

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

2023. május 9. 9:00

I.

Időtartam: 45 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 45 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A megoldások sorrendje tetszőleges.
3. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
4. **A feladatok végeredményét az erre a célra szolgáló keretbe írja**, a megoldást csak akkor kell részleteznie, ha erre a feladat szövege utasítást ad!
5. A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
6. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén egyértelműen jelölje, hogy melyiket tartja érvényesnek!
7. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

1. Adott a következő két halmaz: $A = \{a; b; e; g\}$ és $B = \{a; b; c; d; f\}$.
Adja meg a $B \setminus A$ halmazt elemei felsorolásával!

$B \setminus A =$	2 pont	
-------------------	--------	--

2. Bori, Kristóf és Marci játszanak. A játék elején 10 különböző szerepkártyából húznak egyet-egyet, visszatevés nélkül. Hányféle szereposztásban kezdhetik a játékot?

	2 pont	
--	--------	--

3. Zita 275 000 Ft-os fizetését 308 000 Ft-ra emelték. Hány százalékkal emelték Zita fizetését?

	2 pont	
--	--------	--

4. Az ABC háromszögben $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$. Az AB oldal felezőpontja F , az AC oldal felezőpontja G . Írja fel \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok segítségével az \overrightarrow{FG} vektort! Válaszát indokolja!

	2 pont	
$\overrightarrow{FG} =$	1 pont	

5. Adjon meg öt pozitív számot, melyek mediánja 3, terjedelme 7.

	2 pont	
--	--------	--

6. Határozza meg a kettes számrendszerben felírt 101011 szám tízes számrendszerbeli alakját!

	2 pont	
--	--------	--

7. Tudjuk, hogy $\log_2 x = 5$. Adja meg $\log_2(2x)$ értékét! Válaszát indokolja!

	1 pont	
	1 pont	

8. Sorolja fel azokat az x egész számokat, amelyekre $-6 \leq x \leq 2$ és $-4 < x < 10$ egyszerre teljesül!

	2 pont	
--	--------	--

9. Az iskolai teremfoci-bajnokságra 16 csapat nevezett. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani azt a kettőt, amelyek a nyitómérkőzést játsszák?

	2 pont	
--	--------	--

- 10.** Az ABC derékszögű háromszög oldalai $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$ egység hosszúak. Számítsa ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát! Válaszát indokolja!

	3 pont	
	1 pont	

- 11.** Adott az $5x - y = 7$ egyenletű e egyenes.
- Adja meg az e egyenes egy normálvektorát!
 - Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a $P(3; 2)$ ponton, és párhuzamos az e egyenessel!

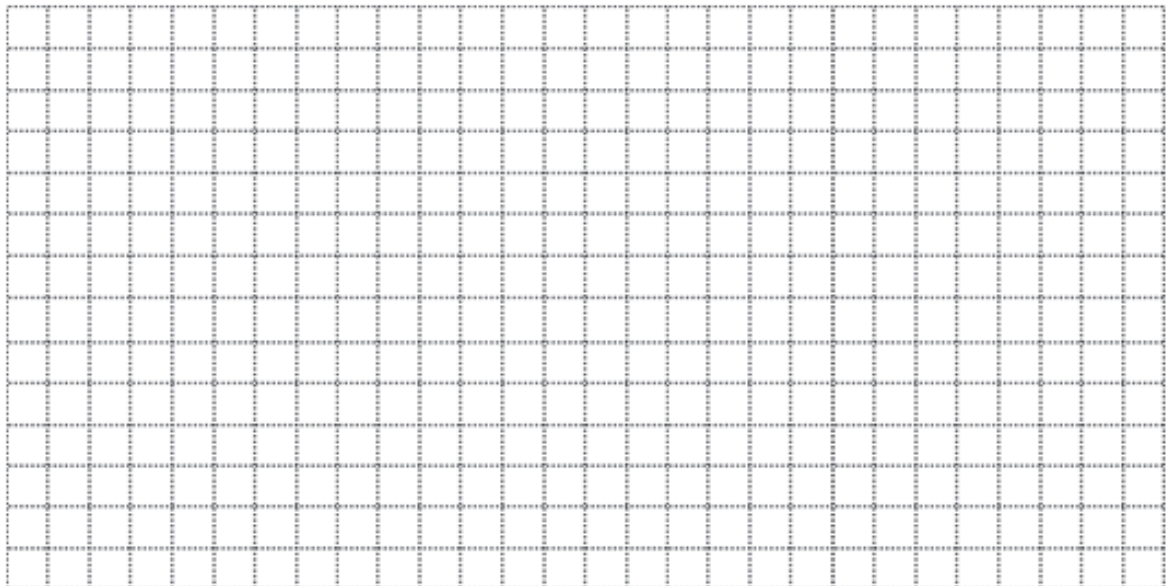
a)	1 pont	
b)	2 pont	

12. Adott a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett f , illetve a valós számok halmazán értelmezett g és h függvény:

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \qquad g(x) = (x - 2)^2 - 3 \qquad h(x) = 2 \sin x$$

Az alábbi állítások mellé írja oda azoknak a függvényeknek a nevét, amelyekre az adott állítás igaz!

Minimumának értéke (-2) :	2 pont	
Legalább két zérushelye van:	2 pont	



		pontszám	
		maximális	elért
I. rész	1. feladat	2	
	2. feladat	2	
	3. feladat	2	
	4. feladat	3	
	5. feladat	2	
	6. feladat	2	
	7. feladat	2	
	8. feladat	2	
	9. feladat	2	
	10. feladat	4	
	11. feladat	3	
	12. feladat	4	
ÖSSZESEN		30	

dátum

javító tanár

	pontszáma egész számra kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó a II. írásbeli összetevő megoldását elkezdte, akkor ez a táblázat és az aláírási rész üresen marad!
2. Ha a vizsga az I. összetevő teljesítése közben megszakad, illetve nem folytatódik a II. összetevővel, akkor ez a táblázat és az aláírási rész kitöltendő!

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

2023. május 9. 9:00

II.

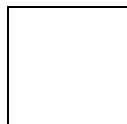
Időtartam: 135 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

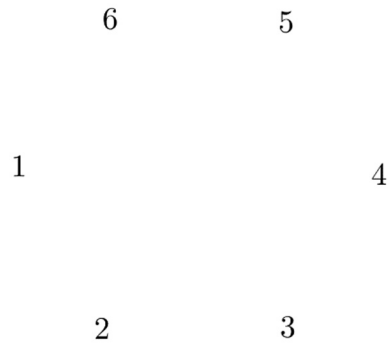
1. A feladatok megoldására 135 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A **B** részben kitűzött három feladat közül csak kettőt kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.



4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban feltehető táblázatok helyettesítése (\sin , \cos , tg , \log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, *de alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell.*
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

A

- 13.** Az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokat leírtuk egy lapra. Két különböző számot pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha az egyik szám osztója a másiknak (de egyik számot sem kötjük össze önmagával). Így egy hatpontú gráfot kapunk.



- a)** Rajzolja fel a kapott gráfot!
- b)** Adja meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszait indokolja!
- I. Van olyan pozitív egész szám, amelynek 4 darab pozitív osztója van.
II. Ha az n egész szám nem osztója az m egész számnak, akkor n és m relatív prímek.

Tekintsük az alábbi két eseményt.

- A: Egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 24-nek.
B: Egy szabályos dobókockával kétszer dobva egyik dobás sem 6-os.

- c)** Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége?

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

- 14.** Fizikaórán egy lejtőn lecsúszó test gyorsulását vizsgálták pármunkában a tanulók. A hat mérőpár mindegyike négy mérést végzett.

Az Emma-Norbi mérőpár négy mérésének eredménye:

	1. mérés	2. mérés	3. mérés	4. mérés
gyorsulás (m/s ²)	1,9	2,0	1,8	2,3

- a)** Számítsa ki Emma és Norbi négy mérésének a szórását!

A másik öt mérőpár 20 mérésének átlaga pontosan 1,9 m/s² lett.

- b)** Mennyi a hat mérőpár 24 mérésének átlaga? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

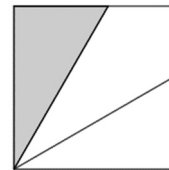
Egy másik mérés alkalmával a tanulók a talaj szintjéről függőlegesen fellőtt, majd a talajra visszahulló golyó mozgását vizsgálták. Méréseik szerint a golyó talajtól mért h távolsága a következő összefüggésben van a fellövés pillanatától eltelt t idővel:

$h(t) = 6t - 5t^2$. (Az időt másodpercben, a távolságot méterben mérjük.)

- c)** A képlet alapján hány méterre van a talajtól a golyó a fellövéstől számított 0,5 másodperc elteltével?
- d)** A fellövéstől számítva hány másodperc elteltével lesz a golyó a talaj fölött 1 méter magasságban?

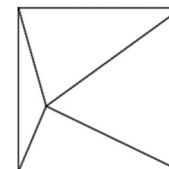
a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	2 pont	
d)	3 pont	
Ö.:	12 pont	

15. Egy 4 cm oldalú négyzetbe két olyan szakaszt húzunk, amelyek az egyik csúcsnál lévő derékszöget harmadolják.



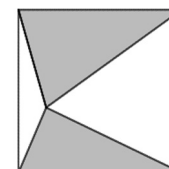
- a) Mekkora az így keletkező, az ábrán szürkére színezett háromszög területe?

Jelöljük ki egy ugyanekkora négyzetnek egy belső pontját, és a pontot kössük össze a négyzet csúcsaival az ábrán látható módon. A keletkező háromszögek belsejét kiszínezzük kék, zöld vagy sárga színnel. Mindhárom színt felhasználjuk, és minden háromszöget csak egy színnel színezzük. Az oldalukkal egymáshoz csatlakozó háromszögek nem lehetnek azonos színűek.



- b) Hányféleképpen színezhető ki a négyzet a feltételeknek megfelelően?

Tekintsük a 4 cm oldalú négyzetbe rajzolt háromszögek közül a két-két szemközti háromszög területének összegét.



- c) Igazolja, hogy ez a két területösszeg egyenlő, azaz az ábrán látható szürke terület ugyanakkora, mint a fehér terület!

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

B

**A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!**

16. Oldja meg az alábbi két egyenletet a valós számok halmazán!

a) $2 \cdot \sqrt{3-x} = x+5$

b) $\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{x^2-1} = 2$

Egy számtani sorozat első tagja 18. A sorozat első hat tagjának összege egyenlő a sorozat első hét tagjának összegével.

c) Mutassa meg, hogy a sorozat első tizenhárom tagjának az összege 0, és számítsa ki a sorozat tizenharmadik tagját!

a)	6 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	17 pont	

**A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!**

17. A 2018-as esztendőben az A kisüzem 500 millió forint, a B kisüzem 400 millió forint értékű terméket állított elő. A hosszú távú fejlesztési tervek szerint az A üzem évi 5%-kal, a B üzem évi 6%-kal növeli a termelési értékét.

- a) Számítsa ki, hogy a tervek szerint a következő 20 év alatt (2019-től 2038-ig) összesen hány millió forint értékű terméket állítanak elő az A üzemben!

Egy gazdasággal foglalkozó portálon nyilvánosságra hozták a fenti terveket. A cikkhez kapcsolódó fórumon vita bontakozott ki. Az egyik hozzászóló szerint a következő időszakban évről évre egyre kisebb lesz a két üzem éves termelési értéke közötti különbség.

- b) Számítsa ki a megadott táblázat hiányzó adatait, és igazolja, hogy ez a kijelentés nem igaz!

	2018	2019	2020	2021
A üzem termelésének értéke (millió Ft)	500			
B üzem termelésének értéke (millió Ft)	400			

A vitafórum egy másik résztvevője szerint éppen ellenkezőleg: a két üzem éves termelési értéke közötti különbség az évek múlásával egyre nagyobb lesz, és a B üzem termelési értéke soha nem fogja meghaladni az A üzem termelési értékét. Egy harmadik hozzászóló szerint ez sem igaz.

- c) Számítsa ki, hogy melyik évben éri utol a B üzem termelésének értéke az A üzem termelésének értékét! (Feltételezzük, hogy a termelések értéke valóban a tervek szerint alakul.)

a)	4 pont	
b)	6 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	17 pont	

**A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!**

18. A Gömbvarázs desszert dobozának alakja szabályos hatszög alapú hasáb, melynek minden alapéle 5 cm, magassága pedig 3 cm hosszú. A desszert hat csokigömböt tartalmaz. Mindegyik csokigömb átmérője 2,8 cm.

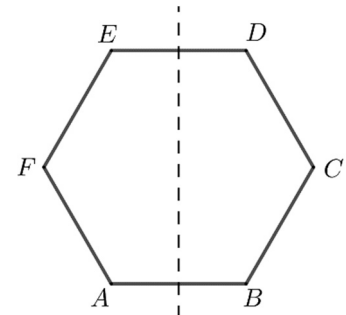
a) Hány százaléka a hat csokigömb térfogata a doboz térfogatának?

A Gömbvarázs desszertbe kerülő csokigömböket aranyszínű vagy piros papírba csomagolják. Az adagológép véletlenszerűen, egyesével ejt $\frac{1}{3}$ valószínűséggel piros, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel pedig aranyszínű gömböt a dobozokba, mindegyikbe összesen hatot.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy az egy dobozba kerülő hat gömb közül legalább öt aranyszínű!

Az $ABCDEF$ szabályos hatszög minden oldala 5 cm hosszú. A hatszöget megforgatjuk az AB oldal felezőmerőlegese körül.

c) Számítsa ki az így keletkező forgástest felszínét!



a)	7 pont	
b)	5 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	17 pont	

	a feladat sorszám	pontszám		
		maximális	elért	összesen
II. A rész	13.	12		
	14.	12		
	15.	12		
II. B rész		17		
		17		
		← nem választott feladat		
ÖSSZESEN		70		

	pontszám	
	maximális	elért
I. rész	30	
II. rész	70	
Az írásbeli vizsgarész pontszáma	100	

_____ dátum

_____ javító tanár

	pontszáma egész számra kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

_____ dátum

_____ dátum

_____ javító tanár

_____ jegyző