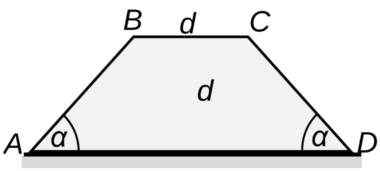
A 37. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Gimnázium 10. osztály
Pécs 2018

1. feladat:

a) Az első esetben emelési és súrlódási munkát kell végeznünk:



$$W_1 = mgd + \mu mg \cdot \cos\alpha \cdot \frac{d}{\sin\alpha} + \mu mgd,$$

$$W_1 = mgd\big(1 + \mu \cdot (\mathrm{ctg}\alpha + 1)\big),$$

$$\boxed{W_1 = 0{,}6\ \mathrm{J}.}$$

6 pont

b) Vizsgáljuk először a ferde hajítást! Ennek kezdősebességét jelölje v_1! A hajítás távolságára vonatkozó ismert összefüggés alapján ez a kezdősebesség kiszámítható:

$$d = \frac{v_1^2 \cdot \sin 2\alpha}{g},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\alpha}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

4 pont

Az *A* pontból történő indítás kezdősebessége a munkatétel alapján határozható meg:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\left(mgd + \mu mg \cdot \cos\alpha \cdot \frac{d}{\sin\alpha}\right),$$

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gd(1 + \mu \cdot \mathrm{ctg}\alpha)}\ ,$$

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gd(1 + \mu)}\ ,$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{14}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3{,}74\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$

4 pont

c) A feltétel szerint teljesülnie kell, hogy

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < W_1$$

A korábbi összefüggések behelyettesítése után a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgd + \mu mgd \cdot \text{ctg}\alpha < mgd + \mu mgd \cdot \text{ctg}\alpha + \mu mgd,$$

$$\frac{1}{2}m\frac{gd}{\sin 2\alpha} + mgd + \mu mgd \cdot \text{ctg}\alpha < mgd + \mu mgd \cdot \text{ctg}\alpha + \mu mgd$$

Ebből:

$$\frac{1}{2}m\frac{gd}{\sin 2\alpha} < +\mu mgd,$$

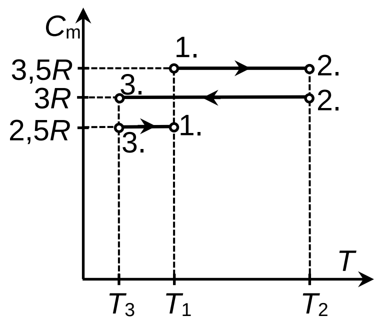
$$\boxed{\mu > \frac{1}{2\cdot\sin 2\alpha} = 0{,}5.}$$

6 pont

Összesen: 20 pont

2. feladat:

a) Alkalmazzuk a



$$C_\text{m} = C_{\text{m},V} + \frac{aV+b}{2aV+b}\cdot R$$

összefüggést a 2. → 3. folyamatra!

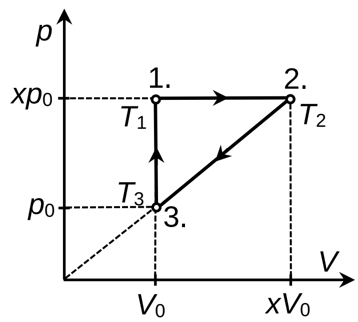
$$3R = \frac{5}{2}R + \frac{aV+b}{2aV+b}\cdot R,$$

$$\frac{1}{2} = \frac{aV+b}{2aV+b},$$

$$\boxed{b = 0.}$$

4 pont

b) Az 1. → 2. folyamat során a mólhő állandó, értéke 3,5 *R*, így ez egy izobár tágulási folyamat. A 2. → 3 folyamat esetén *b* értéke zérus. Ezt a folyamatot tehát egy olyan egyenes szakasszal ábrázolhatjuk, melynek meghosszabbítása átmegy az origón, azaz a nyomás egyenesen arányos a pillanatnyi térfogattal, miközben a gáz hőmérséklete csökken. A 3. → 1. folyamatban a gáz mólhője 2,5*R*, ami azt jelenti, hogy ez egy állandó térfogaton lejátszódó melegítési folyamat. Ezek alapján a *p* – *V* diagram könnyen elkészíthető.



3 pont

c) Az ismeretlen hőmérsékletek meghatározása érdekében az ismert hatásfok felhasználásával határozzuk meg először *x* értékét! A hatásfok:

$$\eta = \frac{W_h^*}{Q_\text{felvett}}.$$

A körfolyamat egy ciklusa alatt nyert hasznos munka:

$$W_h^* = \frac{1}{2}(x-1)^2 p_0 V_0.$$ **2 pont**

A 3. → 1. → 2. folyamatokban felvett hőt a termodinamika első főtétele alapján számolhatjuk.

$$Q_{\text{felvett}} = E_2 - E_3 + W_{312}^*,$$

$$Q_{\text{felvett}} = \frac{5}{2}(x^2 p_0 V_0 - p_0 V_0) + x p_0 (x V_0 - V_0),$$

$$Q_{\text{felvett}} = \left[\frac{5}{2}(x^2-1) + x(x-1)\right] p_0 V_0.$$ **2 pont**

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}(x-1)^2 p_0 V_0}{\left[\frac{5}{2}(x^2-1) + x(x-1)\right] p_0 V_0},$$

$$\frac{1}{15} = \frac{x-1}{5(x+1)+2x},$$

$$x = 2{,}5.$$ **2 pont**

Gay-Lussac II. törvényéből:

$$\frac{p_0}{T_3} = \frac{x p_0}{T_1},$$

$$\boxed{T_3 = \frac{T_1}{x} = 200\ \text{K}.}$$ **2 pont**

Gay-Lussac I. törvényéből:

$$\frac{V_0}{T_1} = \frac{x V_0}{T_2},$$

$$\boxed{T_2 = x T_1 = 1250\ \text{K}.}$$ **2 pont**

d) A leadott hő és a végzett munka arányát a körfolyamat hatásfoka minden esetben meghatározza, hiszen $Q_{\text{felvett}} = Q_{\text{leadott}} + W_h^*$. Ezt felhasználva:

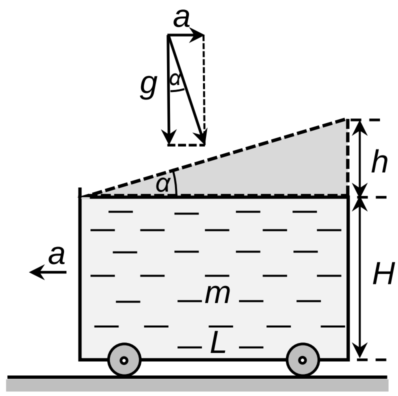
$$\eta = \frac{W_h^*}{Q_{\text{leadott}} + W_h^*},$$

$$\boxed{\frac{Q_{\text{leadott}}}{W_h^*} = \frac{1-\eta}{\eta} = 14.}$$ **3 pont**

Összesen: 20 pont

3. feladat:

a) Képzeljük el, hogy a tartálykocsi fedelét eltávolítjuk, falait függőlegesen megmagasítjuk, és annyi vizet töltünk még bele, hogy a gyorsuló tartály bal szélén a vízszint (állandósult állapotban) éppen H magasságban legyen! A tartályban a szabad folyadékfelszín az ábrán látható effektív nehézségi gyorsulás irányára merőlegesen áll. A háromszögek hasonlóságából a jobb és bal oldali folyadékszintek h magasságkülönbsége meghatározható.



$$h = \frac{a}{g} L.$$ **2 pont**

Az elképzelt (megmagasított) tartályban lévő alsó, H magasságú vízréteg ugyanúgy mozog, mint az eredeti (fedlappal ellátott) tartálykocsiban lévő víz, ezért az m tömegű vízre ható erők is ugyanakkorák. A tartálykocsi fedlapja tehát akkora erővel nyomja lefelé az m tömegű vízdarabot, mint amekkora az ábrán látható derékszögű háromszög alapú ,,vízhasáb" súlya:

$$F_{\text{fedlap}} = \rho \frac{hLd}{2} g,$$ **5 pont**

ahol d a tartálykocsi harmadik (az ábra síkjára merőleges) élének hossza, ρ pedig a víz sűrűsége. Felhasználva, hogy a tartályban lévő víz tömege m,

$$\rho = \frac{m}{HLd}.$$

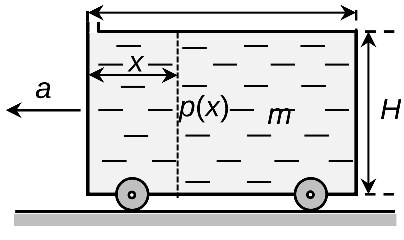
A fenti három egyenletből megkaphatjuk a fedlap által a vízre kifejtett erő nagyságát (ami Newton III. törvénye értelmében ugyanakkora, amekkora erőt a víz fejt ki a fedlapra).

$$F_{\text{fedlap}} = \frac{m}{HLd} \cdot \frac{Ld}{2} \cdot \frac{a}{g} L \cdot g,$$ **3 pont**

$$\boxed{F_{\text{fedlap}} = \frac{ma}{2}\frac{L}{H} = \frac{mg}{8}\frac{L}{H}.}$$ **2 pont**

a) *Második megoldás*:

Határozzuk meg a gyorsítás során a tartály első lapjától x távolságban lévő, függőlegese síkban kialakuló „túlnyomást”! A dinamika alapegyenletéből:



$$m(x) \cdot a = p(x)A,$$

$$Ax\rho \cdot a = p(x)A,$$

$$p(x) = \rho a x.$$

A nyomás tehát lineárisan növekszik, a hátsó lapnál kialakuló nyomás:

$$p(L) = \rho a L.$$

A fedőlapra ható erőt a nyomás átlagértékének felhasználásával határozhatjuk meg.

$$F_{\text{fedlap}} = \frac{1}{2} p(L) \cdot Ld,$$

$$F_{\text{fedlap}} = \frac{1}{2} \rho a L^2 d,$$

$$F_{\text{fedlap}} = \frac{1}{2} \frac{m}{HLd} \frac{g}{4} \cdot L^2 d,$$

$$\boxed{F_{\text{fedlap}} = \frac{mg}{8} \frac{L}{H}.}$$

b) A vízre a gyorsulás irányában két erő hat: a gyorsulásra merőlegesen álló első laptól származó F_1 erő, illetve a hátsó laptól származó $F_2 = 5mg/12$ erő, ezért:

$$ma = F_2 - F_1\ .$$ **2 pont**

Az F_1 erőt az első lapra ható hidrosztatikai nyomás átlagértékével számolhatjuk:

$$F_1 = \rho g \frac{H}{2} \cdot Hd = mg \frac{H}{2L},$$ **3 pont**

ahol felhasználtuk a sűrűségre az *a*) részben kapott kifejezést. Ezt és az F_2 erő értékét a mozgásegyenletbe helyettesítve végül az

$$m \cdot \frac{g}{4} = \frac{5}{12} mg - \frac{H}{2L} mg$$

egyenletre jutunk, amiből a keresett arány:

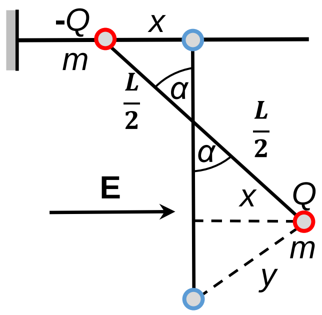
$$\boxed{\frac{H}{L} = \frac{1}{3}\ .}$$

3 pont

Összesen: 20 pont

4. feladat:

a) A gyöngyből, golyóból és fonálból álló rendszerre csak függőleges irányú külső erők hatnak, ezért a tömegközéppont függőlegesen mozog felfelé. Legyen a gyöngy elmozdulása *x*, a golyóé pedig *y*!

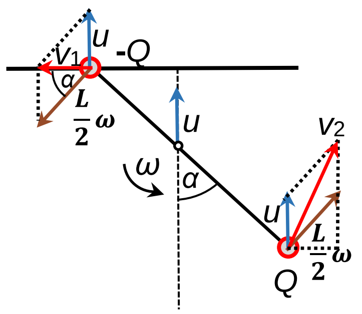


$$\boxed{x = \frac{L}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}L \approx 0{,}071\ \text{m.}}$$ **1 pont**

$$y^2 = [L(1-\cos\alpha)]^2 + \left(\frac{L}{2}\sin\alpha\right)^2,$$

$$\boxed{y = L\cdot\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\cos^2\alpha - 2\cos\alpha} = L\cdot\sqrt{\frac{13}{8}-\sqrt{2}} \approx 0{,}092\ \text{m.}}$$ **2 pont**

Legyen az ábrán látható helyzetben a tömegközéppont sebessége *u*, a tömegközéppont körüli forgás szögsebessége *ω*, a gyöngy sebessége v_1, a golyó sebessége v_2! A gyöngy sebessége a rúd irányába mutat, így a kényszerfeltételből:



$$u = v_1\tan\alpha\,,\qquad u = \frac{L}{2}\omega\sin\alpha.$$

Határozzuk meg a golyó sebességének vízszintes és függőleges komponenseit! A lendület-megmaradásból:

$$v_{2\mathrm{x}} = v_1.$$

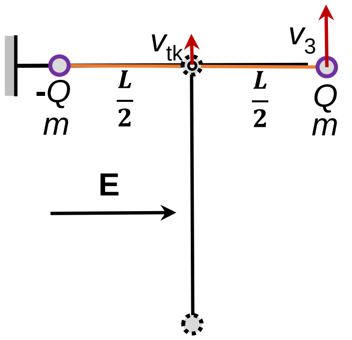
$$v_{2\mathrm{y}} = u + \frac{L}{2}\omega\sin\alpha = 2u,$$

$$v_{2\mathrm{y}} = 2v_1\tan\alpha,$$

$$v_2 = v_1\sqrt{1+4\tan^2\alpha},$$

$$\boxed{\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1+4\tan^2\alpha} = \sqrt{5}.}$$ **5 pont**

b) A tömegközéppont vízszintes irányú sebessége a mozgás során zérus, a fonál vízszintes irányú és nyújthatatlan, valamint a gyöngy pályája végig vízszintes irányú, így most a gyöngy és a golyó vízszintes irányú sebessége is éppen zérus. Legyen a golyó függőleges irányú sebessége ebben a pillanatban v_3! A rendszerre felírt munkatételből:



$$\sum W = \Delta E_{\text{kin.}},$$

$$EQ \cdot \frac{L}{2} + EQ \cdot \frac{L}{2} - mgL = \frac{1}{2} m v_3^2,$$

$$\boxed{v_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot (EQ - mg)L}{m}} = \sqrt{0{,}8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}89\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.}$$

3 pont

Határozzuk meg először a golyó a_2 gyorsulásának függőleges és vízszintes irányú komponenseit! Függőleges irányban az *mg* nehézségi erő hat, így:

$$a_{2y} = g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A tömegközéppont függőleges irányú sebessége $v_{\text{tk}} = \frac{v_3}{2}$ ezért a golyó a tömegközéppontból nézve $\frac{L}{2}$ sugarú körpályán $\frac{v_3}{2}$ sebességgel emelkedik felfelé. Ezeket felhasználva:

$$a_{2x} = \frac{\left(\frac{v_3}{2}\right)^2}{\frac{L}{2}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A golyó gyorsulása:

$$\boxed{a_2 = \sqrt{104}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.}$$

3 pont

A gyöngy a tömegközéppontból nézve $\frac{L}{2}$ sugarú körpályán $\frac{v_3}{2}$ sebességgel süllyed. Így a rúd irányú gyorsulása:

$$\boxed{a_1 = \frac{\left(\frac{v_3}{2}\right)^2}{\frac{L}{2}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.}$$

2 pont

c) A tömegközéppont vízszintes irányban nem gyorsul, és golyó a tömegközépponthoz viszonyítva körpályán mozog. A dinamika alapegyenletét sugár irányba felírva:

$$ma_{2x} = K + k\frac{Q^2}{L^2} - EQ,$$

$$K = ma_{2x} + EQ - k\frac{Q^2}{L^2},$$

$$\boxed{K = 0{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N} + 3 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N} - 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N} = 10^{-2}\ \mathrm{N}.}$$

4 pont

Összesen: 20 pont