ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. október 15.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
Az állítás igaz.	1 pont	
Helyes indoklás, például: $\frac{a+b}{2} > \frac{6+8}{2} = 7$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

1. b)		
A megfordítás: Ha a és b számtani közepe nagyobb 7-nél, akkor $a > 6$ és $b > 8$.	1 pont	
A megfordítás hamis.	1 pont	
Jó ellenpélda (pl. $a = 5$, $b = 11$).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. c)		
(7-nek és x-nek a harmonikus közepe $\frac{2}{\frac{1}{7}+\frac{1}{x}}$, így) megoldandó a $\frac{2}{\frac{1}{7}+\frac{1}{x}} = 10$ egyenlet ($x > 0$).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a harmonikus közép* $\frac{2ab}{a+b}$ *alakját használja.*
$\frac{14x}{x+7} = 10$	1 pont	
$14x = 10x + 70$	1 pont	
Innen $x = 17,5$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. d)

	biztosan igaz	biztosan hamis	nem lehet eldönteni
A	X		
B		X	
C			X

(táblázat fent)	1-1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. a)		
$T(0) = 75$ °C, $H = 25$ °C, $t = 15$ perc, $c = -0,209$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
$T(15) = 25 + (75-25)\cdot 2^{-0,209\cdot 15} =$	1 pont	
$= 25 + 50\cdot 2^{-3,135} \approx$	1 pont	
$\approx 30,7$ °C hőmérsékletű lesz a kávé negyedóra múlva.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

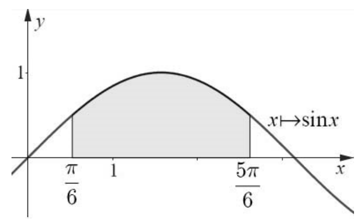
2. b)		
$25{,}5 = 25 + 50 \cdot 2^{-0{,}209 \cdot t}$	1 pont	
$0{,}01 = 2^{-0{,}209 \cdot t}$	1 pont	
$-0{,}209t = \log_2 0{,}01 \approx -6{,}644$	1 pont	$-0{,}209t = \dfrac{\lg 0{,}01}{\lg 2}$
$t \approx 31{,}8$, tehát kb. 32 perc múlva hűl le a kávé 25,5 °C hőmérsékletűre.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. c)		
$40 = H + (85 - H) \cdot 2^{-0{,}209 \cdot 10}$	1 pont	
$40 = H + (85 - H) \cdot 0{,}235$	1 pont	
$40 = 0{,}765H + 19{,}975$	1 pont	
Ebből a szoba hőmérséklete $H \approx 26{,}2$ °C.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

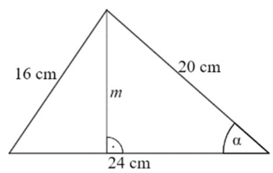
Megjegyzés: Ha a vizsgázó több válaszát is mértékegység nélkül adja meg, akkor a 2. feladatban ezért összesen 1 pontot veszítsen.

3. a)		
I. eset: $2\sin^2 x + 7\sin x + 1 = 5$, azaz $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$.	1 pont	
Az egyenlet ($\sin x$)-ben másodfokú, gyökei 0,5 és –4.	1 pont	
II. eset: $2\sin^2 x + 7\sin x + 1 = -5$, azaz $2\sin^2 x + 7\sin x + 6 = 0$.	1 pont	
Az egyenlet ($\sin x$)-ben másodfokú, gyökei –1,5 és –2.	1 pont	
A négy gyök közül ($-1 \le \sin x \le 1$ miatt) csak a $\sin x = 0{,}5$ lehetséges,	1 pont	
ekkor $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a válaszát fokban (helyesen) adja meg, akkor ezért 1 pontot veszítsen.
2. Ha a vizsgázó a válaszát periódus nélkül adja meg, akkor ezért 1 pontot veszítsen.

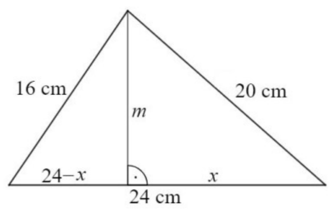
3. b)		
(A $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ intervallumon az f függvény pozitív, így) a terület: $T=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin x\,dx=$	1 pont	
$=\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=$	1 pont	
$=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$	1 pont	
$=\sqrt{3}$ ($\approx$ 1,73).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. a)		
A háromszög 120°-os szöge a legnagyobb szög, így ez a leghosszabb (c) oldallal szemközti szög.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Felírva a koszinusztételt a c oldalra: $(a+8)^2=a^2+(a+4)^2-2a(a+4)\cdot\cos 120°$.	1 pont	
Rendezve: $0=2a^2-4a-48$.	2 pont	
Az egyenlet pozitív gyöke $a=6$ (a negatív gyök -4, ami nem lehetséges).	1 pont	
A háromszög oldalai: 6 (cm), 10 (cm) és 14 (cm) (és ekkor teljesül a háromszög-egyenlőtlenség).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. b) első megoldás		
A másik két oldal 16 cm és 20 cm hosszú.	1 pont	
A 16 cm-es oldallal szemközti szöget α-val jelölve, a koszinusztétellel: $\cos\alpha=\frac{24^2+20^2-16^2}{2\cdot 24\cdot 20}=0,75$.	1 pont	
Innen $\alpha\approx 41,4°$.	1 pont	
A háromszög területe: $T=\frac{24\cdot 20\cdot\sin 41,4°}{2}\approx$	1 pont	*A* 24 cm-*es oldalhoz tartozó magasság: m =* $=20\cdot\sin 41,4°\approx 13,2$ cm.
$\approx 158,7$ cm^2.	1 pont	$T=\frac{24\cdot 13,2}{2}\approx 158,4$ cm^2
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: A háromszög másik két szöge 55,8°, *illetve* 82,8°, *a másik két oldalhoz tartozó magasság* 15,87 cm, *illetve* 19,84 cm.

4. b) **második megoldás**		
A másik két oldal 16 cm és 20 cm hosszú.	1 pont	
A háromszög félkerülete: $s = \left(\dfrac{24+20+16}{2} =\right) 30$ cm.	1 pont	
A Hérón-képlettel a terület: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{30 \cdot 14 \cdot 10 \cdot 6} =$	2 pont	
$= 60\sqrt{7} \approx 158{,}7\ \text{cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. b) **harmadik megoldás**		
A másik két oldal 16 cm és 20 cm hosszú.	1 pont	
A 24 cm-es oldalhoz tartozó magasságot jelölje m. (Ez a háromszögön belül halad.) Ez a magasság az alapot (az ábra szerint) egy x és egy $24 - x$ cm-es részre osztja. Mindkét részháromszögben a Pitagorasz-tételből m^2-et kifejezve, ezeket egyenlővé téve: $(m^2 =)\ 20^2 - x^2 = 16^2 - (24-x)^2$.	1 pont	
$400 - x^2 = 256 - 576 + 48x - x^2$, ahonnan $x = 15$ cm.	1 pont	
Innen $m = \sqrt{20^2 - x^2} = \sqrt{175} \approx 13{,}2$ cm.	1 pont	
$T = \dfrac{24 \cdot 13{,}2}{2} \approx 158{,}4\ \text{cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. c)		
Mivel c a leghosszabb oldal, ezért (a háromszög-egyenlőtlenség miatt) pontosan akkor létezik a háromszög, ha $a + b > c$.	1 pont	
$a + (a + 4) > a + 8$,	1 pont	
ahonnan $a > 4$.	1 pont	
Így a háromszög kerülete valóban nagyobb, mint $(4 + 8 + 12 =)$ 24 cm.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II.

5. a)		
Az átlag $\frac{1+2+2+3+3+3}{6}=\frac{7}{3}$ ($\approx 2{,}33$).	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó az átlagot, illetve a szórást számológéppel helyesen határozza meg.*
A szórás $\sqrt{\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0{,}745.$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. b)		
A dobások sorrendjét tekintve hat helyen szerepelhet az 1-es dobás.	1 pont	*Ismétléses permutációval számolva* $\frac{6!}{2!\cdot 3!}=$
A maradék öt dobásból $\binom{5}{2}=10$-féleképpen választhatjuk ki a két 2-es dobás helyét. (A maradék három helyen 3-as áll.)	1 pont	
Így összesen $6\cdot 10=60$ megfelelő dobássorozat van.	1 pont	= 60.
Összesen:	**3 pont**	

5. c) első megoldás		
A két dobás 36-féle lehet (összes eset).	1 pont	
Kedvező esetek azok, amikor az egyik szám páros, de 4-gyel nem osztható (2 vagy 6), a másik pedig páratlan (1, 3, vagy 5).	1 pont	
Mivel minden megfelelő számpárt kétféle sorrendben dobhatunk, a kedvező esetek száma $2\cdot 2\cdot 3=12$.	2 pont	
A keresett valószínűség így $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ ($\approx 0{,}333$).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

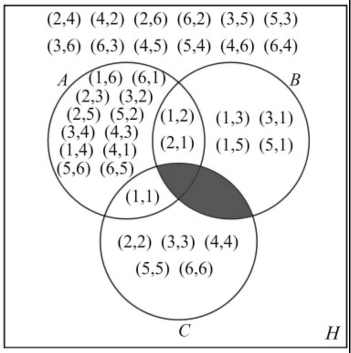
5. c) második megoldás		
Komplementer módszerrel számolunk. Kedvezőtlen esetek azok, amikor a szorzat vagy nem osztható 2-vel, vagy osztható 4-gyel.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
I. eset: A szorzat nem osztható 2-vel, ha két páratlan számot dobunk. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.	1 pont	
II/1. eset: 4-gyel osztható a szorzat egyrészt akkor, ha az egyik kockával 4-et, a másikkal pedig egy páratlan számot dobunk. Ennek a valószínűsége $2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.	1 pont*	
II/2. eset: 4-gyel osztható továbbá a szorzat, ha két páros számot dobunk. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.	1 pont*	
A keresett valószínűség $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ ($\approx 0{,}333$).	1 pont*	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzések: 1. A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

II/1. eset: 4-gyel osztható a szorzat egyrészt akkor, ha az egyik kockával 4-et (a másikkal pedig bármit) dobunk. Ennek a valószínűsége $\frac{6+6-1}{36}=\frac{11}{36}$.	1 pont	
II/2. eset: 4-gyel osztható továbbá a szorzat, ha két páros számot dobunk, de egyik sem a 4. Ennek a valószínűsége $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$.	1 pont	
A keresett valószínűség $1-\frac{9}{36}-\frac{11}{36}-\frac{4}{36}=\frac{12}{36}$.	1 pont	

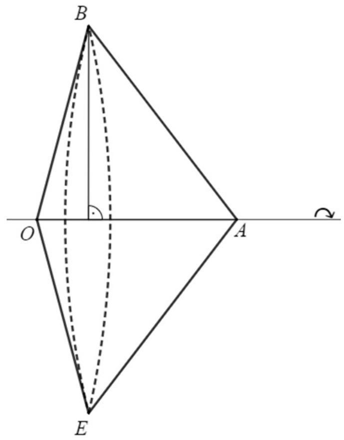
2. Ha a vizsgázó (például az alábbi táblázattal) rendezetten felsorolja a lehetséges eseteket, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

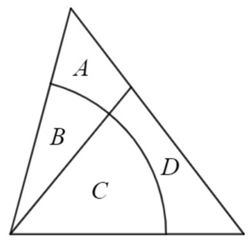
5. d)		
Helyesen kitöltött halmazábra.	5 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: 8 helyesen kitöltött tartományért 5 pont, 7 helyesen kitöltött tartományért 4 pont, 5 vagy 6 helyesen kitöltött tartományért 3 pont, 3 vagy 4 helyesen kitöltött tartományért 2 pont, 1 vagy 2 helyesen kitöltött tartományért 1 pont jár.
Egy nemüres tartomány kitöltése akkor helyes, ha legalább egy jó számpár szerepel benne, rossz számpár pedig nem szerepel benne. Egy üres tartomány kitöltése akkor helyes, ha be van satírozva.

6. a)		
Az OAB háromszög területe $\frac{12^2 \cdot \sin 75°}{2} \approx 69{,}5\ \text{cm}^2$.	1 pont	
Az OCD körcikk területe $\frac{75°}{360°} \cdot 8^2 \cdot \pi \approx 41{,}9\ \text{cm}^2$.	1 pont	
A szürkére színezett tartomány területe $(69{,}5 - 41{,}9 =)\ 27{,}6\ \text{cm}^2$.	1 pont	
Az OAB háromszögben koszinusztétellel: $AB = \sqrt{12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 75°} \approx$	1 pont	
$\approx 14{,}6$ cm.	1 pont	
A CD körív hossza $\frac{75°}{360°} \cdot 2 \cdot 8 \cdot \pi \approx 10{,}5$ cm.	1 pont	$\frac{2T_{OCD}}{r} = \frac{2 \cdot 41{,}9}{8} \approx 10{,}5$ cm
$CA = DB = 12 - 8 = 4$ cm	1 pont	
A szürkére színezett tartomány kerülete $(14{,}6 + 4 + 10{,}5 + 4 =)\ 33{,}1$ cm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. b)		
Az OAB háromszög B-hez tartozó magassága $12 \cdot \sin 75^\circ \approx 11{,}6$ cm.	1 pont	
A keletkező forgástest két forgáskúp egyesítése. Mindkét forgáskúp alapkörének sugara 11,6 cm, magasságaik összege pedig $OA = 12$ cm.	2 pont	*Az egyik magasság* $12 \cdot \cos 75^\circ \approx 3{,}1$ cm, *a másik* 8,9 cm.
A forgástest térfogata $\frac{11{,}6^2 \cdot \pi \cdot 12}{3} \approx 1691$ cm^3.	1 pont	437 cm^3 + 1254 cm^3
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó több válaszát is mértékegység nélkül adja meg, akkor a 6. feladatban ezért összesen 1 pontot veszítsen.

6. c) első megoldás		
Az ábra jelöléseit használjuk. Két szomszédos tartományt, például A-t és B-t $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen színezhetünk ki.	1 pont	
Ha ezután a C tartomány színe az A színével egyezik meg, akkor a D tartomány színezése 2-féle lehet.	1 pont	
Ha pedig a C tartomány színe a harmadik szín, akkor a D tartomány színezése egyértelmű (D és B színe egyforma).	1 pont	
Tehát $6 \cdot (2 + 1) = 18$ megfelelő színezés van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. c) második megoldás		
Ha két színnel színezünk, akkor 3-féleképpen választhatjuk ki a két színt, és ezekkel 2-féleképpen színezhetjük ki az ábrát. Ez $(3\cdot 2 =)$ 6 lehetőség.	1 pont	
Ha három színnel színezünk, akkor 3-féleképpen választhatjuk ki a kétszer felhasznált színt, 2-féleképpen választhatjuk ki az ezzel színezett két (szemközti) tartományt, és 2-féleképpen színezhetjük ki a másik két tartományt. Ez $(3\cdot 2\cdot 2 =)$ 12 lehetőség.	2 pont	
Tehát $(6 + 12 =)$ 18 megfelelő színezés van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rendezetten felsorolja a lehetséges eseteket, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

7. a) első megoldás		
(A kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe. A sorsolás után üresen maradt szekrényeket vizsgáljuk. Bármely három szekrény azonos valószínűséggel marad üresen.) 36 szekrény közül hármat $\binom{36}{3}$ (= 7140)-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma).	1 pont	*(A kisorsolt szekrényeket vizsgáljuk.)* $\binom{36}{33}$ (= 7140)
Három szekrényt egy adott sorból $\binom{12}{3}$ (= 220)-féleképpen lehet kiválasztani. Mivel három sor van, ebben az esetben a kedvező esetek száma $3\cdot\binom{12}{3}$ (= 660).	1 pont	$3\cdot\binom{12}{9}\binom{12}{12}\binom{12}{12}$ (= 660)
Az A esemény valószínűsége így $\frac{3\cdot\binom{12}{3}}{\binom{36}{3}}\approx 0{,}092$.	1 pont	
Három különböző sorból egy-egy szekrényt $12\cdot 12\cdot 12$ (= 1728)-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	$\binom{12}{11}^3$ (= 1728)
A B esemény valószínűsége így $\frac{12\cdot 12\cdot 12}{\binom{36}{3}}\approx 0{,}242$.	1 pont	
Tehát a B esemény valószínűsége nagyobb.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. a) második megoldás		
(A kiválasztás sorrendjét is figyelembe vesszük. Tekinthetjük úgy, hogy az üres szekrényeket sorsoljuk ki először.) Az első kisorsolt szekrény (mindkét esetben) bármelyik lehet.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első esetben a másodikra 35 szekrény közül még 11, harmadikra 34 szekrény közül még 10 „jó” szekrény van (és a három húzás egymástól független), így az A esemény valószínűsége $\frac{11}{35} \cdot \frac{10}{34} \approx 0{,}092$.	2 pont	
A második esetben a másodikra 35 szekrény közül még 24, harmadikra 34 szekrény közül még 12 „jó” szekrény van, így a B esemény valószínűsége $\frac{24}{35} \cdot \frac{12}{34} \approx 0{,}242$.	2 pont	
Tehát a B esemény valószínűsége nagyobb.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. a) harmadik megoldás		
(A kiválasztás sorrendjét is figyelembe vesszük. Tekinthetjük úgy, hogy az üres szekrényeket sorsoljuk ki először.) 36 szekrény közül hármat $36 \cdot 35 \cdot 34$ (= 42 840)-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma).	1 pont	
Az A esemény esetében elsőre bármelyik szekrényt kiválaszthatjuk, második és harmadikra (az első szekrény sorában levő) 11, illetve 10 szekrény marad, így a kedvező esetek száma $36 \cdot 11 \cdot 10$ (= 3960).	2 pont	
A B esemény esetében elsőre bármelyik szekrényt kiválaszthatjuk, második és harmadikra 24, illetve 12 szekrény marad, így a kedvező esetek száma $36 \cdot 24 \cdot 12$ (= 10 368).	2 pont	
Mivel (azonos számú összes eset mellett) a második esetben nagyobb a kedvező esetek száma, így a B esemény valószínűsége a nagyobb.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. b)		
A leghosszabb pálcát a téglatest alakú szekrény testátlója mentén helyezhetjük el.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A testátlóra vonatkozó összefüggés szerint: $\sqrt{20^2 + 35^2 + 30^2} \approx$	1 pont	
$\approx$ 50 cm a leghosszabb elhelyezhető pálca hossza.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. c) **első megoldás**		
A kulcsokat 4! (= 24)-féle sorrendben oszthatják ki (összes eset száma).	1 pont	
Kedvező esetek: I. Lehetséges, hogy mind a négyen a saját kulcsukat kapják vissza, ez 1 eset.	1 pont	*ABCD*
Az nem lehetséges, hogy pontosan hárman kapják vissza a saját kulcsukat (hiszen ekkor a negyedik lány is a sajátját kapná vissza).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
II. Ha pontosan ketten kapják vissza a saját kulcsukat, akkor a másik két lány felcserélve kapja vissza a kulcsait.	1 pont	*ABDC, ADCB, ACBD, DBCA, CBAD, BACD (ahol a lányok kulcsait a kezdőbetűjükkel jelöltük, és Alíz, Boglárka, Csenge, Dorka sorrendben osztják ki a kulcsokat).*
$\binom{4}{2} = 6$-féleképpen tudjuk kiválasztani azt a két lányt, aki a saját kulcsát kapja vissza (a másik két kulcs kiosztása ezek után egyértelmű).	1 pont	
A kedvező esetek száma tehát (1 + 6 =) 7.	1 pont	
A keresett valószínűség így $\frac{7}{24} \approx 0{,}292$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. c) **második megoldás**		
Annak a valószínűsége, hogy sorban mind a négyen a saját kulcsukat kapják vissza: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$.	2 pont	
Az nem lehetséges, hogy pontosan hárman kapják vissza a saját kulcsukat (hiszen ekkor a negyedik lány is a sajátját kapná vissza).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy például Alíz és Boglárka a saját kulcsát kapja vissza, de Csenge és Dorka nem: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$.	2 pont	
$\binom{4}{2} = 6$-féleképpen választható ki az a két lány, aki a saját kulcsát kapja vissza, így annak a valószínűsége, hogy pontosan ketten kapják vissza a saját kulcsukat: $6 \cdot \frac{1}{24} = \frac{6}{24}$.	1 pont	
A keresett valószínűség így $\left(\frac{1}{24} + \frac{6}{24} =\right) \frac{7}{24} \approx 0{,}292$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. a)		
1 tonna (= 1000 kg) = 1 000 000 gramm	1 pont	
(35 gramm zabmag 1000 darab magot tartalmaz.) 1 millió gramm zabmag $\frac{1\,000\,000}{35}\cdot 1000 \approx$ $\approx$ 28,57 millió,	1 pont	
azaz kb. $2{,}857\cdot 10^{7}$ darab magot tartalmaz.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. b)		
Ha 8 egyenlő részre osztjuk az 1000 kg zabot, akkor egy rész tömege 125 kg.	1 pont	
A gép ekkor $8\cdot\left(\frac{125^2}{40}+90\right)=3845$ perc,	1 pont	
azaz $\left(\frac{3845}{60}\approx\right)$ 64 óra alatt végez a zabhegyezéssel.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. c)		
Ha n egyenlő részre osztjuk az 1000 kg zabot, akkor egy rész tömege $\frac{1000}{n}$ kg.	1 pont	
A gép ekkor $n\cdot\left(\frac{1}{40}\cdot\frac{1000^2}{n^2}+90\right)=\frac{25\,000}{n}+90n$ perc alatt végez a munkával.	2 pont	
Vizsgáljuk az $f\colon \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{25\,000}{x}+90x$ függvényt. Ennek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja nulla.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(x)=-\frac{25\,000}{x^2}+90=0$	1 pont	
Innen $x=\sqrt{\frac{25\,000}{90}}=\frac{50}{3}\approx 16{,}67$ (mert $x>0$).	1 pont	
Ha $x>16{,}67$, akkor $f'(x)>0$, ha pedig $0<x<16{,}67$, akkor $f'(x)<0$, ezért ez valóban (abszolút) minimumhelye f-nek.	1 pont	$f''(x)=\frac{50\,000}{x^3}>0$

(Mivel $n \in \mathbf{Z}^+$, a minimális időt $n = 16$-nál vagy $n = 17$-nél kapjuk.) $f(16) = 3002{,}5$ és $f(17) \approx 3000{,}6$,	1 pont	
így az 1000 kg zab kihegyezésének ideje akkor minimális, ha 17 egyenlő részre osztjuk.	1 pont	
Ekkor a zabhegyezési idő kb. $\left(\frac{3000}{60}=\right)$ 50 óra.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

9. a)		
Megoldandó a $\left\lvert 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\rvert < 10^{-7}$ egyenlőtlenség,	1 pont	
azaz $\frac{1}{2^{n-1}} < 10^{-7} \;\Leftrightarrow\; 10^7 < 2^{n-1}$.	1 pont	
A 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, így	1 pont	
$\log_2 10^7 < n-1$,	1 pont	
azaz $n > \log_2 10^7 + 1 \approx 24{,}3$.	1 pont	
A keresett n érték a 25.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat első 25 tagját észszerű és helyes kerekítésekkel kiszámolja, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

9. b)		
A sorozat első tagja $a_1 = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$,	1 pont	
hányadosa $q = -\frac{1}{2}$.	1 pont	
Az első 10 tag összege: $S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} =$ $= (-1)\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{-\frac{1023}{1024}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2046}{3072}$,	1 pont	
ami a kért alakban $-\frac{341}{512}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. c) első megoldás		
Az explicit alakot felhasználva $2b_{n+2}-b_{n+1}-b_n=$ $=2\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}+2\right)-\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+2\right)-$ $-\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+2\right)=$	2 pont	
$=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{4}+4-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2-$ $-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-2=$	2 pont	
$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\left(4\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2\right)+4-2-2=$	1 pont	
$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot(1+1-2)+0=0$ valóban teljesül minden n-re.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. c) második megoldás		
A $2b_{n+2}$ „konstans része” 4, a b_{n+1} és a b_n konstans része 2, így a konstansok összege a $2b_{n+2}-b_{n+1}-b_n$ kifejezésben 4 – 2 – 2 = 0.	2 pont	$b_n=a_n+2$, *így* $2b_{n+2}-b_{n+1}-b_n=$ $=2(a_{n+2}+2)-(a_{n+1}+2)-$ $-(a_n+2)=$
A „nem konstans rész” megegyezik az a) feladatbeli $\{a_n\}$ mértani sorozattal.	1 pont	$=2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n$
$2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=2a_n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}-a_n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-a_n=$	1 pont	
$=a_n\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)=0$	1 pont	
Tehát a nem konstans részek összege is 0, így $2b_{n+2}-b_{n+1}-b_n=0$ valóban teljesül minden n-re.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. c) harmadik megoldás		
Kifejezzük b_n-nel b_{n+1}-et és b_{n+2}-t. $b_{n+1}=(b_n-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2=-\frac{1}{2}b_n+3$	2 pont	
$b_{n+2}=(b_n-2)\cdot\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}b_n+\frac{3}{2}$	2 pont	
Így $2b_{n+2}-b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}b_n+3+\frac{1}{2}b_n-3-b_n=$	1 pont	
$=b_n\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)=0$ valóban teljesül minden n-re.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. c) negyedik megoldás		
A bizonyítandó egyenlőséget átrendezzük: $b_{n+2}=\frac{b_{n+1}+b_n}{2}$. (Vagyis igazolandó, hogy a 3. tagtól kezdve bármely tag az előző két tag számtani közepével egyenlő.)	1 pont	
$2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}+2=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+2}{2}$	1 pont	
A jobb oldalon elvégezve az osztást: $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}+2=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+1$.	1 pont	
$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$	1 pont	
$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$-nel osztva: $\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)+1$, ami azonosság.	1 pont	
Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, az eredeti állítást ezzel beláttuk.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	