

$$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{(2a^2m)^2-(a^3+am^2)^2+(a^3-a^2m)^2}{(a^2+m^2)^2}=$$

$$=\frac{4a^4m^2-4a^4m^2}{(a^2+m^2)^2}=0.$$

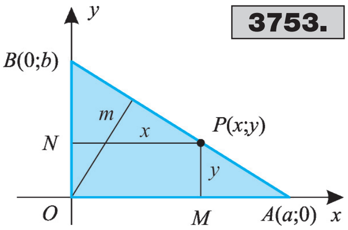
3751.



3751. Legyen $0<p<a$, $P(p;a-p)$, $\overrightarrow{P_2P_1}(p;p-a)$, P-ből P_1P_2-re bocsátott merőleges egyenlete: $px+(p-a)y=$ $=p^2-(p-a)^2\Rightarrow px+(p-a)y=2pa-a^2$. Bármely p-re $Q(a;a)$, pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét.

3752. Legyen O az origó, $K(k_1; k_2)$, $L(l_1; l_2)$,
$M\left(\dfrac{k_1+l_1}{2}; \dfrac{k_2+l_2}{2}\right)$, $K_1(-k_2; k_1)$, $L_1(l_2; -l_1)$.
$\overrightarrow{K_1L_1}[(l_2+k_2); (l_1+k_1)]$. $\overrightarrow{OM}$-nak a $-90°$-os elforgatottja $\left(\dfrac{k_2+l_2}{2}; -\dfrac{k_1+l_1}{2}\right)$, ennek kétszerese. $\overrightarrow{K_1L_1}$. Ebből következik, hogy $\overrightarrow{K_1L_1} = 2\cdot\overrightarrow{OM}$ és $\overrightarrow{K_1L_1} \perp \overrightarrow{OM}$.

3753.



3753. $\left.\begin{aligned} PM^2+PN^2&=x^2+y^2\\ OP^2&=x^2+y^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow PM^2+PN^2=OP^2$, OP^2 akkor minimális, ha $OP \perp AB$.
Az OAB háromszög területe: $t=\dfrac{ab}{2}=\dfrac{AB\cdot m}{2} \Rightarrow m=\dfrac{ab}{AB}$, ahol $AB=\sqrt{a^2+b^2}$. Így a keresett minimum: $m=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3754. Legyen $A(a;0)$, $B(b;0)$, $C(0;c)$, $P(x;y)$. $PB^2+PC^2=2\cdot PA^2 \Rightarrow (x-b)^2+y^2+x^2+$ $+(y-c)^2=2(x-a)^2+2y^2 \Rightarrow (4a-2b)x-2cy=2a^2-b^2-c^2$, ami egyenes egyenlete.

Pont és egyenes távolsága. Területszámítás

3755. *a)* $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{9+16}=5$, $\dfrac{3x+4y+20}{5}=0$; *b)* $\dfrac{6x-8y+15}{10}=0$;
c) $\dfrac{\sqrt{2}\,x+\sqrt{7}\,y-3}{3}=0$; *d)* $\dfrac{x-y+3}{\sqrt{2}}=0$.

3756. *a)* Az origón átmenő, az adott egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $x-y=0$.
$M: \left.\begin{aligned} x+y&=1\\ x-y&=0\end{aligned}\right\} + \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$, $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

$$d=MO=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) $d=\left|\dfrac{0-2\cdot 0+3}{\sqrt{5}}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. *c)* $d=\dfrac{12}{5}$; *d)* $d=\dfrac{3}{10}$; *e)* $d=\dfrac{c}{\sqrt{A^2+B^2}}$;
f) $\dfrac{x-y+2^{10}}{\sqrt{2}}=0 \Rightarrow d=\dfrac{2^{10}}{\sqrt{2}}=512\sqrt{2}$.

3757. $\mathbf{n}(4;3)$, $A(-2;15) \Rightarrow m: 4x+3y=37$.
$\left.\begin{aligned} 3x-4y&=-16/\cdot 3\\ 4x+3y&=37/\cdot 4\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 9x-12y&=-48\\ 16x+12y&=148\end{aligned}\right\} + \Rightarrow 25x=100$. $x=4$, $y=7$, $M(4;7)$.
$d=MA=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{100}=10$.

3758. *a)* $P(1;\,2)$, $f \perp e$, $f:\ y-2=\dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

$$M:\left.\begin{array}{l} y=-2x+2 \\ \underline{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{1}{5};\ \frac{8}{5}\right);\quad d=MP=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{20}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

b) $d=\left|\dfrac{4\cdot(-3)-3\cdot 2-7}{5}\right|=\left|\dfrac{-25}{5}\right|=5$; *c)* $d=\dfrac{47}{5}$; *d)* $d=7\sqrt{2}$; *e)* $d=3$;

f) $d=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$; *g)* $d=\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$.

3759. $d=\dfrac{27\sqrt{10}}{10}$.

3760. Az $A(7;\,3)$, $B(5;\,4)$ pontok kielégítik az egyenes egyenletét. Ezért:

$$\left.\begin{array}{l} 7a+b=3 \\ \underline{5a+b=4} \end{array}\right\} - \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{13}{2}.\ \text{Innen } y=-\frac{1}{2}x+\frac{13}{2} \Rightarrow x+2y-13=0.$$

$$d=\left|\frac{2+2(-6)-13}{\sqrt{5}}\right|=\frac{23}{\sqrt{5}}=\frac{23\sqrt{5}}{5}.$$

3761. $S(3;\,5)$, AB egyenlete: $5x-2y=11$. $d=\left|\dfrac{15-10-11}{\sqrt{29}}\right|=\dfrac{6}{\sqrt{29}}$. BC egyenlete: $x-4y=-23$. $d=\left|\dfrac{3-20+23}{\sqrt{17}}\right|=\dfrac{6}{\sqrt{17}}$. AC egyenlete: $2x-y=8$. $d=\left|\dfrac{6+5-8}{\sqrt{5}}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

3762. $S\left(-\dfrac{2}{3};\ \dfrac{10}{3}\right)$. m_b egyenlete: $x+2y=8$.

$$d=\left|\frac{-\frac{2}{3}+\frac{20}{3}-8}{\sqrt{5}}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

3763. $A\,(2;\,1)$, $B\,(0;\,0)$, $C\,(0;\,3)$. $m_a=2$; $m_b=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$; $m_c=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

3764. $A(-4;\,6)$, $B(-2;\,-3)$, $C(4;\,5)$. $m_a=7$; $m_b=\dfrac{70}{\sqrt{65}}$; $m_c=\dfrac{70}{\sqrt{85}}$.

3765. *a)* $A(0;\,0)$, $B(3;\,4)$, $C(7;\,-1)$. $AB=5$, $\overrightarrow{AB}(3;\,4) \Rightarrow \mathbf{n}(4;\,-3)$, $4x-3y=0$. $m_c=\left|\dfrac{28+3}{5}\right|=\dfrac{31}{5}$, $t=\dfrac{5\cdot\frac{31}{5}}{2}=\dfrac{31}{2}$ területegység. *b)* Foglaljuk az ABC háromszöget a $CPQR$ téglalapba. Ekkor $t=t_{CPQR}-t_{CPB}-t_{BQA}-t_{CRA}$, $t=7\cdot 8-\dfrac{6\cdot 7}{2}-\dfrac{2\cdot 6}{2}-\dfrac{8\cdot 1}{2}=$ $=56-21-6-4=25$ területegység. *c)* 7 területegység.

3766. $d_{p,e}=\dfrac{0+8+5}{\sqrt{20}}=\dfrac{13}{\sqrt{20}}>0$, $d_{Q,e}=\dfrac{2+16+5}{\sqrt{20}}>0\Rightarrow$ a két pont az egyenes ugyanazon oldalán van.

3767. *a)* Válasszuk ki az $A(0;-6)$ pontot a $3x-y=6$ egyenletű egyenesen, és számítsuk ki A távolságát a másik egyenestől. $\mathbf{v}(3;-1)\Rightarrow\mathbf{n}(1;3)$, $x+3y=-18$ a merőleges egyenlete.

$\left.\begin{array}{r}3x-y\quad=8\\ x+3y=-18\end{array}\right\}\Rightarrow M\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{31}{50}\right)$. $d=MA=\sqrt{\dfrac{9}{25}+\dfrac{1}{25}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

b) $P\in e_1$, $P(-5;0)$, $d_{P,e_2}=\left|\dfrac{-5+0-3}{\sqrt{5}}\right|=\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$. *c)* $\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$; *d)* $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

V

3768. A két egyenes távolsága adja a négyzet oldalának hosszát. A $3x-5y=10$ egyenletű egyenes egy pontja: $P(0;-2)$. $d=\left|\dfrac{0-5(-2)-4}{\sqrt{34}}\right|=\dfrac{6}{\sqrt{34}}\Rightarrow$ $t=\dfrac{36}{34}=\dfrac{18}{17}$ területegység.

3769. $P(k;l)$, $k,l\in\mathbf{Z}$. $d=\left|\dfrac{3l-4l+4}{5}\right|\in\mathbf{Q}$.

3770. *a)* A $3x+4y+25=0$ egyenletű egyenes egy pontja: $P(-3;-4)$. Az adott egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete: $3x+4y+c=0$. $\left|\dfrac{-9-16+c}{5}\right|=1\Rightarrow|c-25|=5\Rightarrow c_1=30$, $c_2=20$. A keresett egyenesek: $3x+4y+30=0$, $3x+4y+20=0$. *b)* $4x+3y+16=0$, illetve $4x+3y-14=0$. *c)* $x-y-8=0$, illetve $x-y-4=0$.

3771. *a)* $x-y=6$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete $f: x-y+c=0$, $O(0;0)$. $d_{0f}=\left|\dfrac{0-0+c}{\sqrt{2}}\right|=6\Rightarrow|c|=6\sqrt{2}\Rightarrow c=\pm6\sqrt{2}$, $f:\ x-y\pm6\sqrt{2}=0$. Ha $d=2\sqrt{6}$, akkor $x-y\pm4\sqrt{3}=0$. *b)* $3x+4y+5=0$, illetve $3x+4y+15=0$. *c)* $x+3y+5=0$, illetve $x+3y-5=0$. *d)* $y=x+1\pm3\sqrt{2}$.

3772. Legyen $\mathbf{n}(1;n)\Rightarrow x+ny=-4+3n\Rightarrow\dfrac{x+ny+4-3n}{\sqrt{n^2+1}}=0$. $\dfrac{|4-3n|}{\sqrt{n^2+1}}=4\Rightarrow$ $\Rightarrow n_1=0$, $n_2=-\dfrac{24}{7}\Rightarrow x+4=0$, illetve $7x-24y+100=0$.

3773. Legyen $\mathbf{n}(1;n)\Rightarrow\dfrac{x+ny+1-2n}{\sqrt{n^2+1}}=0$, $\left|\dfrac{6+n+1-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right|=5\Rightarrow$ $n_1=\dfrac{3}{4}\Rightarrow x+\dfrac{3}{4}y=$ $=-1+\dfrac{6}{4}\Rightarrow4x+3y=2$, $n_2=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow x-\dfrac{4}{3}y=-1-\dfrac{8}{3}\Rightarrow3x+4y=-11$.

3774. $P(p;0)$, $4x-3y+12=0\Rightarrow\dfrac{4x-3y+12}{5}=0$. $\left|\dfrac{4p+4}{5}\right|=10\Rightarrow$ $p_1=\dfrac{19}{2}$, $p_2=-\dfrac{31}{2}$, $P_1=\left(\dfrac{19}{2};0\right)$, $P_2=\left(-\dfrac{31}{2};0\right)$.

V

3775. Az $A(1; 2)$ és $B(3; -5)$ pontoktól egyenlő távolságra a felezőmerőleges pontjai vannak. $f: 2x - 7y = \frac{29}{2} \Rightarrow 4x - 14y = 29$. A $2x - y - 3 = 0$ egyenes egy pontja $P(1; -1)$.

e: a $2x - y - 3 = 0$ egyenestől 2 egységre haladó párhuzamos egyenesek. $e: 2x - y + c = 0$.
$\left|\frac{2 + 1 + c}{\sqrt{5}}\right| = 2 \Rightarrow |c + 3| = 2\sqrt{5}$. $c_1 = 2\sqrt{5} - 3$, $c_2 = -2\sqrt{5} - 3$. e_1: $2x - y = 3 - 2\sqrt{5}$,
e_2: $2x - y = 3 + 2\sqrt{5}$. $e_1 \cap f = P_1$; $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 3 - 2\sqrt{5} \\ 4x - 14y = 29 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1\left(\frac{13 - 28\sqrt{5}}{24}; \frac{23 + 4\sqrt{5}}{12}\right)$;

$e_2 \cap f = P_2$; $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 3 + 2\sqrt{5} \\ 4x - 14y = 29 \end{array}\right\} \Rightarrow P_2\left(\frac{13 + 28\sqrt{5}}{24}; \frac{4\sqrt{5} - 23}{12}\right)$.

3776. Ha $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ a két egyenes normálegyenlete, akkor azon P pontok mértani helye, amelyek a két egyenestől egyenlő távolságra vannak: $N_1^2 = N_2^2 \Rightarrow (N_1 - N_2)(N_1 + N_2) = 0$. $N_1 - N_2 = 0$, illetve $N_1 + N_2 = 0$ a szögfelezők egyenlete. *a)* $4x + 5y - 3 = 0 \Rightarrow \frac{4x + 5y - 3}{\sqrt{41}} = 0$,
$5x - 4y + 10 = 0 \Rightarrow \frac{5x - 4y + 10}{\sqrt{41}} = 0$, $\frac{4x + 5y - 3}{\sqrt{41}} + \frac{5x - 4y + 10}{\sqrt{41}} = 0 \Rightarrow 9x + y + 7 = 0$,
$\frac{4x + 5y - 3}{\sqrt{41}} - \frac{5x - 4y + 10}{\sqrt{41}} = 0 \Rightarrow x - 9y + 13 = 0$.
b) $\left(3 - \sqrt{5}\right)x + \left(\sqrt{5} - 1\right)y - \sqrt{5} = 0$, $\left(3 - \sqrt{5}\right)x - \left(1 + \sqrt{5}\right)y + \sqrt{5} = 0$.
c) $4x - 2y - 5 = 0$, $-2x - 4y + 10 = 0$. *d)* $x + y - 8 = 0$ vagy $x - y + 2 = 0$.

3777. Az egyenes és az x tengely által alkotott szögfelezők egyenlete: $\frac{4x - 3y + 1}{5} + y = 0 \Rightarrow 4x + 2y + 1 = 0$, $\frac{4x - 3y + 1}{5} - y = 0 \Rightarrow 4x - 8y + 1 = 0$. Az egyenes és az y tengely által alkotott szögfelezők egyenlete:
$\frac{4x - 3y + 1}{5} + x = 0 \Rightarrow 9x - 3y + 1 = 0$, illetve $\frac{4x - 3y + 1}{5} - x = 0 \Rightarrow x + 3y - 1 = 0$.

3778. AB: $12x - 5y = -60$. Mivel AB normálvektora a háromszög belsejébe mutat, ezért a belső pontok távolsága AB-re is, AC-re is pozitív.
AC egyenlete: $y = 0$. $\overrightarrow{BC}(9; -12) \Rightarrow \mathbf{n}(-4; -3)$, BC egyenlete: $-\frac{4x - 3y + 36}{5} = 0$.
f_α: $\frac{12x - 5y + 60}{13} = y \Rightarrow 2x - 3y + 10 = 0$, f_β: $\frac{12x - 5y + 60}{13} = \frac{-4x - 3y + 36}{5} \Rightarrow$,
$\Rightarrow 8x + y - 12 = 0$, f_γ: $\frac{-4x - 3y + 36}{5} = y \Rightarrow x + 2y - 9 = 0$. $f_\alpha \cap f_\beta$; $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = -10 \\ 8x + y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow O(1; 4)$
és ez kielégíti f_γ egyenletét. A beírható kör középpontja $O(1; 4)$, $r = 4$. A belső és külső szögfelezők merőlegesek. $f_{\beta'}$: $\mathbf{n}(1; -8) \Rightarrow x - 8y = -96$; $f_{\gamma'}$: $2x - y = 18$. $f_{\beta'} \cap f_{\gamma'}$; $\left.\begin{array}{l} x - 8y = -96 \\ 2x - y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow P(16; 14)$, ez a pont kielégíti f_α egyenletét.

3779. A $P(2;\ 5)$ ponton átmenő egyenes normálvektora legyen $\mathbf{n}(1;\ n)$; egyenlete: $x + ny = 2 + 5n \Rightarrow \frac{x + ny - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0.$ $d_{A,e} = 2 \cdot d_{BE} \Rightarrow$

$$\left|\frac{5 + 3n - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}}\right| = 2 \cdot \left|\frac{-1 - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}}\right| \Rightarrow |-2n + 3| = 2 \cdot |-5n - 3| \Rightarrow 2(-5n - 3) = -2n + 3$$

vagy $2(-5n - 3) = 2n - 3$, ahonnan: $n = -\frac{9}{8}$ vagy $n = -\frac{1}{4}$. Így e_1: $8x - 8y = -29$ vagy e_2: $4x - y = 3$.

V

3780. e_1: $\frac{5x - 3y - 6}{\sqrt{34}} = 0$, e_2: $\frac{5x - 3y - 12}{\sqrt{34}} = 0$, $P(3; b)$.

$$\left|\frac{5x - 3y - 6}{\sqrt{34}}\right| = \left|\frac{15 - 3b - 12}{\sqrt{34}}\right| \Rightarrow |3 - b| = |1 - b| \Rightarrow 3 - b \neq 1 - b;\quad 3 - b = b - 1 \Rightarrow b = 2.$$

3781. Legyen $\mathbf{n}(1; n) \Rightarrow x + ny = 2 + 5n \Rightarrow \frac{x + ny - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0,$

$$2 \cdot \left|\frac{5 + 3n - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}}\right| = 3 \cdot \left|\frac{-1 - 5n - 2}{\sqrt{n^2 + 1}}\right| \Rightarrow 2|2n - 3| = 3|5n + 3|,$$

$n_1 = -\frac{3}{19}$, $n_2 = -\frac{15}{11}$. e_1: $19x - 3y = 23$, e_2: $11x - 15y = -53$.

3782. Mivel $e_1 \parallel e_2$, a keresett pont az adott e: $x + y = 6$ egyenletű egyenes és az e_1, e_2, középpárhuzamosának: k-nak a metszéspontja. e_1: $3x - 4y = -12$, e_2: $3x - 4y = 8$, $\left.\begin{matrix} E_1(0;\ 3) \\ E_2(0;\ -2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow K\left(0; \frac{1}{2}\right)$. k: $3x - 4y = -2$. $k \cap e = P$; $P\left(\frac{22}{7}; \frac{20}{7}\right)$.

3783. e_1: $\frac{2x - y + 8}{\sqrt{5}} = 0$, e_2: $\frac{x - 2y - 12}{\sqrt{5}} = 0$, $P(5;0)$. d_1: $\frac{10 + 8}{\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}} > 0$, d_2: $\frac{5 - 12}{\sqrt{5}} =$ $= -\frac{7}{\sqrt{5}} < 0$, ezért a szögfelező: $\frac{2x - y + 8}{\sqrt{5}} = -\frac{x - 2y - 12}{\sqrt{5}} \Rightarrow 3x - 3y = 4$. Az alap egyenese: $\mathbf{n}(1;\ 1) \Rightarrow x + y = 5$. A csúcsok: $\left.\begin{matrix} 2x - y = -8 \\ x + y = 5 \end{matrix}\right\} + \Rightarrow (-1;\ 6)$; $\left.\begin{matrix} x - 2y = 12 \\ x + y = 5 \end{matrix}\right\} - \Rightarrow \left(\frac{22}{3}; -\frac{7}{3}\right)$;

$\left.\begin{matrix} 2x - y = 8/\cdot 2 \\ x - 2y = 12 \end{matrix}\right\} - \Rightarrow \left(-\frac{28}{3}; -\frac{32}{3}\right)$.

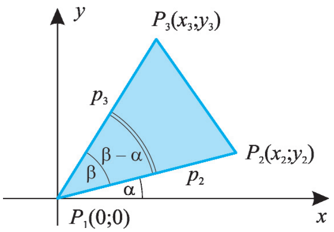
3784. $P'(11;\ -11)$.

3785. A visszavert fénysugár egyenlete: $8x - y = -76$. A beeső fénysugár egyenlete: $4x - 7y = -64$.

3786. A visszavert fénysugár: $29x - 2y + 33 = 0$.

3787. e: $2x - y = 5$. Tükrözzük A-t e-re, a tükörkép legyen A_1. A_1B szakasz a két pont között a legrövidebb. A_1B messe e-t M-ben. Mivel $A_1M = AM$, így M a keresett pont. $M(2;\ -1)$.

3788.



3788. $T = \frac{1}{2} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \sin(\beta - \alpha) =$

$= \frac{1}{2} p_2 \cdot p_3 (\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) =$

$= \frac{1}{2} \cdot (p_3 \sin\beta \cdot p_2 \cdot \cos\alpha - p_3 \cos\beta \cdot p_2 \cdot \sin\alpha).$

Mivel $p_3 \cdot \sin\beta = y_3$; $p_2 \cdot \cos\alpha = x_2$; $p_3 \cdot \cos\beta = x_3$; $p_2 \cdot \sin\alpha = y_2$, ezért $T = \frac{1}{2} \left| x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \right|$.

3789. A háromszög területe $t = \frac{1}{2} \left| \mathbf{a} \times \mathbf{b} \right|$ ahol $\mathbf{a}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1; 0)$, $\mathbf{b}(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1; 0)$, Alkalmazzuk a vektoriális szorzat **i**, **j**, **k** együtthatóinak kiszámítására vonatkozó összefüggést. Ekkor a bizonyítandó területképletet kapjuk.

3790. *a)* $P_1(-2; -1)$, $P_2(6; 1)$, $P_3(1; 6)$. $t = \frac{1}{2} \left| -2(1-6) + 6(6+1) + 1 \cdot (-1-1) \right| = \frac{50}{2} = 25$ területegység. *b)* 20 területegység. *c)* $A(0;\ 0)$, $B(2;\ 5)$, $C(7;\ -1)$. $\overrightarrow{AC}(7;\ -1)$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{50}$, $\overrightarrow{BC}(2;\ 5)$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{29}$. $14 - 5 = \sqrt{50} \cdot \sqrt{29} \cos\alpha$. $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{29}} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin\alpha = \frac{37}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{29}} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{37}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{29}} = \frac{37}{2}$ területegység. *d)* 3,5 területegység, *e)* $A(4; 0)$, $B(-4; 0)$, $C(3; 8)$. $t = \frac{AB \cdot m_2}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$ területegység. *f)* 13 területegység.

3791. $m_a = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. $m_b = \frac{21}{\sqrt{37}}$, $m_c = \frac{21}{5}$.

3792. $A(5; 1)$, $B(-2; 2)$, $C(c; 0)$, $t = 10$. $10 = \frac{1}{2} \left| 5(2-0) - 2(0-1) + c(1-2) \right| \Rightarrow$ $\Rightarrow \left| 12 - c \right| = 20$. $c_1 = 32$, $c_2 = -8$; $C_1 = (32; 0)$, $C_2 = (-8; 0)$.

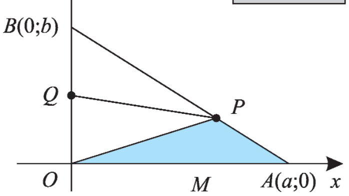
3793. $A(-1; -1)$, $B(5; 2)$, $AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. $t = 15 = \frac{AB \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = 2\sqrt{5}$. A harmadik csúcs az AB-vel párhuzamos, A-tól, illetve B-től $2\sqrt{5}$ távolságra levő egyenesen van:
$\frac{x - 2y + c}{\sqrt{5}} = 0$. $\frac{\left| -1 + 2 + c \right|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \left| c + 1 \right| = 10 \Rightarrow c_1 = 9$, $c_2 = -11$. e_1: $x - 2y + 9 = 0$, e_2: $x - 2y - 11 = 0$. A C csúcs a kapott egyeneseken, $P(5; 2)$-től 5 egységnyire van. $PC = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow PC^2 = 25$. $\left.\begin{array}{r}(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ x - 2y + 9 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow C_1(5;\ 7)$, $C_2(1;\ 5)$, illetve $\left.\begin{array}{r}(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ x - 2y - 11 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow C_3(9;\ -1)$, $C_4(5;\ -3)$.

3794. $AB = 5$, $\frac{5m_c}{2} = 8 \Rightarrow m_c = \frac{16}{5}$. $\overrightarrow{AB}(4;\ -3) \Rightarrow \mathbf{n}(3;\ 4)$, $3x + 4y = 12 \Rightarrow \frac{3x + 4y - 12}{5} = 0$. $\left| \frac{3x + 20 - 12}{5} \right| = \frac{16}{5} \Rightarrow \left| 3x + 8 \right| = 16 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = -8$. A feltétel miatt $C\left(\frac{8}{3};\ 5\right)$.

3795. *a)* 14,5 területegység; *b)* 39,5 területegység; *c)* 75 területegység; *d)* 30 területegység; *e)* 7 területegység.

3796. $AC = 15$, $BD = 10$; $AB = 5\sqrt{5}$; $AD = 5\sqrt{5}$; $AB = AD$ és $AC \perp BD \Rightarrow$ a négyszög deltoid.
$t = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = 75$ területegység.

3797.



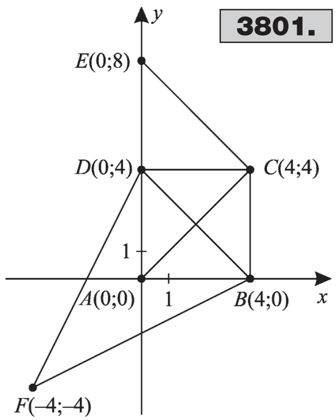
3797. Mivel $t_{OAP} = \dfrac{1}{3} t_{OAB}$, P az AB szakasz A-hoz közelebb eső harmadolópontja: $P\left(\dfrac{2a}{3}; \dfrac{b}{3}\right)$. $t_{OPQ} = t_{BQP} \Rightarrow$ Q az OB szakasz felezőpontja: $Q\left(0; \dfrac{b}{2}\right)$.

3798. A háromszög csúcsai: $C\left(0; -10^{-6}\right)$; $B\left(-10^{3}; 0\right)$; $A\left(10^{3}; 10^{-6}\right)$. $AC = 10^{3}$, $m_b = 10^{-6} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \cdot 10^{3} \cdot 10^{-6} = \dfrac{1}{2000}$ területegység.

3799. $\left|\dfrac{c}{3}\right| = 1 \Rightarrow c_1 = 3$ $c_2 = -3$. $A(-1; 1)$, $B(1; 2)$, C_1 $(3; 0)$. $t = 3$ területegység. $A(-1; 1)$, $B(1; 2)$, $C_2(-3; 0)$ egy egyenesre esnek, ilyen háromszög nem létezik.

3800. Az m_c az y tengely, ezért AB párhuzamos az x tengellyel, egyenlete $y = 9$. AC egyenlete: $y = mx - 7$, $(m > 0) \Rightarrow m_b$: $y = -\dfrac{1}{m}x$. $A\left(\dfrac{16}{m}; 9\right)$;
$B(-9m; 9)$. $AB = \dfrac{16}{m} + 9m \geq 2\sqrt{\dfrac{16}{m} \cdot 9m} = 24$,
$AB \geq 24$. Minimuma akkor van, ha $\dfrac{16}{m} = 9m \Rightarrow m = \dfrac{4}{3}$.
$A(12; 9)$, $B(-12; 9)$, $AB = 24$, $m_c = 16$, $t = 192$ területegység.

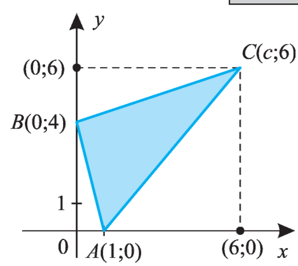
3801.



3801. *a)* $P \cup Q$, $t_{ABCD} + t_{CDE} = 16 + 8 = 24$ területegység. *b)* $Q \cup R$, $t_{BDF} + t_{AEC} - t_{ADM} = 24 + 16 - 4 = 36$ területegység. *c)* $R \cup P$, $t_{ABCD} + t_{BDF} - \dfrac{1}{2} t_{ABCD} = 24 + 8 = 32$ területegység.

3802. $\overrightarrow{AB}(2; -4) \Rightarrow \mathbf{n}_{AB}(2; 1) \Rightarrow AB \parallel e \Rightarrow m_c = d_{A,e}$.
$d_{A,e} = \left|\dfrac{-3 + 4 - 10}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$;
$AB = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
$t = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{\sqrt{5}} \cdot 4\sqrt{5} = 18$ területegység.

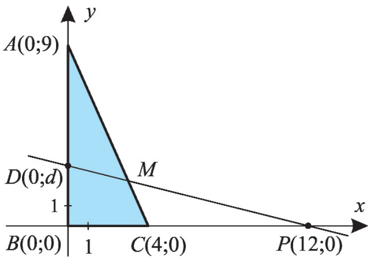
3803.



3803. $AB = 4$, AB: $y = 5$, $C(c; 7) \Rightarrow$ C rajta van az $y = 7$ egyenletű egyenesen. $\Rightarrow m_c = 2$, $t \neq 9$. Ilyen háromszög nem létezik. $6c - \dfrac{1 \cdot 4}{2} - \dfrac{2c}{2} - \dfrac{(c-1)6}{2} = 13 \Rightarrow c = 6$.

V

3806.



3804.
$\frac{1}{2}\left|1\left(q-q^2\right)+(1+d)\left(q^2-1\right)+(1+2d)(1-q)\right|=2001,$
$q^2d-2dq+d=4002$, $(q-1)^2d=4002=2\cdot3\cdot23\cdot29$ miatt. $(q-1)^2=1\Rightarrow q=2$ vagy $q=0$, de a feladat feltételeinek ez utóbbi nem felel meg. $q=2$, $d=2001$. $B(4003;\ 2)$, $C(8005;\ 4)$.

3805. A $P(1;\ 6)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete: $y-6=m(x-1)$. A háromszög csúcsai: $\left.\begin{matrix}x-2y=-4\\ y=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ A(-4;\ 0)$; $\left.\begin{matrix}y=mx-m+6\\ y=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ B\left(\frac{m-6}{m};\ 0\right)$;

$\left.\begin{matrix}mx-y=m-6\\ x-2y=-4\end{matrix}\right\}\Rightarrow C\left(\frac{2(m-4)}{2m-1};\ \frac{5m-6}{2m-1}\right)$. $AB=\frac{m-6}{m}+4=\frac{5m-6}{m}$; $m_c=\frac{5m-6}{2m-1}$;

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(5m-6)^2}{m(2m-1)}=\frac{21}{2}\Rightarrow 17m^2+39m-36=0$. $m_1=\frac{12}{17}$; $m_2=-3$. A keresett egyenesek: $3x+y=9$, illetve $12x-17y+90=0$.

3806. $AD=9-d$, $0<d<9$, AC: $\frac{x}{4}+\frac{y}{9}=1$; DP: $\frac{x}{12}+\frac{y}{d}=1$. $AC\cap DP=M$;

$\left.\begin{matrix}y=9-\frac{9}{4}x\\ y=d-\frac{dx}{12}\end{matrix}\right\}\Rightarrow d-\frac{dx}{12}=9-\frac{9x}{4}\Rightarrow x=\frac{2(54-6d)}{27-d}$. $t_{ABC}=18$, $t_{ADM}=9=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(54-6d)}{27-d}\cdot(9-d)\Rightarrow 2d^2-33d+81=0$. $d_1=3$; $d_2=13{,}5$, ami nem megoldás. DM egyenlete: $x+4y=12$.

3807. $A(10;\ 0)$; $B(0;\ 20)$; $C(0;\ 0)$. Az átfogóra merőleges egyenes a hosszabbik befogót metszi, egyenlete: $y=\frac{1}{2}x+b$, ahol $0<b<20$. M: $\left.\begin{matrix}2x+y=20\\ y=\frac{1}{2}x+b\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=\frac{2(20-b)}{5}$.

$$t=\frac{1}{2}\cdot\frac{20\cdot10}{2}=\frac{(20-b)\cdot\frac{2}{5}(20-b)}{2}\Rightarrow(20-b)^2=250.$$

$b=20-5\sqrt{10}$ a feltétel miatt. A keresett egyenes: $y=\frac{1}{2}x+20-5\sqrt{10}$.

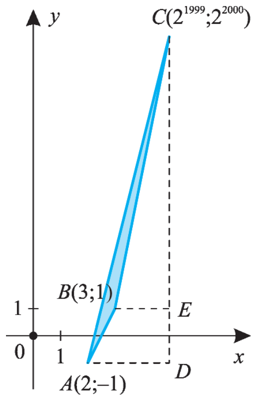
3808. S az AA_1 szakasz harmadolópontja: $\frac{2x+0}{3}=4$, $\frac{2y+6}{3}=6\Rightarrow A_1(6;6)$. $B(b;0)$; A_1 a BC felezőpontja $\Rightarrow C(c;12)$. Az AA_1B háromszög területének a kétszerese az ABC háromszög területe. $t_{ABC}=36$ területegység.

3809. $t_{ABC} = t_{ADC} - t_{BEC} - t_{ADEB} =$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(2^{2000}+1\right)\left(2^{1999}-2\right)-\left(2^{1999}-3\right)\left(2^{2000}-1\right)-\left(2^{1999}-2+2^{1999}-3\right)\cdot 2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^{2000} - 2\cdot 2^{1999} + 5\right) = \frac{5}{2} \text{ területegység.}$$

3809.



3810. A háromszög harmadik csúcsa $C(c; -c)$. AB párhuzamos az x tengellyel $\Rightarrow m_c = c + 4$. CA messe az x tengelyt A_1-ben, CB pedig B_1-ben. $CA_1B_1\triangle \sim CAB\triangle \;\Rightarrow\; \frac{m_1^2}{m^2} = \frac{t_1}{t} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{c^2}{(c+4)^2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{c}{c+4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; c = 4\left(\sqrt{2}+1\right)$. $C\left(4\left(\sqrt{2}+1\right); -4\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$.

3811. Legyen AC irányvektora $\mathbf{v}_1(7;6)$ $AC: 6x - 7y = -10$. BC irányvektora $\mathbf{v}_2(1;2)$ $BC: 2x - y = 10$. $AC \cap BC = C$; $C(10; 10)$. $AB = 4$, $m_c = 6 \Rightarrow t = 12$ területegység. Ha AC irányvektora $\mathbf{v}_2(1;2) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ AC: $2x - y = 2$. BC irányvektora $\mathbf{v}_1(7;6)$ $\Rightarrow$ $BC: 6x - 7y = 14$. $C(0; -2)$. Innen $m_c = 6$, $t = 12$ területegység.

3812. $A(0; 6)$, $B(b; 0)$; $AB = 10 \Rightarrow b^2 + 36 = 100$, $b = \pm 8$. $B_1(8; 0)$, $B_2(-8; 0)$. $C_1(10; 11)$. Hasonlóan $C_2(26; 11)$.

$t_{AB_1C_1} = 50$ területegység. $t_{AB_2C_2} = 58$ területegység.

3813. $A(4; 5)$, $S(2; 3)$, $B(b; 0)$ $C(0; c) \Rightarrow B(2; 0)$, $C(0; 4)$. $t = 9$ területegység.

3814. $s_a \cap s_b = S$; $S(1; 1)$. $t_{ABC} = 3\cdot t_{ABS} = 51$ területegység.

3815. $t_{ABC} = t_{ABCD} - t_{ACD} = \frac{9+8}{2}\cdot 1 - \frac{9\cdot 1}{2} = 4$ területegység. AC: $\left.\begin{matrix} y = \frac{1}{9x} \\ x = k \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = \frac{k}{9}$,

$E\left(k; \frac{k}{9}\right)$, $G(k; 1)$, $0 < k < 9$. $t_{CGE} = 2$, $\frac{1}{2}(9-k)\left(1 - \frac{k}{9}\right) = 2 \Rightarrow (9-k)^2 = 36$. $9 - k = \pm 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 = 3$, $k_2 = 15$, ami a feltételt nem elégíti ki. Tehát az egyenes: $x = 3$.

3816. $\overrightarrow{AD}(-3; 6)$, $\overrightarrow{AB}(8; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$. $AD = 3\sqrt{5}$; $AD = 3\sqrt{5}$.

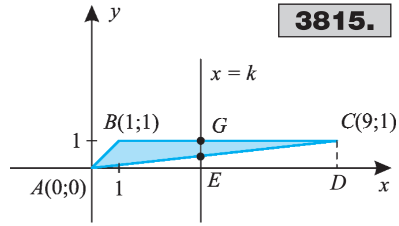
$t = \frac{4\sqrt{5} + CD}{2}\cdot 3\sqrt{5} = 52{,}5 \Rightarrow CD = 3\sqrt{5}$. $AD = CD$, ezért $\overrightarrow{CD}$ az $\overrightarrow{AD}$ $-90°$-os elforgatottja: $\overrightarrow{CD}(6; 3) \Rightarrow C(5; 10)$.

3817. $AB = 10$, $\frac{10\cdot m_c}{2} = 40 \Rightarrow m_c = 8$. C rajta van az AB-vel párhuzamos, A-tól 8 egység távolságra levő e egyenesen. e: $\frac{3x - 4y + c}{5} = 0$,

$\left|\frac{3\cdot 6 - 4\cdot 8 + c}{5}\right| = 8 \Rightarrow |c - 14| = 40 \Rightarrow c_1 = 54$, $c_2 = -26$.

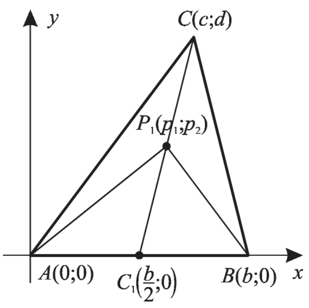
e_1: $3x - 4y + 54 = 0$, e_2: $3x - 4y - 26 = 0$. $C_1(-10; 6)$; $C_2(6; -2)$.

3815.



V

3819.

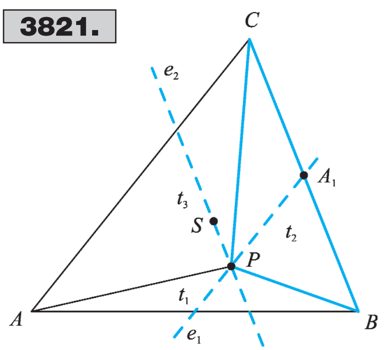


3818. M: $\left.\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{2}x+4 \\ y=mx \end{array}\right\}$. $M\left(\dfrac{8}{2m+1};\ \dfrac{8m}{2m+1}\right)$, $N\left(\dfrac{8}{2m+1};\ 0\right)$. $t_{OMN}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{2m+1}\cdot\dfrac{8m}{2m+1}=\dfrac{32m}{4m^2+4m+1}=$ $=\dfrac{32}{4m+\dfrac{1}{m}+4}$, mert $m>0$. $4m+\dfrac{1}{m}\geq 2\sqrt{4m\cdot\dfrac{1}{m}}=4\Rightarrow$ $\Rightarrow 4m+\dfrac{1}{m}+4\geq 8\Rightarrow \dfrac{32}{4m+\dfrac{1}{m}+4}\leq 4$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $4m=\dfrac{1}{m}\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

3819. $t_{ABP}=t_{BCP}=t_{ACP}=\dfrac{1}{3}t_{ABC}$. Legyen $P(p_1;p_2)$. $t_{ABC}=\dfrac{b\cdot d}{2}$, $t_{ABP}=\dfrac{b\cdot p_2}{2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{b\cdot d}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow p_2=\dfrac{d}{3}$. $\overrightarrow{AC}(c;\ d)\Rightarrow AC$: $dx-cy=0\Rightarrow \dfrac{dx-cy}{\sqrt{d^2+c^2}}=0$, $m_b=\dfrac{bd}{\sqrt{d^2+b^2}}$. ACP háromszög P-ből induló magassága: $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{bd}{\sqrt{d^2+b^2}}=\dfrac{p_1d-p_2c}{\sqrt{d^2+b^2}}\Rightarrow\dfrac{1}{3}bd=p_1d-\dfrac{d}{3}\cdot c/\cdot d\neq 0$. $p_1=\dfrac{c+b}{3}$, $P\left(\dfrac{b+c}{3};\ \dfrac{d}{3}\right)$, $S\left(\dfrac{b+c}{3};\ \dfrac{d}{3}\right)\Rightarrow P=S$.

3820. $A_1(0;0)$, $B_1(a;a)$, $C_1(a+b;a-b)$, $D_1(b;-b)$. $\overrightarrow{A_1B_1}(a;\ a)$, $\overrightarrow{C_1D_1}(a;\ a)\Rightarrow$ $\Rightarrow\ A_1B_1 \# C_1D_1\cdot\overrightarrow{A_1D_1}(b;\ -b)$. $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=ab-ab=0\Rightarrow A_1B_1\perp A_1D_1\Rightarrow A_1B_1C_1D_1$ téglalap. $A_1B_1=a\sqrt{2}$; $A_1D_1=b\sqrt{2}$. $t_{ABCD}=AB$. $t_{A_1B_1C_1D_1}=a\cdot\sqrt{2}\cdot b\cdot\sqrt{2}=2ab$.

3821.



3821. $t_1:t_2:t_3=1:2:3$. Az ABC háromszög területe t. Ekkor: $t_1=\dfrac{1}{6}t$, $t_2=\dfrac{1}{3}t$, $t_3=\dfrac{1}{2}t$. Mivel $t_3=\dfrac{1}{2}t$, P rajta van az AC-vel párhuzamos középvonalon, $t_2=\dfrac{1}{3}t$, P rajta van a súlyponton átmenő BC-vel párhuzamos egyenesen. A két egyenes metszéspontja P. $S(7;8)$, BC felezőpontja $A_1(9;12)$, $\overrightarrow{AC}(-3;\ 9)\Rightarrow\mathbf{n}(3;\ 1)$, e_1: $3x+y=39$. $\overrightarrow{CB}(18;\ 6)\Rightarrow\mathbf{n}(1;\ -3)$, e_2: $x-3y=-17$. $P=e_1\cap e_2$: $P(10;\ 9)$.