ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2008. október 21.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
A keresett halmaz: $\{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$.	2 pont	*Ha csak egyetlen hiba van, 1 pont. Ha az összes osztót felsorolja, 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$(3^2 =)\,9$ **-**szeresére nő a terület**.**	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
$A_1 = \{1;10\}$; $A_2 = \{1;100\}$; $A_3 = \{10;100\}$.	2 pont	*1. Két jó részhalmaz megadása 1 pont. 2. Hibás jelölés esetén pontot ne vonjunk le!*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
A keresett vektor: $\mathbf{r} = (12;-4)$.	2 pont	*Számolási hiba esetén a helyes gondolat megjelenítése 1 pontot ér.*
Összesen:	**2 pont**	

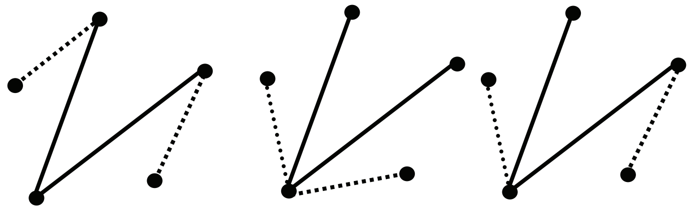
5.		
A hegyesszögek: 23° és 67°.	2 pont	*Hibás kerekítés esetén 1 pont jár. Helyes szögfüggvény felírása 1 pontot ér.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
Az év végi osztályzat medián esetén: 4	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	*A pontok nem bonthatók.*

7.		
Az *A* állítás hamis.	1 pont	
A *B* állítás igaz.	1 pont	
A *C* állítás igaz.	1 pont	
A *D* állítás hamis.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8.		
A kifejezés nem értelmezhető, ha $x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ,\ n \in \mathbf{Z}$	3 pont	*Ha tudja, hogy a nevező nem lehet 0, az 1 pontot ér.* *Ha megad egy jó x értéket, az 1 pont.* *Ha a mértékegység és a periódus is jó, 1 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

9.		
A 16 tanuló magasságának összege: (16 · 172 =)2752 (cm).	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
Példák a helyes megoldásra: 	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.

	IGEN	NEM
$\underline{e}(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$		X
$\underline{e}(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$		X
$\underline{e}(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2})$	X	
$\underline{e}(\sin 30^\circ;-\cos 30^\circ)$	X	

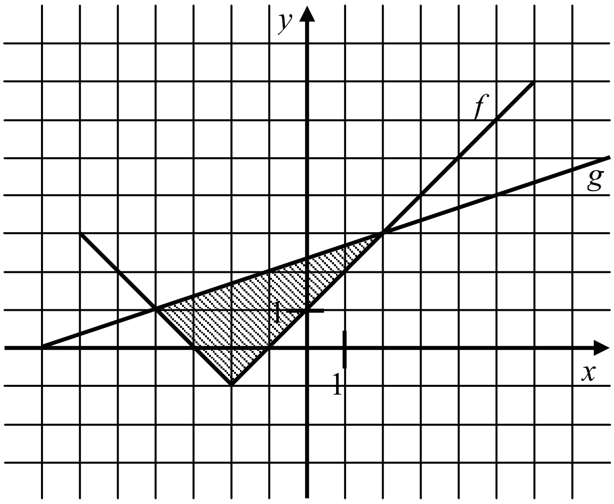
	4 pont	*Minden helyes válasz 1 pont.*
Összesen:	**4 pont**	

12.		
A jeles osztályzatok száma: 30.	1 pont	
A jó osztályzatok száma: 50.	1 pont	
A közepes osztályzatok száma: 40.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II/A

13.		
$x=\frac{600}{y}$.	1 pont	
$xy+5x-10y=650$.	2 pont	
$600+\frac{3000}{y}-10y=650$. $3000-10y^2=50y$.	1 pont	*A jó behelyettesítés elvégzéséért jár az 1 pont.*
$y^2+5y-300=0$.	2 pont	*Az egyszerűsítés elmaradása esetén is jár a 2 pont.*
$y_1=15$; $y_2=-20$.	2 pont	
$x_1=40$; $x_2=-30$.	2 pont	
A megoldások ellenőrzése.	2 pont	
Összesen:	**12 pont**	

14. a)		
Ha az $f_0=\lvert x\rvert$ grafikonját előbb a $(-2;0)$,	1 pont	*A 2 pont akkor is jár, ha egyetlen eltolással adja meg helyesen a transzformációt.*
majd a $(0;-1)$ vektorral eltoljuk, az *f* függvény grafikonját kapjuk.	1 pont	
[A grafikon két egymáshoz csatlakozó szakaszból áll. A csatlakozási pont: $(-2;-1)$, a szakaszok másik végpontja: $(-6;3)$ és $(6;7)$.] Helyes grafikon.	3 pont	*1. Ez a 3 pont akkor is jár, ha a helyes grafikon mellett nincs leírás.* *2. Ha a megadottnál tágabb intervallumon helyesen ábrázol, 1 pontot veszítsen.*
Összesen:	**5 pont**	

14. b)		
		
Az AB egyenes egyenlete: $x-3y=-7$.	3 pont	*Helyes irányvektor $\overrightarrow{AB}(9\ ;\ 3)$, (normálvektor, vagy meredekség) 1 pont, a jó egyenlet további 2 pont.*
Az egyik közös pont: $A(-4;1)$.	2 pont	*Ábráról leolvasott jó válaszért 1-1 pont jár. Ha behelyettesítéssel ellenőrzött is, a válasz teljes értékű.*
A másik közös pont: $C(2;3)$.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. a)		
Csilla számláján a 8%-os évi kamat a nyitótőke évi 1,08-szoros növekedését jelenti.	1 pont	
A 18. születésnapon 18. alkalommal növekszik így a tőke,	1 pont	
ezért Csilla 18. születésnapjára a nyitótőke $S_{Csilla}=500\ 000\cdot 1{,}08^{18}=1998009{,}75$ -ra változna.	2 pont	*Ha az $1{,}08^{18}$ kerekített értékével számol, azt is fogadjuk el.*
Csilla a 18. születésnapján 1 998 010 forintot kaphatna.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. b)		
Csongor számláján a p%-os kamat évente $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ -szeres évi növekedést eredményez	1 pont	
18 éven keresztül.	1 pont	
A 18. születésnapon Csongor betétjén összesen $S_{Csongor} = 400\,000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{36} = 2\,000\,000$ Ft van.	2 pont	
Innen $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{36} = 5$, vagyis $\left(1+\frac{p}{100}\right) = \sqrt[36]{5} \approx 1{,}04572$.	2 pont	
A keresett kamatláb tehát 4,57%	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1.) Ha a vizsgázó a megoldása során rosszul állapítja meg az eltelt évek számát, ezért a hibájáért csak egyszer vonjunk le 2 pontot, függetlenül attól, hogy hány alkalommal követte el ezt a hibát.
2.) A képlet nélküli megoldást (pl. végigszámolja évenként a betétek értékeit) fogadjuk el. Teljes pontszámot viszont csakis akkor adjunk, ha a kiszámított érték – helyes kerekítéssel – megegyezik a fenti eredményekkel.

II/B

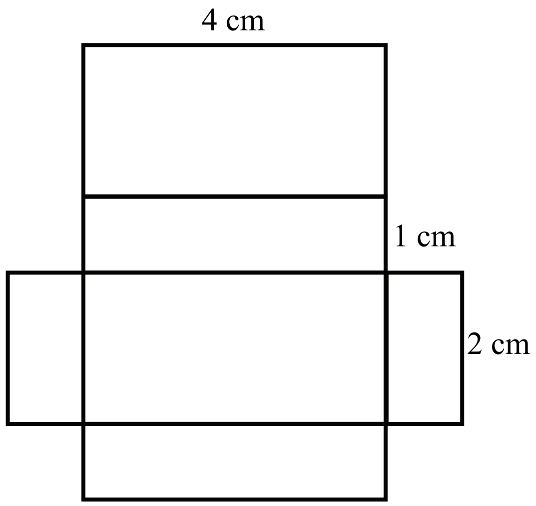
16. a)

Az elem	Az elem méretei (cm)	Az elem felszíne (cm²)
alapelem	$8\times4\times2$	112
A elem	$16\times4\times2$	208
B elem	$8\times8\times2$	192
C elem	$8\times4\times4$	160

Soronként a helyes felszín 1-1 pont	4 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. b)

Az alapelem éleinek hossza 1:2 arányú kicsinyítésben 4 cm, 2 cm és 1 cm.



A hálózat helyes alakja.	3 pont	
A hálózat helyes méretezése.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. c)		
Az alapelem térfogata 64 cm³. Az alapelemen kívül még három különböző méretű elem van a készletben, ezek mindegyikének a térfogata $2 \cdot 64 = 128$ (cm³).	1 pont	
A négy különböző méretű elem térfogatának összege 448 cm³.	1 pont	
A teljes készlet térfogata tízszer ennyi, vagyis 4480 cm³.	1 pont	
Mivel a 16 cm élű doboz térfogata 4096 cm³, a játékkészlet nem fér el a dobozba.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. d) első megoldás		
A teljes készletben 40 elem van. A *B* és a *C* elem négyzetes oszlop. A négyzetes oszlopok száma a készletben 20.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy az első kiválasztott elem négyzetes oszlop legyen $\frac{20}{40}$, hogy a második is az legyen: $\frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39}$,	1 pont	
és így tovább. (Minden helyes kiválasztásnál eggyel csökken a négyzetes oszlopok és a készlet elemszáma is.) Hogy az ötödik is négyzetes oszlop legyen: $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36} (\approx 0{,}02356)$.	2 pont	
Annak a valószínűsége, hogy mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop legyen: ≈ 0,024.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. d) második megoldás

A teljes készletben 40 elem van. A *B* és a *C* elem négyzetes oszlop. A négyzetes oszlopok száma a készletben 20.	1 pont	
A 40 elem közül választunk egyenlő valószínűséggel ötelemű halmazokat úgy, hogy minden elemet a 20 elemű részhalmazból választjuk.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{20}{5}}{\binom{40}{5}}$.	1 pont	
Ennek értéke: $\dfrac{\binom{20}{5}}{\binom{40}{5}} = \dfrac{\frac{20!}{5!\cdot 15!}}{\frac{40!}{5!\cdot 35!}} = \dfrac{20!\cdot 35!}{15!\cdot 40!} = \dfrac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop legyen: ≈ 0,024.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. a)

Az egyenlet bal oldalán szereplő szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.	1 pont	*Ha a megoldásban megjelenik ez a gondolat, jár az 1 pont.*
Ha az első tényező 0, akkor $\log_2 x = 3$.	1 pont	
Innen $x_1 = 2^3 = 8$.	1 pont	
Ha a második tényező 0, akkor $\log_2 x^2 = -6$.	1 pont	
Innen $x^2 = 2^{-6} = \dfrac{1}{64}$,	1 pont	
ahonnan a pozitív tartományba csak az $x_2 = \dfrac{1}{8}$ esik.	1 pont	*Ha nem történik utalás arra, hogy csak a pozitív x értékek jöhetnek szóba, 2 pont helyett csak 1 pont adható.*
Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. b)		
$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ vagy $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.	2 pont	
$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ vagy $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$.	2 pont	
$x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$ vagy $x-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2n\pi$.	2 pont	
$x_1=\frac{\pi}{3}+2n\pi$; $x_2=2n\pi$; $x_3=\pi+2n\pi$; $x_4=\frac{4\pi}{3}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.	4 pont	
Összesen:	**10 pont**	

18. a)		
A 25 parkolóhely közül 4 „szerencsés” van: a 7-es; a 17-es; a 14-es és a 21-es.	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{4}{25}\ (=0{,}16)$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b)		
9 betöltendő hely marad.	1 pont	
A 2 piros autó $\binom{9}{2}$ -féleképpen állhat be, ezzel a zöld autók helye is eldőlt.	3 pont	
A lehetséges elhelyezkedések értéke 36.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. c)		
Nézzük a zöld színt választókat! 4-en zöld kocsit rendeltek, és ezen kívül 10-en zöldet vagy pirosat. Mivel 6 db piros kocsi van, a zöldet vagy pirosat választó 10 vevő közül legalább 4-nek zöld kocsit kellene adni.	4 pont	*Ez a 4-4 pont adható rövidebb, tömörebb indoklásért is. pl.: A zöld vagy piros színű kocsikra 4+10=14 konkrét előjegyzést adtak le, de csak 7+6=13 zöld vagy piros kocsi érkezett aznap.*
Zöld kocsiból viszont csak 7 db érkezik aznap, így a zöld kocsit választó vevők igényeit nem lehet kielégíteni, akárhogy is osztjuk a többi autót.	4 pont	
Összesen:	**8 pont**	