A logaritmus fogalma és azonosságai. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény.

1. A logaritmus értelmezése

A hatványozás nem kommutatív művelet, így más-más fordított (inverz) műveletre van szükség, ha az $a^c = b$ hatványozás alapját (a) vagy kitevőjét (c) keressük. A *logaritmus* a kitevő keresésének művelete.

Definíció: $\log_a b$ azt a c számot (azt a kitevőt) jelenti, amelyre a-t emelve b-t kapunk:
$\log_a b = c \iff a^c = b$.
A definíció jelentése szerint $a^{\log_a b} = b$.

A definícióban c bármilyen valós számot jelenthet, így a logaritmus alapja (a) és argumentuma (b) csak pozitív szám lehet. (A valós kitevőjű hatványozást csak pozitív alapra értelmezzük, és pozitív értéket ad eredményül.) Az $a = 1$ alapot sem engedjük meg, mert $1^c = 1$ miatt $b = 1$ lehetne csak (és $\log_1 1$ értéke nem lenne egyértelmű).

A leggyakrabban használt logaritmus alapok:
- A 10-es alapú logaritmus, jele lg (tehát $\lg x = \log_{10} x$); elsősorban a tízes számrendszer mindennapi használata miatt.
- A 2-es alapú logaritmus.
- A természetes alapú logaritmus, jelölése ln (tehát $\ln x = \log_e x$). Az e alapszám közelítő értéke 2,71828, ezt a logaritmust a magasabb szintű matematikában alkalmazzák.

2. A logaritmus azonosságai

A logaritmus műveletével kapcsolatban néhány alapazonosságot fogalmazhatunk meg, ezek a következők:

1. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$; $a, b, c > 0, a \neq 1$

2. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$; $a, b, c > 0, a \neq 1$

3. $k \cdot \log_a b = \log_a b^k$; $a, b > 0, a \neq 1, k \in \mathbf{R}$

4. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $a, b, c > 0$, és $a, c \neq 1$

Az első két azonosság logaritmusok összegeként és különbségeként írja fel a szorzat, illetve hányados logaritmusát. A harmadik a hatvány vagy gyökvonás logaritmusának azonossága; a negyedik azonosság segítségével pedig tetszőleges x alapú logaritmusra térhetünk át.

Az azonosságok bizonyítása általában a hatványozás segítségével történik. Példaképpen bebizonyítjuk az 1. azonosságot.

3. Az 1. azonosság bizonyítása

Definíció szerint $a^{\log_a b} = b$, $a^{\log_a c} = c$ és $a^{\log_a bc} = bc$. A bc szorzatot kétféleképpen felírjuk, és azonos átalakításokat végzünk:

$a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a bc} \quad \Leftrightarrow \quad a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a bc}$.

Az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért a kitevők egyenlők:

$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$.

Ezzel az állítást beláttuk.

4. Az exponenciális függvény

A racionális kitevőjű hatványozás kiterjesztésekor bevezettük az exponenciális függvényt. (A racionális kitevőjű hatványozás azonosságai a valós kitevőjű kiterjesztés esetén is érvényben maradtak. A kiterjesztés tehát megfelelt a permanencia-elvnek.)

Definíció: Az $x \in \mathbf{R}$, $x \mapsto a^x$ függvényt, ahol $a > 0$, exponenciális függvénynek nevezzük. (Használatos az '*a* alapú exponenciális függvény' elnevezés is.)

Az exponenciális függvény néhány alaptulajdonsága:

a) Értékkészlete a pozitív valós számok halmaza.

b) Zérushelye a függvénynek nincs; az y tengelyt a (0; 1) pontban metszi.

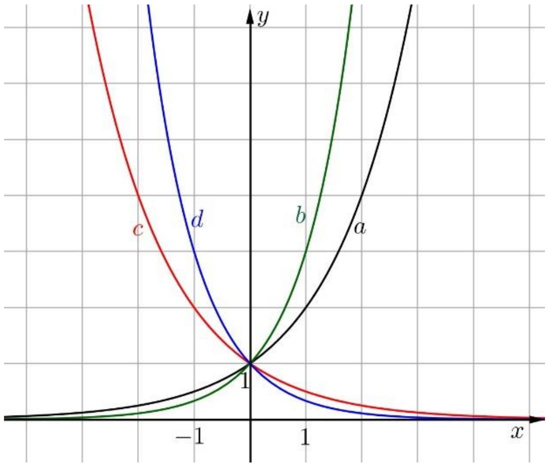
c) A függvény szigorúan monoton növekvő, ha $1 < a$, és szigorúan monoton csökkenő, ha $0 < a < 1$. (Ha $a = 1$, akkor a konstans $x \mapsto 1$ függvényt kapjuk.)

d) A függvény konvex.

Két további tulajdonság:

e) Ha $1 < a < b$, akkor: ha $x > 0$, akkor $a^x < b^x$, míg ha $x < 0$, akkor $a^x > b^x$. ($0 < a < b < 1$ esetén a relációs jel megfordul, mint az ábrán látható.)

f) Az a és $\frac{1}{a}$ alapú exponenciális függvények görbéi szimmetrikusak az y tengelyre, mint ez könnyen igazolható is.



Az ábrán az egyes függvények közötti nagyságviszonyt és monotonitási kapcsolatot láthatjuk.

Az ábrázolt függvények: $a(x) = 2^x$, $b(x) = 3^x$, $c(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $d(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Az **e)** tulajdonság igazolása:

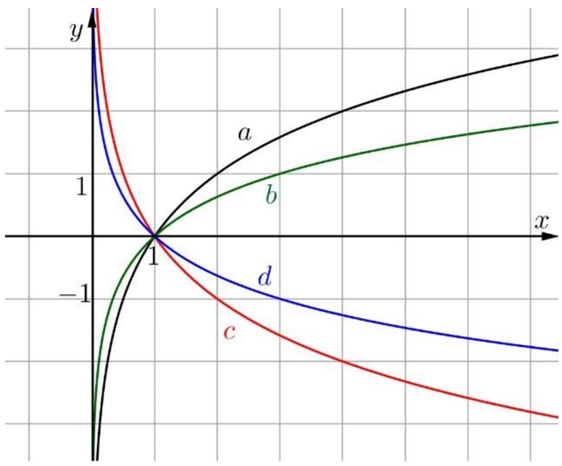
Mivel az $f(x) = a^x$ és $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ függvények $a > 0$ esetén a teljes valós számhalmazon értelmezettek, az y tengelyre vonatkozó szimmetriához azt kell igazolnunk, hogy minden x-re $f(-x) = g(x)$, azaz $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Mivel $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, az állítást beláttuk.

5. A logaritmusfüggvény

Definíció: Az $x \in \mathbf{R}^*$, $x \mapsto \log_a x$ függvényt, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$, logaritmusfüggvénynek nevezzük. (Használatos az ’a alapú logaritmusfüggvény’ elnevezés is.)

A logaritmusfüggvény néhány alaptulajdonsága:
a) Értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza.
b) Értékkészlete a valós számok halmaza.
c) A függvény zérushelye (1; 0).
d) A függvény szigorúan monoton növekvő, ha $a > 1$, és szigorúan monoton csökkenő, ha $0 < a < 1$.
e) Ha $a > 1$, akkor a függvény konkáv, míg ha $0 < a < 1$, akkor konvex.

Három további tulajdonság:
f) Ha $1 < a < b$, akkor: ha $x > 1$, akkor $\log_a x > \log_b x$, míg ha $0 < x < 1$, akkor $\log_a x < \log_b x$. ($0 < a < b < 1$ esetén a relációs jel megfordul, mint az ábrán látható.)
g) Az a és $\frac{1}{a}$ alapú logaritmusfüggvények görbéi szimmetrikusak az x tengelyre, mint ez könnyen igazolható is.
h) Az f: $x \mapsto \log_a x$ és g: $x \mapsto \log_b x$ függvények értékei egy konstans szorzóval térnek el egymástól.



Az ábrán az egyes függvények közötti nagyságviszonyt és monotonitási kapcsolatot láthatjuk.
Az ábrázolt függvények: $a(x) = \log_2 x$, $b(x) = \log_3 x$, $c(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $d(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

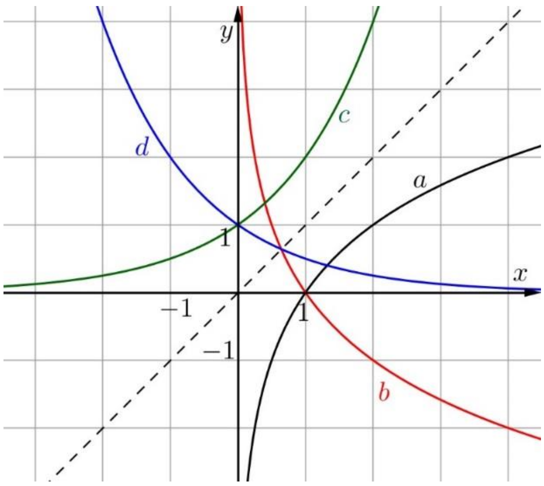
A **g)** tulajdonság igazolása:
Mivel az $f(x) = \log_a x$ és $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ függvények értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, az x tengelyre vonatkozó szimmetriához azt kell igazolnunk, hogy minden pozitív x-re $-f(x) = g(x)$, azaz $-\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} x$.

Mivel $-\log_a x = -\dfrac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = -\dfrac{\log_{\frac{1}{a}} x}{-1} = \log_{\frac{1}{a}} x$, az állítást beláttuk.

Hasonlóan könnyen igazolható például a **h)** tulajdonság is, ha a logaritmusokat közös alapra hozzuk.

6. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény

A logaritmus definíciójából következik, hogy az a alapú exponenciális és az a alapú logaritmusfüggvény egymás inverze.



Az ábrán látható inverz függvénypárok: $a(x) = \log_2 x$ és $c(x) = 2^x$, valamint $b(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ és $d(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Feltüntettük viszonyításként szaggatott vonallal az $f(x) = x$ függvény egyenesét is, amelyre az inverz függvénygörbék tükrös helyzetűek.

7. Néhány matematikai és matematikán kívüli alkalmazási terület

- A hatványozás és a logaritmus műveletét és azonosságait felhasználva sokszor bonyolultnak tűnő kifejezéseket **egyszerűbb alakra** lehet hozni. A zsebszámológépek megjelenése előtt bonyolult kifejezéseket, nagy számokat a logaritmusuk segítségével (ezek összeadásával) szoroztak össze. Ezen az elven működött a mára már elavult **logarléc**, de a függvénytáblázatokban még most is nagy mennyiségű logaritmustáblázat van.
- Egy tipikus gyakorlati alkalmazással találkozunk a **zsebszámológépek használatakor**. A gépeken általában csak <ln> vagy <lg> billentyűk találhatók, így amikor más alapú logaritmus értékét kell kiszámítanunk, akkor a logaritmus 4. azonosságát hívjuk segítségül. Pl.: $\log_2 3 = \dfrac{\lg 3}{\lg 2}$.
- Az n pozitív egész szám **számjegyeinek számát** az [lg n] + 1 képlet állítja elő, amit a szám normálalakjának segítségével könnyen igazolhatunk. Ha $n = a \cdot 10^k$ alakú, akkor $\lg n = \lg a + k$, és itt $0 \le \lg a < 1$, mert a mantisszára $1 \le a < 10$.
- Sok érdekes tulajdonsággal rendelkezik a **nevezetes** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ **sorozat**, melynek határértéke e ≈ 2,71828, a természetes alapú logaritmus alapszáma.
- Az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény **primitív függvénye** $x \mapsto \ln x$. Ha például $0 < a < b$, akkor $\int_a^b \dfrac{1}{x}dx = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a$.
- A **logaritmusos skálák** az egyszerűbb és szemléletesebb grafikus ábrázolást segítik. Az **exponenciális függvény** általában kényelmetlenül ábrázolható az (x; y) derékszögű koordináta-rendszerben, mert kis Δx változásokra gyakran nagy Δy változásokat kapunk eredményül. Ezért az y értéktengely léptékét az 1, 2, 3, … lineáris skála helyett a 10^1, 10^2, 10^3, … beosztásra módosítják, ezen a grafikonon pl. az $x \mapsto 10^x$ függvény képe már (egy kényelmesen ábrázolható) egyenes. Hasonlóan járhatunk el a **logaritmusfüggvény** esetében, ekkor az x tengely beosztása lehet pl. 10^1, 10^2, 10^3, … Ekkor az $y = \lg x$ függvénykapcsolat képe lesz egyenes.
- Egy tipikus logaritmusos skála a **Richter-skála**, amelyen a földrengések erősségét (magnitúdóját) mérik. Ezt úgy állapítják meg, hogy ha a földrengéstől 100 km-es távolságban a szeizmográf mutatójának (elvi) kilengése 10^k mikrométer, akkor a földrengés „a Richter-skálán k-as erősségű”. (Általában a skála a 100 km-es távolságban, mikrométerben mért maximális amplitúdó logaritmusát jelzi.)
- Egyes **természeti és társadalmi folyamatok** bizonyos határok között jól modellezhetők exponenciális függvénnyel. Ha pl. egy populáció kezdeti egyedszáma E, és a generációnkénti szaporodási és halálozási arányt s, illetve h jelenti, akkor az n-edik generáció egyedszáma $E \cdot (s \cdot h)^n$ – feltéve, hogy a növekedést szabályozó egyéb tényezőktől eltekintünk („exponenciális népességrobbanás”).
- Tipikus **szaporodási folyamatot** ír le a radioaktív bomlás $M(t) = M(0) \cdot e^{-kt}$ képlete. (Itt $T = \dfrac{\ln 2}{k}$ a felezési idő.)
- Közgazdasági alkalmazások a különböző **banki pénzügyi műveletek** végzése: kamatos kamat vagy éves törlesztőrészlet számítása, éven belüli tőkésítések stb. (Folyamatos tőkésítés esetén ráismerhetünk a természetes logaritmus alapszámát megadó sorozatra.)

- A **fizikai és kémiai alkalmazások** körében is nagyon gyakori az exponenciális-logaritmusos függvénykapcsolat, ezt egész sor összefüggés mutatja. Néhányat ezek közül középiskolában is érinthetünk, ilyen például a folyadékok pH értékének a meghatározása, a légnyomásra vonatkozó barométeres magasságformula, a gázok által állandó hőmérsékleten végzett munka, a Newton-féle lehűlési törvény vagy a hangintenzitást megadó formula. (Ez utóbbi képlet – és még sok hasonló – alapja a természetben mindenfajta érzetre közelítően érvényes Fechner–Weber-féle pszichofizikai alaptörvény. Eszerint az érzet erőssége általában az inger logaritmusával arányos.)

Néhány matematikatörténeti vonatkozás (2017-től része a szóbeli vizsgának):

- A XVI. század folyamán a gazdasági élet és a csillagászat fejlődése egyre többször kívánta meg nagy számokkal történő művelet elvégzését. Ezekre matematikusok több különböző módszert használtak, melyek közül a leghasznosabbnak a logaritmustáblázatok bizonyultak. Ezek segítségével **nagy számok szorzását** a jóval könnyebben elvégezhető összeadásra lehetett egyszerűsíteni. Egy kicsit leegyszerűsítve képzeljük el, hogy össze kell szoroznunk a 8-at a 32-vel. Ehhez van egy táblázatunk, amely minden szám esetében tartalmazza, hogy az adott szám 2-nek hányadik hatványa. Mivel $8 = 2^3$ és $32 = 2^5$, így $8 \cdot 32 = 2^3 \cdot 2^5 = 2^8$, azaz csak azt kell megnéznünk a táblázatban, hogy a 2-nek mennyi a 8. hatványa, így kapjuk, hogy a szorzat 256. Vagyis a 8 és a 32 összeszorzása helyett a 3 és az 5 összeadását kellett elvégeznünk.
- **Logaritmustáblázatokat** készített többek között **Stevin** (holland matematikus, 1548-1620), **Bürgi** (svájci órásmester, 1552-1632), **Napier** (skót matematikus, 1550-1617), **Briggs** (angol matematikus, 1561-1630).
- A **logarlécek** egészen az elektronikus számológépek megjelenéséig (vagyis az 1960-as évekig) segítették a számítások elvégzését.

8. Feladat

Oldja meg a következő egyenlőtlenséget: $\log_4(x+2) + \log_4(8-x) < \log_2(x+4)$.

Megoldás:
A logaritmusok argumentuma pozitív, így $x + 2 > 0$; $8 - x > 0$ és $x + 4 > 0$,
együttesen $-2 < x < 8$. 1 pont

$\log_4(x+2) + \log_4(8-x) = \log_4(x+2)(8-x) = \log_4(-x^2 + 6x + 16)$, 1 pont

$\log_2(x+4) = \dfrac{\log_4(x+4)}{\log_4 2} = 2 \cdot \log_4(x+4) = \log_4(x+4)^2 = \log_4(x^2 + 8x + 16)$. 2 pont

A 4-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, így $-x^2 + 6x + 16 < x^2 + 8x + 16$,
rendezés után $0 < 2x^2 + 2x$. 1 pont

A másodfokú kifejezés képe „felfelé nyitott” parabola,
zérushelyei $x_1 = -1$ és $x_2 = 0$, 1 pont

így a másodfokú egyenlőtlenség megoldása $x < -1$ vagy $0 < x$. 1 pont

Összevetve az alapfeltétellel, $-2 < x < -1$ vagy $0 < x < 8$ adódik eredményül. 1 pont

A hasonlóság fogalma és alkalmazásai háromszögekre vonatkozó tételek bizonyításában.

1. A középpontos hasonlóság értelmezése

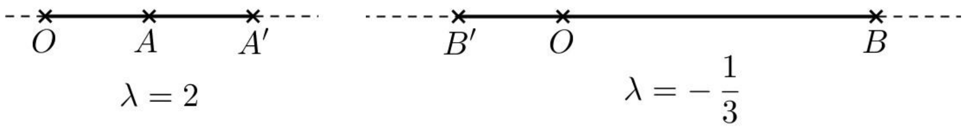
A *hasonlóság* a sík vagy a tér pontjain értelmezett geometriai transzformáció. A transzformáció összetett, ezért először a *középpontos hasonlósági transzformációt* értelmezzük.
Adott egy O pont és egy $\lambda \neq 0$ valós szám. A sík vagy tér tetszőleges P pontjához a következő módon rendeljük a képét:

- ha $P = O$, akkor a P pont képe önmaga, $P' = P$ $(= O)$;
- ha $P \neq O$, akkor a P pont képe az OP egyenesnek az a P' pontja, amelyre $\frac{OP'}{OP} = |\lambda|$, azaz OP' hossza $|\lambda|$-szorosa az OP szakasz hosszának.

Ha $\lambda > 0$, akkor a P' pont az OP félegyenesen van, azaz az O ponttól P-vel azonos irányban mérjük fel P'-t;
míg ha $\lambda < 0$, akkor P' és P az O ponttól ellentétes irányban vannak.

Definíció: A fenti módon megadott geometriai transzformációt **középpontos hasonlósági transzformációnak**, vagy röviden **középpontos hasonlóságnak** nevezzük.
Az O pont a hasonlóság *középpontja* vagy *centruma*, λ a középpontos hasonlóság *aránya*.

Példák:



A középpontos hasonlóságot

- ha $|\lambda| < 1$, akkor *kicsinyítésnek*,
- ha $|\lambda| > 1$, akkor *nagyításnak* mondjuk.

Speciális értékek a $\lambda = 1$ és $\lambda = -1$. Az első esetben a transzformáció helybenhagyás (identitás), a második esetben középpontos tükrözés. (A középpontos hasonlóság tehát $|\lambda| = 1$ esetben egybevágósági transzformációvá válik.)

2. A középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonságai

Néhány fontosabb tulajdonság:

a) A középpontos hasonlóság középpontja fixpont.
b) Ha egy egyenes átmegy a hasonlóság centrumán, akkor képe önmaga (invariáns egyenes).
c) A centrumon át nem haladó egyenes képe az eredetivel párhuzamos egyenes.
d) A középpontos hasonlóság *szögtartó*.
e) Középpontos hasonlóságnál minden szakasz képe az eredeti szakasznak $|\lambda|$-szorosa.
Úgy is fogalmazhatunk, hogy a középpontos hasonlóság *aránytartó* transzformáció.

3. A hasonlóság értelmezése

Definíció: Hasonlósági transzformációnak nevezzük azt a transzformációt, amelyet egy egybevágósági transzformáció és egy középpontos hasonlóság egymás utáni alkalmazásával (szorzatával) adunk meg.

A hasonlóság tehát a sík vagy a tér pontjain értelmezett geometriai transzformáció.

Bármely hasonlósági transzformációt megadhatunk úgy, hogy megadunk egy középpontos hasonlóságot és egy egybevágósági transzformációt, valamint ezek végrehajtásának a sorrendjét.

A hasonlósági transzformációban szereplő középpontos hasonlóság arányát a *hasonlósági transzformáció arányának* nevezzük.

4. A hasonlóság tulajdonságai

Az egybevágósági transzformáció definíció szerint távolságtartó. Ebből és az egybevágóság többi tulajdonságából, valamint a középpontos hasonlóság tulajdonságaiból igazolhatók a hasonlóság tulajdonságai.

Néhány fontosabb tulajdonság:

a) Egyenes képe egyenes; a hasonlóság *egyenestartó*.
b) A hasonlósági transzformáció *szögtartó*.
c) Minden szakasz képe az eredeti szakasznak $|\lambda|$-szorosa; a hasonlóság *aránytartó*.

(A c) tulajdonság megfordítása is igaz: ha egy transzformáció minden szakasz hosszúságát $|\lambda|$-szorosára változtatja, akkor az egy hasonlósági transzformáció.)

A hasonlóság jele: ~.

5. Alakzatok hasonlósága

A feladatmegoldások során gyakran van szükségünk a hasonló alakzatok felismerésére.

Definíció: Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi.

A hasonlósági transzformáció néhány további tulajdonságát is megfogalmazhatjuk:

d) Bármely alakzat hasonló önmagához. (A helybenhagyás is hasonlósági transzformáció.) Jelölésekkel: bármely A alakzatra $A \sim A$.
e) A hasonlóság *szimmetrikus* reláció: ha az A, B alakzatokra $A \sim B$, akkor $B \sim A$ is teljesül.
f) A hasonlóság *tranzitív* reláció: ha az A, B, C alakzatokra $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$ is teljesül.

Két alakzat bizonyos adatainak ismeretében sokszor egyszerűbben eldönthetjük, hogy a két alakzat hasonló-e. Például háromszögek esetén – csakúgy, mint az egybevágósági kritériumok felállításakor – hasonlósági alapeseteket fogalmazhatunk meg.

5.1. Háromszögek hasonlósága

(hasonlósági kritériumok)

Állítás: Két háromszög hasonló, ha
1. oldalaik aránya egyenlő;
2. egy-egy szögük s az ezt közrefogó oldalaik aránya egyenlő;
3. két-két szögük páronként egyenlő;
4. két-két oldaluk aránya és e két-két oldal közül a nagyobbikkal szemközt lévő szögük egyenlő.

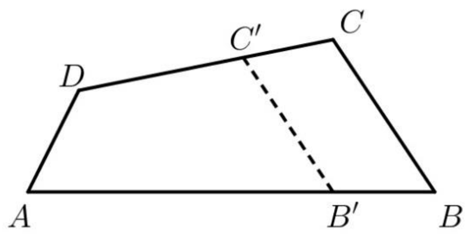
Ezek a kritériumok a háromszögek hasonlóságának elégséges feltételei. (Ha 1-4. közül valamelyik feltétel teljesül, akkor a többi is.) Ekkor a két háromszög hasonló, azaz a megfelelő szögeik egyenlők, és minden megfelelő szakaszuk aránya megegyezik.

Speciálisan:
- két szabályos háromszög mindig hasonló;
- két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha egy megfelelő szögük egyenlő;
- két derékszögű háromszög hasonló, ha egy-egy hegyesszögük megegyezik.

(A megfelelő oldalak arányának egyezését kétféleképpen is értjük: ha *ABC* és *A'B'C'* hasonló háromszögek, akkor $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$ és $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ egyaránt felírható.)

5.2. Sokszögek hasonlósága

Például a háromszögekre vonatkozó 3. kritérium szerint két háromszög hasonló, ha a szögeik egyenlők. Sokszögek esetében nem tudunk ilyen egyszerű hasonlósági feltételeket megállapítani.



Az ábrán lévő *ABCD* négyszög *BC* oldalával párhuzamos *B'C'*. Látható, hogy az *ABCD* és *ABC'D'* négyszög szögei megegyeznek, de nem lehetnek hasonlók, hiszen a megfelelő oldalak aránya nem egyenlő. Sokszögek hasonlóságára viszonylag egyszerűek az alábbi kritériumok, bár „gyengébb” feltételek is megadhatók:

Két sokszög hasonló, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:
- megfelelő oldalaik és megfelelő átlóik hosszának aránya egyenlő;

vagy
- megfelelő oldalaik aránya egyenlő, és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

Speciálisan:
- két szabályos *n*-szög mindig hasonló (azaz két négyzet is mindig hasonló);
- és két téglalap általában nem hasonló (csak ha a két szomszédos oldaluk aránya megegyezik).

5.3. Egyéb alakzatok hasonlósága

Két kör mindig hasonló. (Egybevágósági transzformációval a két kör koncentrikus körökbe vihető át, amik már középpontosan hasonlóak.) Sőt ha a két kör nem koncentrikus, akkor két (ún. külső és belső) hasonlósági pontjuk is van.
Bármely két gömb is hasonló.
Két kocka is mindig hasonló.

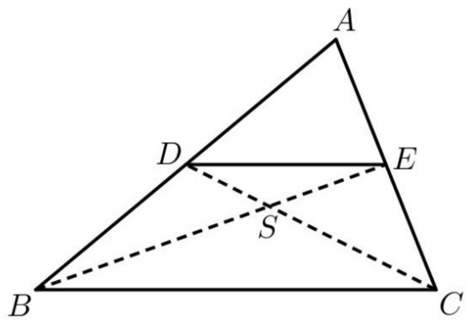
6. A hasonlóság alkalmazásai háromszögekre vonatkozó tételek bizonyításában

6.1. A háromszög középvonala

Hasonlóság segítségével nagyon egyszerűen igazolható a háromszögek középvonalára vonatkozó összefüggés.

Tétel: A háromszög középvonala párhuzamos a megfelelő oldallal, és feleolyan hosszú.

Bizonyítás: Az ábra szerint jelölje D és E az ABC háromszög AB, illetve AC oldalának a felezőpontját. Igazolandó, hogy a DE középvonal és a BC oldal párhuzamos, valamint hogy $2 \cdot DE = BC$.



Alkalmazzunk egy A középpontú, $\lambda = 2$ arányú középpontos hasonlósági transzformációt! Ennek során D képe B, E képe C lesz, azaz a DE szakasz képe BC. A középpontos hasonlóság tulajdonságaiból következik a tárgy- és képszakasz (DE és BC) párhuzamossága, valamint az is, hogy $BC = |\lambda| \cdot DE = 2 \cdot DE$; így az állítást igazoltuk.

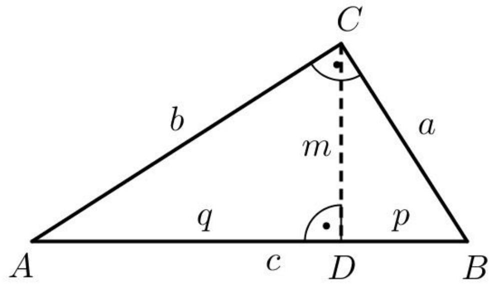
A háromszög másik két középvonalára is hasonló módon igazolható az összefüggés.

A középvonal-tulajdonság egy érdekes **következménye** a háromszög súlyvonalaira vonatkozó tétel.

A BE és CD súlyvonalak metszéspontját jelölje S; ekkor a BSC és ESD háromszögek hasonlók (szögeik megegyeznek), a hasonlósági arány $\lambda = 2$. Ezért $BS = 2 \cdot SE$ és $CS = 2 \cdot SD$. Ebből pedig már igazolható, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át, és egymást kölcsönösen harmadolják.

6.2. Derékszögű háromszögre vonatkozó tételek

A derékszögű háromszögekben kimondható **magasságtétel** és **befogótétel** bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága két hasonló részháromszögre bontja az eredeti háromszöget.



Alkalmazzuk az ábra szerinti hagyományos betűzést: $ACB\angle = 90°$, $CD = m$; $AD = q$ és $BD = p$ a megfelelő vetületek hosszai.

Ekkor $CAD\angle = \alpha = BCD\angle$, mert mindkettőnek a pótszöge β. Ebből pedig következik, hogy $ABC\Delta \sim ACD\Delta \sim CBD\Delta$, mert a megfelelő szögek egyenlők.

Tétel (magasságtétel): Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe a befogók átfogóra eső merőleges vetületének. Képlettel: $m = \sqrt{pq}$.

Bizonyítás: Az ADC és CDB háromszögek hasonlósága miatt $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$, a szakaszok hosszával felírva $\frac{m}{q} = \frac{p}{m}$. Ebből átrendezéssel és gyökvonással következik a tétel állítása.

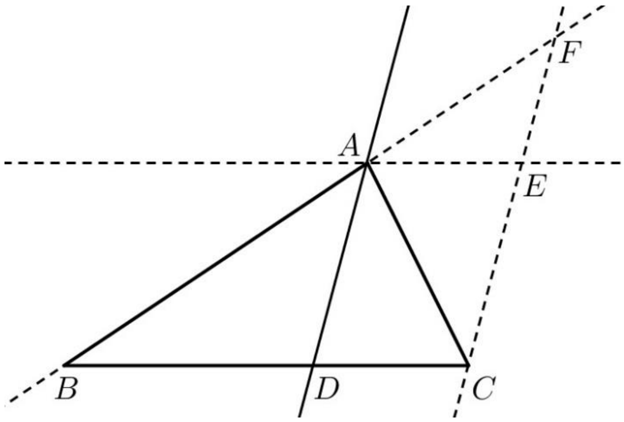
Tétel (befogótétel): Derékszögű háromszögben a befogó mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének. Képlettel: $a = \sqrt{pc}$ és $b = \sqrt{qc}$.

Bizonyítás: Az ACB és CDB háromszögek hasonlósága miatt $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$, a szakaszok hosszával felírva $\frac{a}{c} = \frac{p}{a}$. Ebből átrendezéssel és gyökvonással következik a tétel állítása.

Az ADC háromszög felhasználásával hasonlóan igazolható a $b = \sqrt{qc}$ állítás is.

6.3. Szögfelezőtétel

Tétel: A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szöget közrefogó oldalak arányában osztja két részre.



Bizonyítás: Jelölje D az ABC háromszög A-ból húzott szögfelezője és a BC oldal metszéspontját. Húzzunk párhuzamost C-n keresztül AD-vel és A-n keresztül BC-vel, így az ábrán látható E és F metszéspontokat kapjuk.

BDA és AEF háromszögek hasonlók, mert szögeik egyenlők. (Például $BAD\angle = AFE\angle = \frac{\gamma}{2}$ párhuzamos szárú, egyállású hegyesszögek). $ACE\angle = \frac{\gamma}{2}$ szintén, mert $ACE\angle$ és $DAC\angle$ váltószögek; ebből pedig $AF = AC$ következik. Végül $DC = AE$, mert $DCEA$ paralelogramma.

A BDA és AEF háromszögek hasonlóságát felhasználva $\frac{BD}{DC} = \frac{BD}{AE} = \frac{BA}{AF} = \frac{BA}{AC}$, és az egyenlőséglánc két széle éppen a bizonyítandó állítás.

A másik két szögfelezőre hasonlóan igazolható a tétel.

Megjegyzés: Hasonló tétel igaz a **külső szögfelezők** esetén is.

Ha az A csúcsból húzott külső szögfelező G-ben metszi a BC oldalt ($AB \neq AC$), akkor igazolható, hogy $\frac{BG}{GC} = \frac{BA}{AC}$, ez az összefüggés pedig formálisan megegyezik a belső szögfelezőtétel $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$ képletével. (A bizonyítás hasonló módon történhet.)

6.4. Hasonló alakzatok kerületének, területének, térfogatának aránya

Tétel: Ha az *S* és *S'* sokszögek hasonlók, és a hasonlóság aránya λ (tehát *S'* oldalai *S* oldalainak $|\lambda|$-szorosai), akkor

- a sokszögek kerületének aránya $\frac{k'}{k} = |\lambda|$;
- a sokszögek területének aránya $\frac{t'}{t} = |\lambda|^2$.

(A kerületre vonatkozó összefüggés nyilvánvaló. Háromszögekre a területi összefüggés könynyen igazolható, hiszen a képháromszög egyik oldala és a hozzá tartozó magasság egyaránt $|\lambda|$-szorosra változott. A sokszögekre vonatkozó tétel pedig a sokszögek háromszögekre való felbontásával igazolható.)
A tétel **általánosítható** tetszőleges síkidomokra, és bizonyos értelemben térbeli testekre is.

Tétel: Ha a *P* és *P'* testek hasonlók, és a hasonlóság aránya λ (tehát *P'* megfelelő lineáris jellemzői *P* jellemzőinek $|\lambda|$-szorosai), akkor

- a testek lineáris méreteinek (pl. élek vagy lapok kerülete) aránya $|\lambda|$;
- a testek felületének aránya $\frac{A'}{A} = |\lambda|^2$;
- a testek térfogatának aránya $\frac{V'}{V} = |\lambda|^3$.

7. Matematikai és matematikán kívüli alkalmazások

A hasonlóság a geometria egyes részterületein és a mindennapi életben is viszonylag gyakran használt transzformáció. Az alábbiakban néhány példát sorolunk fel.

- A geometriai szerkesztések egy külön fejezetét alkotják a **hasonlósági szerkesztések**. (Egy kiragadott példa: a körök külső és belső hasonlósági pontjainak szerkesztése.)
- A **párhuzamos szelők tétele** fontos összefüggés, ennek hátterében is hasonlósági transzformáció húzódik meg. Ezen belül egy tipikus alkalmazás a **negyedik arányos szerkesztése**. Ennek során az $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ összefüggésből, az adott *a, b, c* szakaszok segítségével az ismeretlen x szakaszt szerkesztjük meg.
- Általános iskolában is tanult fontos szerkesztés a **szakasz adott arányú részekre való felosztása**.
- Néhány jól használható, a hasonlóság segítségével bizonyítható tétel: a körhöz húzott szelőszakaszok tétele (külső és belső pontból), a háromszögek területét megadó Héron-formula, a csonkagúla és a csonkakúp térfogatképlete, vagy a húrnégyszögekre vonatkozó Ptolemaiosz-tétel (ez utóbbi kiegészítő anyag).
- Egy érdekesség: a magasságtétel vagy a befogótétel (vagy a szelőszakaszok tétele) segítségével megszerkeszthető adott szakasz **négyzetgyöke**.
- A **trigonometria** témaköre, a szögfüggvények algebrai és geometriai alkalmazása a derékszögű háromszögek hasonlóságára épül.

Matematikán kívüli alkalmazásokat is bőven találunk.

- Az emberi szem, az optikai eszközök (fényképezőgép, távcső, mikroszkóp) **képalkotása** a hasonlóság elvén alapul. (Jórészt ezzel foglalkozik a fizikának az ún. **geometriai optika** ága.)
- A képalkotással kapcsolatos kicsinyítés és nagyítás megjelenik a **képzőművészetben** (festészet, fényképészet) és az **építészetben** is. (Pl. templomok különböző méretű, de hasonló rózsaablakainak tervezése.)
- Tipikus hasonlósági alkalmazás a **térképészet**, illetve ennek térbeli megfelelője, a **modellezés**, makettek készítése.
- Végül egy szép irodalmi (szépirodalmi) alkalmazás a Gulliver-történetek. Ezekben Jonathan Swift angol író a 12-es váltószámot alkalmazza (Gulliver például 12-szer nagyobb, mint a liliputiak). Swift a hasonlósággal kapcsolatos számításait precízen végezte. Jó közelítéssel az élelmiszer mennyisége a test térfogatával arányos, így egy-egy étkezéskor Gulliver $12^3 = 1728$ liliputi adagot kapott; míg a ruházatának szövete – amely a test felületével arányos – $12^2 = 144$ liliputi ruhájának felelt meg.

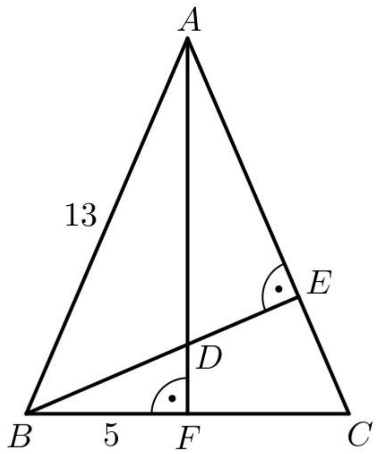
Néhány matematikatörténeti vonatkozás (2017-től része a szóbeli vizsgának):

- A hasonlóság fogalmát már az ókori **babilóniaiak** is ismerték, a ránk maradt írásos emlékek között szerepelt olyan tétel, mely szerint, ha két háromszög szögei megegyeznek, akkor a megfelelő oldalak aránya megegyezik.
- A hasonlóság fogalmát az **ókori görög matematikusok** is használták, amikor épületek magasságát vagy akár a Nap és a Hold sugarának az arányát meghatározták.
- **Eukleidész** (Kr.e. 300 körül) Elemek című alapvető művében az V. és a VI. könyv foglalkozik az **arányelmélettel**, így a hasonlósággal is. Ezekben a könyvekben szinte teljes egészében szerepelnek a mai középiskolai matematika-tananyag hasonlósággal kapcsolatos tételei, ismeretei.

8. Feladat

Az *ABC* háromszögben *AB* = *AC* = 13 cm, *BC* = 10 cm. Számítsa ki, hogy a *B* csúcsból húzott magasságvonal mekkora részekre osztja az *A* csúcsból húzott magasságvonalat és az *AC* oldalt! Eredményül pontos értéket adjon meg!

Megoldás:



Jelölje *E* a *B*-ből, illetve *F* az *A*-ból húzott magasságok talppontjait, és *D* a két magasság metszéspontját (ábra). *BF* = 5 cm, mert *ABC* egyenlő szárú, 1 pont

így a Pitagorasz-tételből *AF* = $\sqrt{13^2 - 5^2}$ = 12 (cm). 1 pont

Az *AFB*, *BEC* és *BFD* derékszögű háromszögek hasonlóak, mert egy-egy hegyesszögük az *ABC* háromszög fél szárszögével egyezik meg. 2 pont

$\frac{BF}{FA} = \frac{5}{12} = \frac{DF}{FB} = \frac{DF}{5}$, innen $DF = \frac{25}{12}$ és $AD = 12 - \frac{25}{12} = \frac{119}{12}$. 2 pont

$\frac{BF}{BA} = \frac{5}{13} = \frac{CE}{BC} = \frac{CE}{10}$, innen $CE = \frac{50}{13}$ és $AE = 13 - \frac{50}{13} = \frac{119}{13}$. 2 pont

Kombinatorika. Binomiális tétel. Gráfok.

1. Kombinatorika

A kombinatorika véges sok dolog sorba rendezésével, kiválasztásával, valamint különböző feltételekhez kötött összeszámlálási problémákkal foglalkozik.

Három típusfeladatot kell elsősorban megemlíteni:
- a sorba rendezést (permutáció),
- a kiválasztást (kombináció),
- a kiválasztás utáni sorba rendezést (variáció).

Permutáció

Ismétlés nélküli permutáció

Definíció: n különböző elem egy lehetséges sorrendjét az elemek egy permutációjának nevezzük.

Tétel: n különböző elem összes permutációjának száma $P_n = n!$.
($n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$; $0! = 1$).

Példa: Hány ötjegyű számot készíthetünk a 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek felhasználásával, ha a számjegyek egy számon belül nem ismétlődhetnek?
Válasz: 5!.

Ismétléses permutáció

Tétel: Ha az n elem között van néhány azonos (k_1 , $k_2, \ldots, k_m$ darab, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$),
akkor az n elem összes permutációjának száma: $P_n^{(k_1,k_2,\ldots k_m)} = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$.

Példa: Hány kilencjegyű számot készíthetünk a 2, 2, 2, 2, 5, 5, 8, 8, 8 számjegyek felhasználásával?
Válasz: $\dfrac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 3!}$.

Ciklikus permutáció

Definíció: Ha az n különböző elemet sorba rendezzük egy „kör” mentén, tehát nincsen első és utolsó, akkor ezt az n elem egy ciklikus permutációjának nevezzük.
Két ciklikus permutáció azonos, ha (az irányítást is figyelembe véve) bármely elemnek mindkét permutációban ugyanazok az elemek a szomszédjai.

Tétel: n különböző elem összes ciklikus permutációjának száma $P_n = (n-1)!$.

Példa: Hányféleképpen ülhet le egy öttagú család egy kör alakú asztal köré. (Két ülésrend különböző, ha van olyan ember, akinek nem ugyanazok a szomszédjai.)

Válasz: $(5-1)! = 24$-féleképpen.

Kombináció

Ismétlés nélküli kombináció

Definíció: Ha n különböző elem közül k darabot választunk ki úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, akkor ezt a kiválasztást az n elem egy k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációjának hívjuk.

Ezt az eljárást tekinthetjük úgy is, hogy egy n elemű hamaz egy k elemű részhalmazát választjuk ki.

Egy n-elemű halmaz k-elemű részhalmazainak számát az $\binom{n}{k}$ szimbólummal jelöljük.

$(0 \le k \le n;\ k, n \in \mathbf{N})$

Tétel: n elem összes k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Példa: Öt cédulára felírjuk a 2, 3, 4, 6, 8 számokat, és egy kalapból kihúzunk az öt cédulából egyszerre hármat. Hányféleképpen húzhatunk?

Válasz: $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10$ -féleképpen.

Ismétléses kombináció (kiegészítő anyag)

Definíció: Ha n különböző elem közül k darabot választunk ki úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, és ugyanazt az elemet akár többször is választhatjuk, akkor ezt a kiválasztást az n elem egy k-ad osztályú ismétléses kombinációjának hívjuk.

Tétel: n elem összes k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma: $C^{i}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

Példa: Sok cédulánk van, melyek mindegyikére egy-egy szám van felírva, mégpedig a 2, 3, 4, 5, 6 számok valamelyike. Mindegyik szám legalább három cédulán szerepel. A cédulákat egy kalapba tesszük, majd kihúzunk közülük egyszerre hármat. Hányféle számhármast kaphatunk?

Válasz: $\binom{5+3-1}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35$ -féle számhármast kaphatunk.

Variáció

Ismétlés nélküli variáció

Ha n különböző elem közül k darabot választunk ki úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor ezt a kiválasztást az n elem egy k-ad osztályú ismétlés nélküli variációjának hívjuk.

Tétel: n elem összes k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma:
$V_{n,k}=\dfrac{n!}{(n-k)!}=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Példa: Hány háromjegyű számot készíthetünk a 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával, ha a számjegyek egy-egy háromjegyű számon belül nem ismétlődhetnek?
Válasz: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Ismétléses variáció

Ha n különböző elem közül k-szor kiválasztunk egy-egy elemet úgy, hogy ugyanazt az elemet akár többször is választhatjuk, és a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor ezt a kiválasztást az n elem egy k-ad osztályú ismétléses variációjának hívjuk.

Tétel: n elem összes k-ad osztályú ismétléses variációinak száma: $V_{n,k}^{i}=n^{k}$.

Példa: Hány háromjegyű számot készíthetünk a 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek egy háromjegyű számon belül?
Válasz: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2. Binomiális tétel

A tétel segítségével rendezett polinom alakban írható fel egy kéttagú összeg (binom) n-edik hatványa. A tételből kiderül, hogy az $(a+b)^n$ kifejezés kifejtésében milyen tagok szerepelnek és milyen együtthatókkal.

Tétel: $(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}\cdot b^n$.

A tételben szereplő $\binom{n}{k}$ alakú együtthatókat binomiális együtthatóknak hívjuk.

Bizonyítás: $(a+b)^n=(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$.
Bontsuk fel a jobb oldalon álló n darab zárójelet. Minden zárójelből az összes lehetséges módon kiválasztunk egy-egy tagot és azokat összeszorozzuk. Minden szorzat n-tényezős. A szorzatokat összeadjuk. Vizsgáljuk meg, hányféleképpen kaphatjuk meg pl. a k darab b-t és $(n-k)$ darab a-t tartalmazó szorzatot! A korábban elmondottak szerint ezt éppen $\binom{n}{k}$-féleképpen kaphatjuk meg, hiszen az n zárójel közül a sorrendre való tekintet nélkül választunk ki k darabot,

melyekből a b-ket vesszük. Így az általános, $a^{n-k}b^k$ szorzat együtthatója $\binom{n}{k}$. Az állítást beláttuk.

A **Pascal-háromszög** a binomiális együtthatókból álló számháromszög.

A 0. sorban $\binom{0}{0}$, az 1. sorban: $\binom{1}{0}$ és $\binom{1}{1}$, a 2. sorban $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ és $\binom{2}{2}$ és így tovább.
Az *n*. sorban $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, …, $\binom{n}{n}$ szerepel.

A Pascal-háromszög első néhány sora:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Kiszámolva a megfelelő értékeket:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

A binomiális tétel egyik speciális esete az $a = 1$ és $b = 1$ eset.
Ekkor a binomiális együtthatókból álló Pascal-háromszög *n*-edik sorában álló tagjainak összegét kapjuk, ami ezek szerint 2^n.

$(1+1)^n = \binom{n}{0}\cdot 1^n + \binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1 + \binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot 1^2 + \ldots + \binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot 1^k + \ldots + \binom{n}{n}\cdot 1^n$, azaz

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

A kapott összefüggés egyúttal megadja az *n*-elemű halmaz részhalmazainak a számát is.
A binomiális együtthatók két további tulajdonsága:

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ami az is mutatja, hogy a Pascal-háromszög szimmetrikus, valamint

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, ami tulajdonképpen a Pascal-háromszög összeadási tulajdonsága.

3. Gráfok

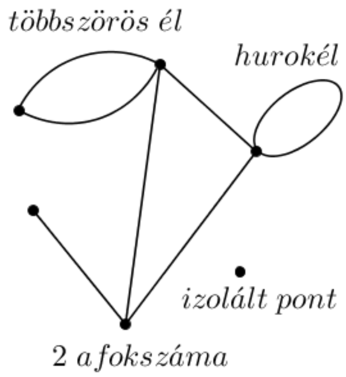
Bár a gráfelmélet születése a 18. századra nyúlik vissza és hagyományosan Euler „königsbergi hidak” problémája a kiindulópont, a gráfelmélet mégis modern tudományterülete a matematikának, fontosabb eredményei az elmúlt 100 évben születtek.

Gráfokkal lehet szemléltetni például véges sok dolog közötti kapcsolatokat. A dolgok minősége nem lényeges, a gráfokkal alapvetően a kapcsolatokra, a struktúrára, a szerkezet tulajdonságaira fókuszálunk.
Ha szeretnénk az ilyen struktúrákat lerajzolni, akkor célszerű a „dolgokat” pontokkal, a köztük fennálló „kapcsolatot” összekötő vonallal szemléltetni.

Definíció: A **gráf** pontokból (csúcsokból) és vonalakból (élekből) áll. Minden él két (nem feltétlenül különböző) pontot köt össze.

A gráf tehát pontok és élek halmaza. Két pont akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha a pontok által modellezett objektumok között a vizsgált kapcsolat áll fenn.

Definíció: Ha két pontot több él is összeköt, akkor ezeket **többszörös él**nek nevezzük.



Definíció: Hurokélnek hívjuk azt az élt, melynek kezdő- és végpontja ugyanaz a pont.

Definíció: A gráf olyan pontját, melyből nem indul ki él, i**zolált pont**nak nevezzük.

Definíció: Egy véges gráfot **egyszerű gráf**nak nevezünk, ha sem hurokéle, sem többszörös éle nincsen.

Definíció: A gráf egy pontjának **fokszám**a a pontból induló élek száma.

Tétel: A fokszámok összege az élek számának kétszerese.

Ezen tétel következményei:

Tétel: Minden gráfban a fokszámok összege páros szám.

Tétel: Minden gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros.

Tétel: Minden egyszerű gráfban van két azonos fokszámú pont.

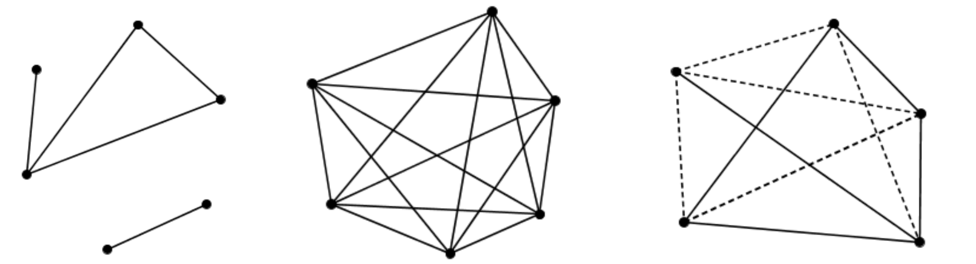
Bizonyítás: Jelölje a gráf pontszámát n. A lehetséges fokszámok 0, 1, 2, … , $n - 1$, ez n különböző lehetőség. Ha van a gráfban $n - 1$ fokszámú pont, akkor ez a gráf összes többi pontjával össze van kötve, ezért 0 fokszámú pontja nem lehet a gráfnak, tehát ez a két fokszám egyszerre nem létezhet a gráfban. Így, mivel az n pontnak csak $(n - 1)$-féle különböző lehetséges fokszáma van, a skatulya-elv miatt biztosan lesz a fokszámok között legalább két egyforma.

Definíció: Egy gráf **összefüggő**, ha bármely pontjából bármely másik pontjába élek mentén el lehet jutni.

Definíció: Egy n-pontú egyszerű gráf **teljes gráf**, ha bármely két pontját él köti össze.

Tétel: Az n-pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$.
(Ha a gráf egyetlen pontból áll, akkor is teljes gráfnak tekintjük.)

Definíció: A G gráf **komplementere** az a gráf, amelynek pontjai megegyeznek G pontjaival, és amelyben két pont pontosan akkor van összekötve éllel, ha G-ben nincs összekötve.
Jele: $\overline{G}$



nem összefüggő gráf *teljes hatpontú gráf* *komplementer gráf (szaggatott)*

Definíció: Két gráf **izomorf**, ha ponjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetők egymásnak.

Definíció: **Sétá**nak nevezzük egy gráf éleinek egymáshoz kapcsolódó sorozatát.

Definíció: Ha az séta kezdő- és végpontja megegyezik, akkor **körsétá**nak hívjuk.

Definíció: **Út**nak nevezzük az élek olyan egymáshoz kapcsolódó sorozatát, amely bármely ponton legfeljebb egyszer halad át.

Definíció: Ha az út kezdő- és végpontja megegyezik, akkor (gráfelméleti) **kör**nek hívjuk.

Definíció: **Euler-sétá**nak nevezzük azt a sétát, amely a gráf minden élén pontosan egyszer halad át.

Definíció: **Euler-körsétá**nak nevezzük azt a körsétát, amely a gráf minden élén pontosan egyszer halad át. (Vagy: Ha az Euler-séta kezdő- és végpontja megegyezik, akkor **Euler-körsétá**nak hívjuk.)

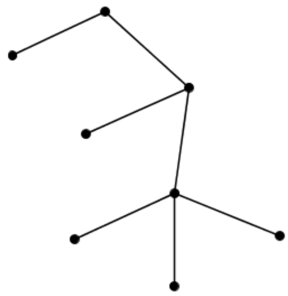
Tétel: Összefüggő gráfban pontosan akkor létezik Euler-séta, ha a gráfnak legfeljebb két páratlan fokszámú pontja van. (Az esetleges páratlan fokszámú pontok a séta kezdő- és végpontjában vannak.)

Tétel: Összefüggő gráfban pontosan akkor létezik Euler-körséta, ha a gráf minden pontjának a fokszáma páros.

Definíció: Az összefüggő, egyszerű és körmentes gráfot **fagráf**nak vagy röviden **fának** nevezzük.

Tétel: A fa bármely két csúcsát egyetlen út köti össze.

Tétel: Az n-pontú fagráf éleinek száma $n - 1$.



fagráf

4. Néhány alkalmazás

Kombinatorika

- sorbarendezési, kiválasztási, összeszámlálási problémák megoldása
- n elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^n
- binomiális tétel bizonyítása
- a klasszikus valószínűségi modell használata

Gráfok

- közlekedési útvonalak, elektromos hálózatok (chipek), munkafolyamatok gazdaságos tervezése
- társadalomtudományi felhasználhatóság (pl. szociológia: szociometria, szociogram)
  „A szociometria a szociológiának az emberi kapcsolatok felmérésével foglalkozó ága. Jacob L. Moreno pszichoterapeuta dolgozta ki azon tanulmányaiban, melyek a társadalmi szerkezetek és a pszichológiai jóllét közötti kapcsolatok közötti összefüggésre irányulnak. A szociometrikus felmérések feltárják a csoport rejtett szerkezetét. Moreno egyik újítása a **szociogram** feltalálása volt, melyben egyes **személyek** képi **pontokkal** vannak ábrázolva, és a személyek közti **kapcsolatok vonalakkal**."
  (https://hu.wikipedia.org/wiki/Szociometria)
- szociológusok vették észre, hogy hat ember között mindig van három, akik vagy mind ismerik egymást, vagy közülük senki sem ismer senkit. Természetesen egy gráfelméleti tételről van szó, amely a Ramsey-elmélet egyik kisméretű esete. A Ramsey-elméletet a mai napig kutatják, rengeteg megoldatlan kérdése van. Lényege, hogy a nagyméretű struktúrák (pl. gráfok) tartalmaznak szabályos részstruktúrákat. Az említett ismeretségi példában ez az ismeretségi háromszög vagy nemismeretségi háromszög létezése, melyhez minimálisan 6 főre van szükség.
- térképek színezése, négyszín-sejtés
  A XIX. század közepén Francis Guthrie angol matematikus tette fel a kérdést: Legkevesebb hány szín elegendő egy tetszőleges térkép kiszínezéséhez? Úgy tűnt, hogy három szín

kevés, de négy szín elegendő, ám Guthrie ezt a kérdést megoldani nem tudta. Még ebben a században bebizonyították, hogy öt szín biztosan elegendő. Több mint 120 évig senki sem tudta igazolni a négyszín-sejtést, de 1976-ban számítógép segítségével sikerült bebizonyítani, és a sejtésből tétel lett. Ez volt az első alkalom, amikor számítógép segítségével igazoltak matematikai állítást (bár sokan vitatták ennek létjogosultságát).

- informatikai struktúrák (pl. menürendszer – fa)
- ismeretségi láncok pl. a közösségi oldalakon:
  Ha két embert véletlenszerűen kiválasztunk egy közösségi oldalon, akkor átlagosan 4-5 hosszúságú ismeretségi lánccal összeköthetőek. Tehát Jamesnek van olyan ismerőse, akinek van olyan ismerőse, akinek van olyan ismerőse, akinek van olyan ismerőse, aki ismeri Chen-t.
  (Kultúrtörténeti érdekesség, hogy „a Földön bármely két ember között létezik legfeljebb hat hosszú ismeretségi lánc" észrevétel, mint logikai játék először Karinthy Frigyes: Láncszemek c. írásában szerepel.)

Matematikatörténeti vonatkozások (2017-től része a szóbeli vizsgának)

- **Blaise Pascal** munkássága: a **Pascal-háromszög** és tulajdonságai
- **Leonhard Euler:** a königsbergi hidak problémája, a gráfelmélet „születése"
- **Kőnig Dénes** (az első tudományos gráfelméleti könyv szerzője, 1936),
- **Erdős Pál**
  Az **Erdős-szám** gráfja:
  Gráfunk csúcspontjai legyenek a matematikusok, és két matematikust akkor kössünk össze egy éllel, ha írtak közösen matematikai cikket. Az Erdős-szám egy nemnegatív egész, amely azt mutatja, hogy az adott tudós milyen messze van ebben a gráfban Erdős Páltól. Erdős Pál Erdős-száma 0. Azoknak 1 az Erdős-száma, akik írtak vele közös cikket (a szomszédai ebben a gráfban). Ha valaki nem publikált cikket Erdős Pállal, de olyannal igen, aki írt közös cikket Erdős Pállal, akkor neki 2 az Erdős-száma.
  Erdős-Szekeres-tétel (1935):
  Bármely $nk + 1$ darab különböző számból álló sorozatban van vagy egy n-nél hosszabb csökkenő részsorozat, vagy egy k-nál hosszabb növekvő részsorozat.
  Erdős Pál - Rényi Alfréd - T. Sós Vera: Barátság-tétel:
  Ha egy véges gráfban bármely két csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van, akkor van olyan csúcs, amelyik az összes többivel szomszédos.
- **Lovász László:** az egyik leghíresebb élő magyar matematikus. Wolf-díjas. A kombinatorika és a számítógéptudomány világhírű kutatója. Többek között a nagyméretű gráfok tulajdonságait vizsgálja. Ilyen például az internet gráf.

5. Feladat

a) Három házaspár és egy barátjuk moziba megy. Jegyeik egy sorba, egymás mellé szólnak. Hányféleképpen ülhetnek le a hét helyre, ha a barátjukon kívül mindenki a házastársa mellett szeretne ülni?
b) Rajzoljon egy olyan hétpontú egyszerű gráfot, melynek legalább 10 éle van, és nincs benne három hosszúságú kör.

Megoldás:

a) Barátjuk csak az 1., 3., 5. vagy 7. székre ülhet. Csak így marad páros sok szék a házaspároknak mindkét irányban, másképpen nem tudnának a feltételeknek megfelelően leülni. Ez 4 lehetőség. 2 pont

A három házaspár a három fennmaradó székpárra 3! = 6 lehetséges sorrendben ülhet le. 1 pont

Minden házaspár kétféleképpen ülhet egymás mellé (férj-feleség, feleség-férj). 1 pont

Ha már adott a házaspárok sorrendje,
akkor a három házaspár esetében ez $2^3 = 8$ lehetőség, 1 pont

így a megfelelő sorrendek száma $4 \cdot 3! \cdot 2^3 = 192$. 1 pont

b) Megfelelő gráf rajza. (Akár 12 éle is lehet!) 2 pont