III. Vektorok

Vektorok összege, különbsége és vektor szorzása számmal

III

2282. *a)* egyenlő vektorok: $\mathbf{f}=\mathbf{c}$; *b)* ellentett vektorok: $\mathbf{a}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$, $\mathbf{b}+\mathbf{e}=\mathbf{0}$, $\mathbf{g}+\mathbf{h}=\mathbf{0}$.

2283. Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}$; $\overrightarrow{DA}=\mathbf{d}$; $\overrightarrow{AC}=\mathbf{e}$; $\overrightarrow{BD}=\mathbf{f}$. $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, $\mathbf{b}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$,
$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$, $\mathbf{a}+\mathbf{f}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$, $\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}=\mathbf{0}$.

2284. *a)* $\mathbf{g}=\mathbf{f}+\mathbf{a}$; *b)* $\mathbf{h}=-\mathbf{f}-\mathbf{a}$; *c)* $\mathbf{k}=-2\mathbf{g}+\mathbf{i}$.

2285. *a)* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; *b)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$; *c)* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=$ $=2\overrightarrow{BC}$; *d)* $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=$ $=2\overrightarrow{AB}$; *e)* $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}$.

2286. *a)* $\mathbf{c}-\mathbf{a}=\overrightarrow{AC}=\mathbf{d}$; *b)* $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}=\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EA}=\mathbf{a}-\mathbf{e}$;
c) $\mathbf{a}+\mathbf{d}-\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{c}-\mathbf{c}-\mathbf{b}=-\mathbf{b}=\overrightarrow{KG}$;
d) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{d}-\mathbf{e}=\mathbf{a}-\mathbf{d}+\mathbf{b}-\mathbf{e}=-2\mathbf{e}+\mathbf{b}-\mathbf{e}=-2\mathbf{e}+2\mathbf{a}=$ $=\overrightarrow{KH}$.

2287. Legyen az AB szakasz felezőpontja H, az S súlypont H pontra vonatkozó tükörképe S' pont. Felhasználjuk, hogy S harmadolja HC-t $\Rightarrow$ $\overrightarrow{HS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$ és $\overrightarrow{S'S}=\overrightarrow{SC}$.
a) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SS'}+\overrightarrow{SC}=\mathbf{0}$; *b)* $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{BA}$;
c) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{CB}$; *d)* $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SS'}-\overrightarrow{SC}=-2\overrightarrow{SC}$.

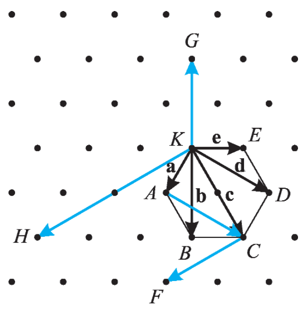
2288. *a)* $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OO'}$, ahol O' pont az O pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe. *b)* $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$.

2289. Az ábrán vázolt **a** és **b** egy lehetséges megoldás, mert $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$.

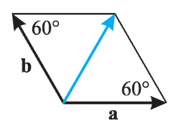
2290. Az ábrán vázolt **a** és **b** egy lehetséges megoldás, mert $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

2291. *a)* $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{v}$; *b)* $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=-\mathbf{v}$.

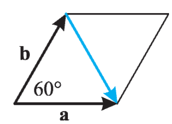
2286.



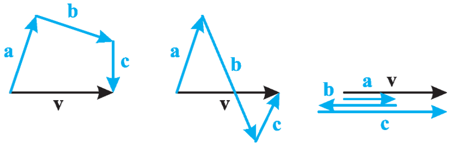
2289.



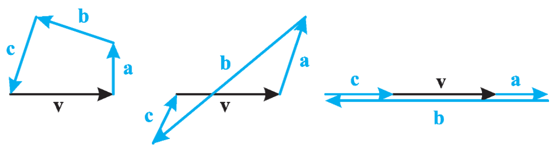
2290.



2291/I.

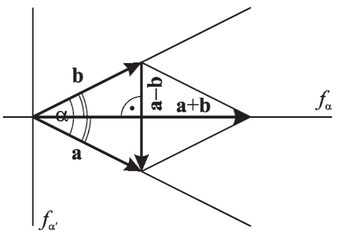


2291/II.



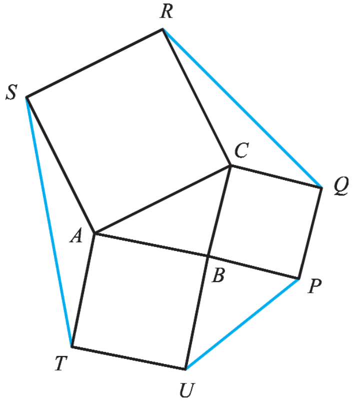
III

2296.



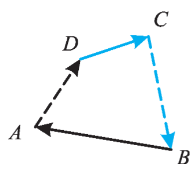
2292. **1. eset:** $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor nem párhuzamos. A paralelogrammamódszer szerint $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektor egy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ oldalú rombusz átlói. $\Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \perp \mathbf{a} - \mathbf{b}$.
2. eset: $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ és $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$. Ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{a}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \perp \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Ha $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -2\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \perp \mathbf{a} - \mathbf{b}$.
2293. **1. eset:** $\mathbf{a} + \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a} + \mathbf{b} \perp \mathbf{a} - \mathbf{b} \Rightarrow$ A paralelogrammamódszer szerint $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektor egy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ oldalú rombusz átlói.
2. eset: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = -\mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.
3. eset: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.
2294. **1. eset:** $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. A paralelogrammamódszer szerint $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ egy téglalap átlói. $\Rightarrow |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.
2. eset: $\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -\mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.
3. eset: $\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} \Rightarrow |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.
2295. **1. eset:** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak és $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$. Ekkor a paralelogrammamódszer szerint $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ egy téglalap átlói. $\Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
2. eset: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \parallel (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ és $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \Rightarrow$ vagy $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a} + \mathbf{b} = -(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
2296. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamosak $\Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektorok az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített rombusz átlóvektorai, amelyek felezik a rombusz szögeit $\Rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \parallel f_\alpha$, illetve $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \parallel f_{\alpha'}$. A megoldás $k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ vektor, ahol k nullától különböző valós szám. Végtelen sok megoldás van.
2297. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, azaz $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.
2298. $\mathbf{a} = -\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$. A nullvektor egyenlő az ellentettjével.
2299. *a)* Bármely négy pontra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$;
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$;
c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$.
2300. $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$
2301. *a)* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + 2\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + 2(\mathbf{p} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{p} - \mathbf{b}$.
b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{p} - \mathbf{b}$.

2303.

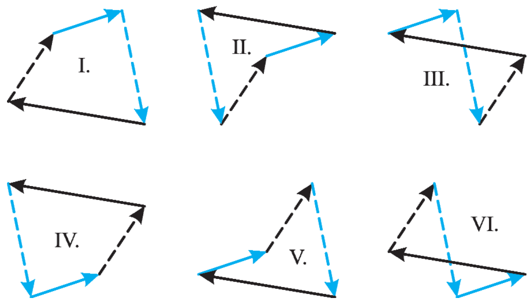


2302. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{x} = \mathbf{c} + 2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{c} + \mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$. Geometriai jelentése: a háromszög középvonala párhuzamos a nem felezett oldallal, és fele olyan hosszú.
2303. Az ábra jelölései szerint U és P, Q és R, S és T „szomszédos csúcsok". $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CQ}$; $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AS}$; $\overrightarrow{BU} = \overrightarrow{AT}$ egyenlőségeket felhasználva: $\overrightarrow{UP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BU} = \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{AT}$ és $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{CR} - \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{CQ}$ és $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AS} \Rightarrow \overrightarrow{UP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{ST} = \mathbf{0} \Rightarrow$ A QR, ST, UP szakaszokkal párhuzamosan szerkeszthető QR, ST, UP oldalú háromszög.
2304. A vektorösszeadás kommutatív. $\Rightarrow$ A négy vektor összege minden esetben nullvektor. $\Rightarrow$ A négy vektor négyszöget alkot.

2304/I.



2304/II.



1. eset: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$. (I.)

2. eset: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{0}$. (II.)

3. eset: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{0}$. (III.)

4. eset: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \mathbf{0}$. (IV.)

5. eset: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \mathbf{0}$. (V.)

6. eset: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$. (VI.)

2305. $\mathbf{a} - \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$. $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ egy derékszögű háromszög befogói; $\mathbf{a}$ az átfogó, és $|\mathbf{a}| = 2 \cdot |\mathbf{b}|$, ezért $\sphericalangle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = 60°$.

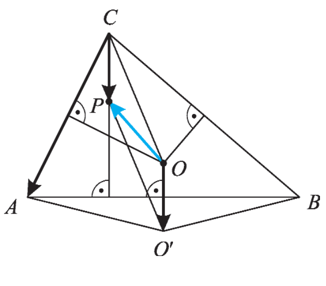
2306. A feltételnek eleget tevő vektorok egy szabályos háromszög oldalvektorai, ezért a szomszédosak egymással 120°-ot zárnak be.

2307. $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ és O' az O pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP}$. Mivel $\overrightarrow{OO'} \perp AB$, ezért $\overrightarrow{CP} \perp AB \Rightarrow P$ pont rajta van az ABC háromszög m_c magasságvonalán. Hasonlóan belátható, hogy P az m_a és az m_b magasságvonalnak is pontja. $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$, ahol M a háromszög magasságpontja.

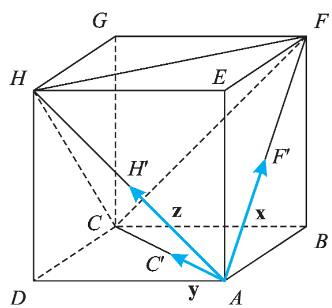
2308. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. *a)* $\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \mathbf{c} = \overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AH} = \mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BE} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{DE} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = \overrightarrow{CF}$;
b) $\overrightarrow{AG} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\overrightarrow{EC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DF} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BH} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

2309. $\overrightarrow{AH} = 2\mathbf{z}$; $\overrightarrow{AC} = 2\mathbf{y}$; $\overrightarrow{AF} = 2\mathbf{x}$; $\overrightarrow{FH} = 2\mathbf{z} - 2\mathbf{x}$; $\overrightarrow{CH} = 2\mathbf{z} - 2\mathbf{y}$; $\overrightarrow{FC} = 2\mathbf{y} - 2\mathbf{x}$.
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'B} = \mathbf{y} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HF} = \mathbf{y} - \mathbf{z} + \mathbf{x}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'D} = \mathbf{y} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FH} = \mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{x}$,
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH'} + \overrightarrow{H'E} = \mathbf{z} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CF} = \mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

2307.



2309.



III

b) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=2\mathbf{y}+\mathbf{z}-\mathbf{y}+\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$, $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=-2\mathbf{y}+\mathbf{z}-\mathbf{y}+\mathbf{x}=$ $=\mathbf{x}-3\mathbf{y}+\mathbf{z}$, $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HF}=\mathbf{z}-\mathbf{y}+\mathbf{x}+2\mathbf{x}-2\mathbf{z}=3\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}$, $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FH}=$ $=\mathbf{z}-\mathbf{y}+\mathbf{x}+2\mathbf{z}-2\mathbf{x}=-\mathbf{x}-\mathbf{y}+3\mathbf{z}$.

2310. A 2309. ábra jelöléseit használjuk. Az **x**, **y**, **z** vektorok által kifeszített tetraéder a kockába írt *AFHC* szabályos tetraédernek az *A* középpontú $\lambda=\frac{1}{2}$ arányú hasonlósággal kapott képe. ⇒ élei 60°-os szöget zárnak be ⇒ $\sphericalangle(\mathbf{x};\mathbf{y})=\sphericalangle(\mathbf{y};\mathbf{z})=\sphericalangle(\mathbf{x};\mathbf{z})=60°$.

2311. Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AD}=\mathbf{c}$. $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$; $\overrightarrow{BD}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$; $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$.

2312. $\overrightarrow{CD}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{FD}=\mathbf{c}$; $\overrightarrow{AE}=\mathbf{c}-\mathbf{a}=\overrightarrow{FC}$; $\overrightarrow{CE}=\mathbf{c}-\mathbf{b}=\overrightarrow{FA}$; $\overrightarrow{DE}=-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}=\overrightarrow{FB}$.

2313. Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE}=\mathbf{c}$. *a)* $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\overrightarrow{AG}$, kockacsúcsba mutat.
b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}=\overrightarrow{EC}$, nem mutat kockacsúcsba. *c)* $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\overrightarrow{AF}$, kockacsúcsba mutat.
d) $\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{0}=\overrightarrow{AA}$, kockacsúcsba mutat. *e)* $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\overrightarrow{DB}$, nem mutat kockacsúcsba.
f) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}=\overrightarrow{AH}$, kockacsúcsba mutat.

2314. Például egy kocka egy csúcsból induló három élvektora esetén két élvektor összege egy lapátló vektor, amely merőleges a vele közös csúcsból induló harmadik élvektorra.

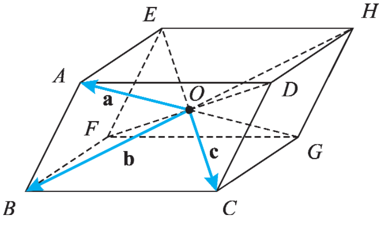
2315. $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{OG}=-\mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}\Rightarrow\overrightarrow{OH}=-\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$; $\overrightarrow{OE}=-\mathbf{c}$; $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=$ $=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{c}+\mathbf{a}-\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OF}=\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{c}$.

2316. $AB=BC$, OB oldal közös és $AOB\sphericalangle=COB\sphericalangle=90°\Rightarrow AOB\triangle\cong BOC\triangle\Rightarrow OA=$ $=OC\Rightarrow AOC\triangle$ egyenlő szárú derékszögű háromszög. Hasonlóan igazolható, hogy $AOB\triangle$ és $BOC\triangle$ is egyenlő szárú derékszögű háromszög. Az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ egyenlő hosszúságú, páronként merőleges vektorok olyan kockát határoznak meg, amelynek az adott tetraéder élei a lapátlói, az *O* ponttal átellenes csúcsa pedig $D\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

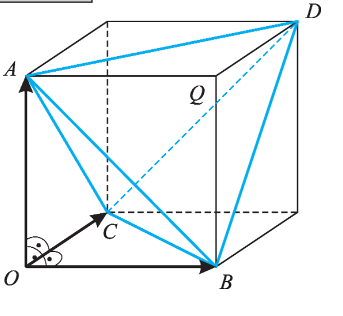
2317. $2\mathbf{a}$; $1{,}5\mathbf{a}$; $3\mathbf{a}$; $\frac{\mathbf{a}}{2}$ egyirányú az **a** vektorral. $(-2\mathbf{a})$; $(-2{,}5\mathbf{a})$ ellentétes irányú az **a** vektorral. A szerkesztendő vektorok hossza 2-szerese, 1,5-szerese, 3-szorosa, 2,5-szerese, illetve fele az **a** vektor hosszának.

2318. $2\mathbf{b}$; $0{,}5\mathbf{b}$; $\frac{\mathbf{b}}{3}$; $\frac{4}{5}\mathbf{b}$; $\frac{\mathbf{b}}{4}$ egyirányú a **b** vektorral. $\left(-\frac{4}{3}\mathbf{b}\right)$; $(-\mathbf{b})$ ellentétes irányú a

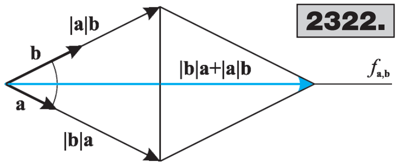
2315.



2316.



2322.



b vektorral. A szerkesztendő vektorok hossza $\frac{4}{3}$-szorosa, 2-szerese, fele, harmada, $\frac{4}{5}$-e, 1-szerese, illetve negyede a **b** vektor hosszának.

2319. 2320. A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

2321. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ és $\lambda\left(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}\right) = \lambda \cdot \overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \lambda \cdot \overrightarrow{DA} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}}$.

2322. Legyen az **a** vektor hossza a és a **b** vektor hossza b. A $|\mathbf{b}| \cdot \mathbf{a}$ vektor hossza $b \cdot a$, iránya egyezik **a** vektor irányával. Az $|\mathbf{a}| \cdot \mathbf{b}$ vektor hossza $a \cdot b$, iránya egyezik **b** vektor irányával. Az **a** és a **b** vektor nem párhuzamosak. $\Rightarrow |\mathbf{b}| \cdot \mathbf{a}$ vektor sem párhuzamos $|\mathbf{a}| \cdot \mathbf{b}$ vektorral. A két nem párhuzamos, egyenlő hosszúságú vektor összegét egy $a \cdot b$ oldalú rombusz átlója határozza meg. Ez az átló párhuzamos az **a** és **b** vektorok szögének szögfelezőjével.

Vektorműveletek alkalmazásával bizonyítható állítások

2323. $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, azaz $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{2} = \underline{\underline{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}}}$.

2324. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3}$, azaz $\mathbf{h} = \underline{\underline{\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}}}$;

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}$, azaz $\mathbf{g} = \underline{\underline{\frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}}}$.

2325. $AP : PB = \lambda : \mu$; $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) =$

$= \frac{\mu \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{\lambda+\mu}$, azaz $\mathbf{p} = \underline{\underline{\frac{\mu \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}}{\lambda+\mu}}}$.

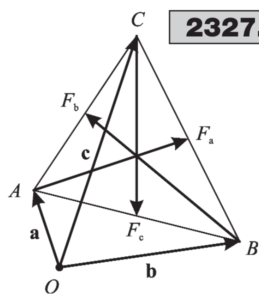
2326. $\overrightarrow{OP} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OQ} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right) \Rightarrow \mathbf{f} = \underline{\underline{\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}}}$.

2327. $\mathbf{f}_c = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\mathbf{f}_a = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$; $\mathbf{f}_b = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$. $\overrightarrow{CF_c} = \mathbf{f}_c - \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}}{2}$; $\overrightarrow{AF_a} = \mathbf{f}_a - \mathbf{a} =$

$= \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-2\mathbf{a}}{2}$; $\overrightarrow{BF_b} = \mathbf{f}_b - \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}-2\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{CF_c} + \overrightarrow{AF_a} + \overrightarrow{BF_b} = \mathbf{0}$.

Tehát a CF_c, az AF_a és a BF_b súlyvonalakból a kívánt módon háromszög szerkeszthető.

2327.



2328. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$; AB felezőpontja $F \Rightarrow \overrightarrow{OF} =$ $= \mathbf{f} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; BC felezőpontja $G \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \mathbf{g} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$;

CA felezőpontja $H \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \mathbf{h} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}$; $\mathbf{f} + \mathbf{g} + \mathbf{h} = \underline{\underline{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}}$.

2329. Legyen $\overrightarrow{OA_i}=\mathbf{a}_i$ és a felezéspont F_i, amelyre $\overrightarrow{OF_i}=\mathbf{f}_i$ $(1\le i\le n)$. $\mathbf{f}_i=\dfrac{\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_{i+1}}{2}$ $(1\le i\le n-1)$ és $\mathbf{f}_n=\dfrac{\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_1}{2}\Rightarrow \mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2+\ldots+\mathbf{f}_n=\dfrac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2}{2}+\dfrac{\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3}{2}+\ldots+\dfrac{\mathbf{a}_{n-1}+\mathbf{a}_n}{2}+$ $+\dfrac{\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_1}{2}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n$.

2330. Legyen $\overrightarrow{OA_i}=\mathbf{a}_i$ és a harmadolópont H_i, amelyre $OH_i=\mathbf{h}_i$ $(1\le i\le n)$. $\mathbf{h}_i=\dfrac{2\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_{i+1}}{3}$ $(1\le i\le n-1)$ és $\mathbf{h}_n=\dfrac{2\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_1}{3}\Rightarrow \mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2+\ldots+\mathbf{h}_n=\dfrac{2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2}{3}+\dfrac{2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3}{3}+\ldots+\dfrac{2\mathbf{a}_{n-1}+\mathbf{a}_n}{3}+$ $+\dfrac{2\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_1}{3}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n$.

2331. Felhasználjuk: a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. $\overrightarrow{OF}=\mathbf{f}=$ $=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ és $\overrightarrow{OS}=\mathbf{s}=\dfrac{2\mathbf{f}+\mathbf{c}}{3}=\dfrac{2\cdot\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\mathbf{c}}{3}=\underline{\underline{\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}}}$.

2332. Legyen O a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OS}+$ $+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OS}=\mathbf{a}-\mathbf{s}+\mathbf{b}-\mathbf{s}+\mathbf{c}-\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\cdot\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}=\mathbf{0}$.

2333. Legyen O a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BY}+\overrightarrow{CZ}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OB}+$ $+\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OZ}-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3\cdot\overrightarrow{OQ}-3\cdot\overrightarrow{OS}=\underline{\underline{3\overrightarrow{SQ}}}$.

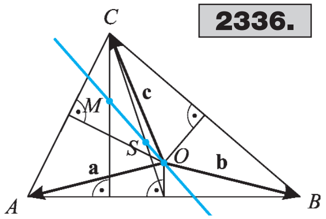
2334. Legyen $H\in AB$ és $HA:HB=1:2$; $G\in BC$ és $BG:GC=1:2$; $F\in CA$ és $CF:FA=$ $=1:2$. Legyenek az A, B, C, F, G, H pontokba mutató helyvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$. $\mathbf{h}=\dfrac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$; $\mathbf{g}=\dfrac{2\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$; $\mathbf{f}=\dfrac{2\mathbf{c}+\mathbf{a}}{3}$. Legyen az $ABC\triangle$ S súlypontjába mutató vektor $\mathbf{s}$, az $FGH\triangle$ T súlypontjába mutató vektor $\mathbf{t}$. $\mathbf{t}=\dfrac{\mathbf{h}+\mathbf{g}+\mathbf{f}}{3}=\dfrac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}+2\mathbf{c}+\mathbf{a}}{9}=\underline{\underline{\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}}}=\mathbf{s}$.

2335. Legyenek a hatszög csúcsai a felezőpontokkal azonos körüljárási irányban X; Y; Z; P; Q; R és legyen XY felezőpontja A. $\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}\right)$; $\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OZ}+\overrightarrow{OP}\right)$; $\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\right)$; $\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OZ}\right)$; $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right)$; $\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OX}\right)$.

Legyen az $ACE\triangle$ súlypontja S, a $BDF\triangle$ súlypontja T. $\overrightarrow{OT}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}\right)=$

$$=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OZ}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OX}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}\right)=\overrightarrow{OS}\Rightarrow \underline{\underline{T\equiv S}}.$$

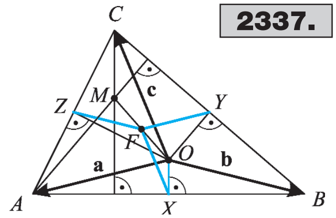


2336.

2336. Legyen O a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$. A 2307. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OM}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$. A 2331. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}\Rightarrow$

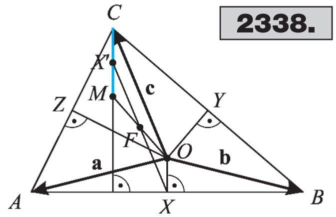
$\Rightarrow \overrightarrow{OS}$ és $\overrightarrow{OM}$ egyállású vektorok $\Rightarrow$ <u>S; M és O egy egyenesen vannak</u> $\overrightarrow{OS} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM} \Rightarrow MS : SO = 2 : 1$.

2337.



2337. Legyen a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. A 2307. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ miatt $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{OX}$, ahol az X az AB szakasz felezőpontja. $\overrightarrow{OX} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{XF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OX} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} = \dfrac{\mathbf{c}}{2}$. Hasonlóan belátható, hogy $\overrightarrow{YF} = \dfrac{\mathbf{a}}{2}$ és $\overrightarrow{ZF} = \dfrac{\mathbf{b}}{2}$. A körülírt kör középpontja O, ezért $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| \Rightarrow |\overrightarrow{XF}| = |\overrightarrow{YF}| = |\overrightarrow{ZF}| = \underline{\underline{\dfrac{R}{2}}}$, ahol R a körülírt kör sugara. Megjegyzés: Ez a kör az $ABC\triangle$ Feuerbach köre.

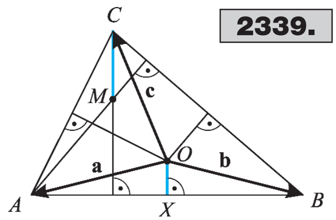
2338.



2338. Legyen a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$; $\overrightarrow{OX} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$. A 2307. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$. Legyen X' az X pont F-re vonatkozó tükörképe. $\overrightarrow{OX'} = 2 \cdot \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OX} = 2 \cdot \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} = \dfrac{\mathbf{a}}{2} + \dfrac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{c}$. Legyen X'' az MC szakasz felezőpontja. $\overrightarrow{OX''} = \dfrac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}}{2} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{c}}{2} = \dfrac{\mathbf{a}}{2} + \dfrac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{c} = \overrightarrow{OX'} \Rightarrow X' \equiv X'' \Rightarrow$ Az X pont F-re vonatkozó tükörképe az MC szakasz felezőpontja.

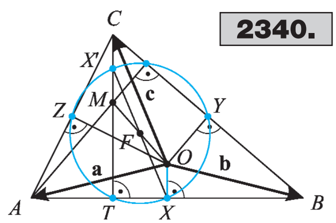
2339. Legyen a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$; $\overrightarrow{OX} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM} = \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = -(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{OX} \Rightarrow M$-et $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ arányú, OM-nek az O-hoz közelebbi harmadolópontjára vonatkozó középpontos hasonlóság viszi át az X oldalfelező pontba.

2339.

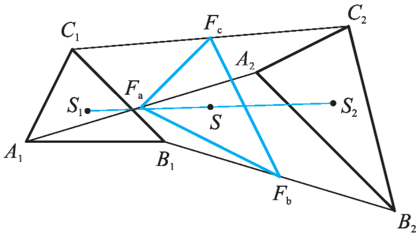


2340. Legyen O a körülírt kör középpontja, M a magasságpont és F az OM szakasz felezéspontja. A 2337. feladatban láttuk, hogy $FX = FY = FZ = R : 2$. A 2338. feladatban láttuk, hogy X, Y és Z pontok F-re vonatkozó tükörképe felezi az MC, az MA és az MB szakaszokat. A fentiekből következik, hogy az X, Y, Z oldalfelezéspontok és az X', Y', Z' szakaszfelezéspontok rajta vannak az F középpontú, $FX = R : 2$ sugarú körön. XX' átmérője ennek a körnek. A magasságok talppontjai vagy egybeesnek az oldalfelező pontokkal, vagy $X'TX\sphericalangle = 90°$ miatt a Thalész-tételt alkalmazva a magasságtalppontok is a fenti kör pontjai.

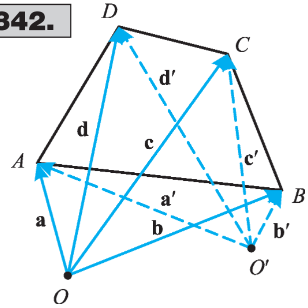
2340.



2341.



2342.



2341. Legyen O a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{a}_1$; $\overrightarrow{OB_1}=\mathbf{b}_1$; $\overrightarrow{OC_1}=\mathbf{c}_1$; $\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{a}_2$; $\overrightarrow{OB_2}=\mathbf{b}_2$; $\overrightarrow{OC_2}=\mathbf{c}_2$; $\overrightarrow{OS_1}=\dfrac{\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1}{3}$; $\overrightarrow{OS_2}=\dfrac{\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2+\mathbf{c}_2}{3}$ és $\overrightarrow{OF_a}=\dfrac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2}{2}$; $\overrightarrow{OF_b}=\dfrac{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}{2}$;

$\overrightarrow{OF_c}=\dfrac{\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2}{2}$. $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\dfrac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2}{2}+\dfrac{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}{2}+\dfrac{\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2}{2}}{3}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1}{3}+\dfrac{\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2+\mathbf{c}_2}{3}\right)=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OS_1}+\overrightarrow{OS_2})\Rightarrow$ <u>S felezi az S_1S_2 szakaszt</u>

2342. $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$ és $\overrightarrow{O'S'}=\dfrac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{c}'+\mathbf{d}'}{4}$. $\overrightarrow{OS'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'S'}=\overrightarrow{OO'}+\dfrac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{c}'+\mathbf{d}'}{4}$

$=\dfrac{(\overrightarrow{OO'}+\mathbf{a}')+(\overrightarrow{OO'}+\mathbf{b}')+(\overrightarrow{OO'}+\mathbf{c}')+(\overrightarrow{OO'}+\mathbf{d}')}{4}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}\Rightarrow S'\equiv S.$

2343. Legyen O a helyvektorok közös kezdőpontja. AB felezőpontja E; BC-é F; CD-é G; DA-é H. $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$; $\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$. $\overrightarrow{OE}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{OF}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$; $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$;

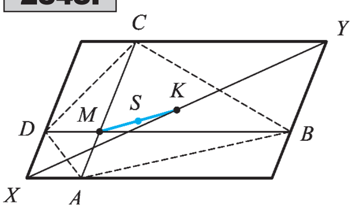
$\overrightarrow{OH}=\dfrac{\mathbf{d}+\mathbf{a}}{2}$. EG felezéspontja M_1, $\overrightarrow{OM_1}=\dfrac{\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}}{2}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}$. HF felezéspontja M_2, $\overrightarrow{OM_2}=\dfrac{\dfrac{\mathbf{d}+\mathbf{a}}{2}+\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}}{2}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}$. $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OS}\Rightarrow EG$ és HF felezéspontja azonos a négyszög súlypontjával.

2344. Legyenek a négyszög csúcsaiba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. Legyen az AC átló felezéspontja F_1, a BD átlóé F_2. $\overrightarrow{OF_1}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$; $\overrightarrow{OF_2}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}$. F_1F_2 szakasz felezéspontja F.

$$\overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OF_1}+\overrightarrow{OF_2}}{2}=\frac{\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}+\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}\Rightarrow$$

$\Rightarrow F\equiv S.$

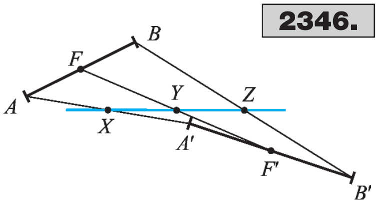
2345.



2345. Legyenek az A, B, C és D pontokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$, az M-be mutató helyvektor $\mathbf{m}$. A 2342. feladatban láttuk, hogy az $ABCD$ négyszög súlypontjába mutató vektor: $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$. A 2343. feladatban láttuk, hogy a középvonalak metszéspontja a súlypont. *XAMD* paralelogramma, ezért $\overrightarrow{MX}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}$ és $\overrightarrow{OX}-\mathbf{m}=\mathbf{d}-\mathbf{m}+\mathbf{a}-\mathbf{m}\Rightarrow\overrightarrow{OX}=\mathbf{a}+\mathbf{d}-\mathbf{m}$; *YBMC* paralelogramma, ezért $\overrightarrow{MY}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}$ és $\overrightarrow{OY}-\mathbf{m}=\mathbf{c}-\mathbf{m}+\mathbf{b}-\mathbf{m}\Rightarrow\overrightarrow{OY}=\mathbf{c}+\mathbf{b}-\mathbf{m}$. Az *XY* szakasz *K* felezéspontja a paralelogramma középpontja: $\overrightarrow{OK}=\dfrac{\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}}{2}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}-\mathbf{m}$. Az *MK* szakasz felezéspontja *F*: $\overrightarrow{OF}=\dfrac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OK}}{2}=\dfrac{\mathbf{m}+\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}-\mathbf{m}}{2}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}$.

2346. Legyenek a A, B, F, A', B', F' pontokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{f}'$.

2346.



$$\overrightarrow{OX}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2};\quad \overrightarrow{OZ}=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{b}'}{2};\quad \overrightarrow{OY}=\frac{\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF'}}{2}=$$
$$=\frac{\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\dfrac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'+\mathbf{b}+\mathbf{b}'}{4}=\frac{\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OZ}}{2}\Rightarrow Y \text{ pont}$$

az *XZ* szakasz felezőpontja. $\Rightarrow$ *X*, *Y* és *Z* egy egyenesen vannak.

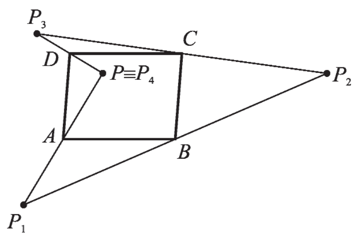
2347. Legyen az *AC* átló felezőpontja F_1, a *BD* átló felezőpontja F_2. $\overrightarrow{AF_1}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ és $\overrightarrow{AF_2}=\mathbf{a}+\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\Rightarrow\overrightarrow{F_1F_2}=\overrightarrow{AF_2}-\overrightarrow{AF_1}=\mathbf{a}+\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}-\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}=\underline{\underline{\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}}}$.

2348. *C* felezi a *PP′* szakaszt: $\mathbf{c}=\dfrac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{2}\Rightarrow\mathbf{p}'=\underline{\underline{2\mathbf{c}-\mathbf{p}}}$.

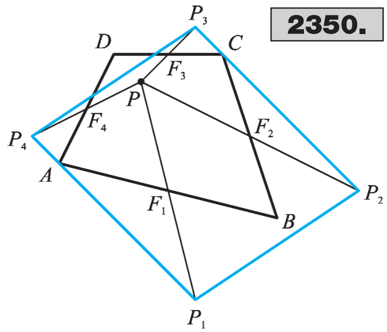
2349. A 2348. feladatban láttuk, hogy $\mathbf{p}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{p}$; $\mathbf{p}_2=2\mathbf{b}-\mathbf{p}_1=2\mathbf{b}-2\mathbf{a}+\mathbf{p}$; $\mathbf{p}_3==2\mathbf{c}-\mathbf{p}_2=2\mathbf{c}-2\mathbf{b}+2\mathbf{a}-\mathbf{p}$; $\mathbf{p}_4=2\mathbf{d}-\mathbf{p}_3=2\mathbf{d}-2\mathbf{c}+2\mathbf{b}-2\mathbf{a}+\mathbf{p}$; $\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{d}$, mivel *ABCD* paralelogramma $\Rightarrow 2\mathbf{d}-2\mathbf{c}+2\mathbf{b}-2\mathbf{a}=2(\mathbf{d}-\mathbf{c}+\mathbf{b}-\mathbf{a})=2(\mathbf{d}-\mathbf{c}+\mathbf{c}-\mathbf{d})=\mathbf{0}\Rightarrow$ $\Rightarrow\mathbf{p}_4=\mathbf{p}$.

2350. $\mathbf{f}_1=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\mathbf{f}_2=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$; $\mathbf{f}_3=\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$; $\mathbf{f}_4=\dfrac{\mathbf{d}+\mathbf{a}}{2}$. A 2348. feladatban láttuk, hogy: $\mathbf{p}_1=2\mathbf{f}_1-\mathbf{p}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{p}$ és $\mathbf{p}_2=2\mathbf{f}_2-\mathbf{p}=\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}$ és $\mathbf{p}_3=2\mathbf{f}_3-\mathbf{p}=\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{p}$ és $\mathbf{p}_4=2\mathbf{f}_4-\mathbf{p}=\mathbf{d}+\mathbf{a}-\mathbf{p}\Rightarrow\overrightarrow{P_1P_2}=\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1=\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{p}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{P_4P_3}==\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4=\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{p}-\mathbf{d}-\mathbf{a}+\mathbf{p}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$, tehát $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_4P_3}\Rightarrow P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma.

2349.



2350.



2351. Legyenek a tükörképpontokba mutató vektorok rendre $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \ldots, \mathbf{p}_6$. A 2348. feladatban láttuk, hogy $\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{b} - \mathbf{p}_1 = 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}_2 = 2\mathbf{c} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{a} - \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_4 = 2\mathbf{a} - \mathbf{p}_3 = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{c} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + \mathbf{p} = -2\mathbf{c} + 2\mathbf{b} + \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_5 = 2\mathbf{b} - \mathbf{p}_4 = 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c} - 2\mathbf{b} - \mathbf{p} = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_6 = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}_5 = 2\mathbf{c} - 2\mathbf{c} + \mathbf{p} = \mathbf{p}$. Tehát $\mathbf{p}_6 = \mathbf{p}$.

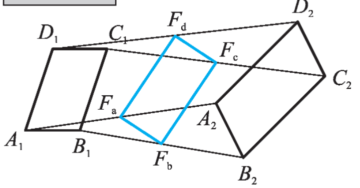
2352. Legyenek az A, B, C, D, E és F pontokba mutató helyvektorok $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ és $\vec{F}$. $\vec{E} = \dfrac{\vec{A} + \vec{D}}{2}$; $\vec{F} = \dfrac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$; $\mathbf{b} = \vec{B} - \vec{A}$; $\mathbf{a} = \vec{C} - \vec{D}$; $\mathbf{k} = \vec{F} - \vec{E} = \dfrac{\vec{B} + \vec{C}}{2} - \dfrac{\vec{A} + \vec{D}}{2} = \dfrac{\vec{B} - \vec{A}}{2} + \dfrac{\vec{C} - \vec{D}}{2} = \underline{\underline{\dfrac{\mathbf{b}}{2} + \dfrac{\mathbf{a}}{2}}}$.

2353. Legyenek a csúcsokba és az átlófelező pontokba mutató helyvektorok $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ és $\vec{F}$. E felezi AC-t, ezért $\vec{E} = \dfrac{\vec{A} + \vec{C}}{2}$ és F felezi BD-t, ezért $\vec{F} = \dfrac{\vec{B} + \vec{D}}{2}$. $\overrightarrow{EF} = \vec{F} - \vec{E} = \dfrac{\vec{B} + \vec{D}}{2} - \dfrac{\vec{A} + \vec{C}}{2} = \dfrac{\vec{B} - \vec{A}}{2} + \dfrac{\vec{D} - \vec{C}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{CD}}{2}$. $AB \parallel CD \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ egyállású vektorok $\Rightarrow EF$ párhuzamos az alapokkal.

2354. Legyenek az A_1, B_1, C_1, D_1, illetve A_2, B_2, C_2, D_2 pontokba mutató helyvektorok $\vec{A}_1, \vec{B}_1, \vec{C}_1, \vec{D}_1$, illetve $\vec{A}_2, \vec{B}_2, \vec{C}_2, \vec{D}_2$. $\vec{F}_a = \dfrac{\vec{A}_1 + \vec{A}_2}{2}$ és $\vec{F}_b = \dfrac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2}$ és $\vec{F}_c = \dfrac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{2}$ és $\vec{F}_d = \dfrac{\vec{D}_1 + \vec{D}_2}{2}$. $\overrightarrow{F_b F_c} = \vec{F}_c - \vec{F}_b = \dfrac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{2} - \dfrac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2} = \dfrac{\vec{C}_1 - \vec{B}_1}{2} + \dfrac{\vec{C}_2 - \vec{B}_2}{2}$. $\overrightarrow{F_a F_d} = \vec{F}_d - \vec{F}_a = \dfrac{\vec{D}_1 + \vec{D}_2}{2} - \dfrac{\vec{A}_1 + \vec{A}_2}{2} = \dfrac{\vec{D}_1 - \vec{A}_1}{2} + \dfrac{\vec{D}_2 - \vec{A}_2}{2}$. Mivel $A_1B_1C_1D_1$, illetve $A_2B_2C_2D_2$ paralelogramma, ezért $\vec{C}_1 - \vec{B}_1 = \vec{D}_1 - \vec{A}_1$ és $\vec{C}_2 - \vec{B}_2 = \vec{D}_2 - \vec{A}_2 \Rightarrow \overrightarrow{F_b F_c} = \overrightarrow{F_a F_d} \Rightarrow F_aF_bF_cF_d$ paralelogramma.

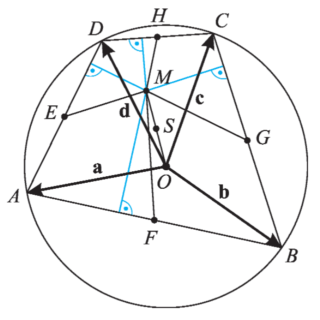
2355. Az ABC, a BCD, a CDA és az ABD háromszögeknek közös a körülírt köre. A 2307. feladatban láttuk, hogy ha a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja, akkor a csúcsokba mutató helyvektorok összege a körülírt kör középpontjából a magasságpontba mutató vektor. Az $ABC\triangle$ M_1 magasságpontjába mutató vektor: $\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. A $BCD\triangle$ M_2 magasságpontjába mutató vektor: $\overrightarrow{OM_2} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$. Az $ABD\triangle$ M_3 magasságpontjába mutató vektor: $\overrightarrow{OM_3} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}$. Az $ACD\triangle$ M_4 magasságpontjába mutató vektor: $\overrightarrow{OM_4} = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$. Az $M_1M_2M_4M_3$ négyszög oldalvektorai: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{M_2M_4} = \overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OM_2} = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{M_4M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$. A magasságvonalakból alkotott négyszög oldalvektorai egyenlők a húrnégyszög oldalvektoraival, ezért a két négyszög oldalai páronként párhuzamosak és egyenlők, tehát a két négyszög egybevágó.

2354.



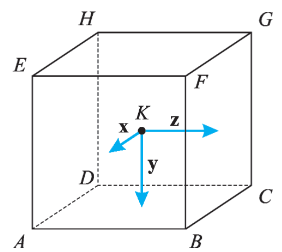
2356. Legyen a húrnégyszög körülírt körének középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja. A 2342. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Legyen O-nak S-re vonatkozó tükörképe M. $\overrightarrow{OM}=2\cdot\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\ \mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Legyen E az AD szakasz felezéspontja. $\overrightarrow{OE}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}$. $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OE}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$ és $\overrightarrow{BC}=$ $=\mathbf{c}-\mathbf{b}$. Mivel $|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=r$, így $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ és $(\mathbf{c}-\mathbf{b})$ vektorok merőlegesek egymásra. $\Rightarrow \overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow M$ rajta van az E felezéspontból BC-re állított merőlegesen. A többi esetre is hasonlóan lehet belátni.

2356.



2357. Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE}=\mathbf{c}$. $ABCD$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $ABFE$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$; $ADHE$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$; $BCGF$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}+\mathbf{a}$; $DCGH$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}+\mathbf{b}$; $EFGH$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\mathbf{c}$.

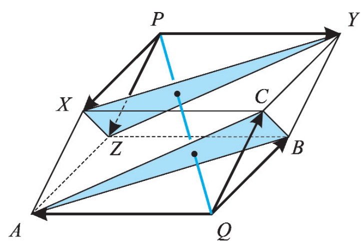
2358.



2358. $\overrightarrow{KB}=\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ $\overrightarrow{KF}=\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}$ $\overrightarrow{KC}=-\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$
$\overrightarrow{KG}=-\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}$; $\overrightarrow{KA}=\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}$ $\overrightarrow{KE}=-\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}$
$\overrightarrow{KD}=-\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}$ $\overrightarrow{KH}=-\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}$.

2359. Tekintsük a PQ testátlót. $\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{PY}+\overrightarrow{PZ}=\overrightarrow{PQ}$. Másrészről $\frac{\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{PY}+\overrightarrow{PZ}}{3}=\overrightarrow{PS}$ az $XYZ\triangle$ súlypontjába mutató vektor, ami benne van az $[XYZ]$ síkban. $\Rightarrow$ A testátló P-hez közelebbi harmadolópontja benne van az $[XYZ]$ síkban. Hasonlóan megmutatható, hogy a Q-hoz közelebbi harmadolópont benne van az $[ABC]$ síkban.

2359.

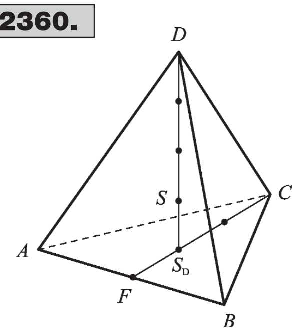


2360. $DS=3SS_D$; $\overrightarrow{OS_D}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$ az $ABC\triangle$ súlypontjának helyvektora.

$$\overrightarrow{OS}=\frac{3\overrightarrow{OS_D}+\overrightarrow{OD}}{4}=\frac{3\cdot\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}+\mathbf{d}}{4}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}.$$

Hasonlóan látható be a többi súlyvonalra is.

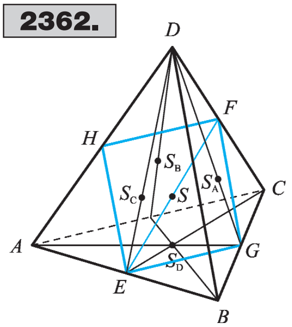
2360.



2361. Legyenek a csúcsokba mutató helyvektorok rendre **a**, **b**, **c** és **d**. A 2360. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$. $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OS}=\mathbf{a}-\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\dfrac{3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}}{4}$. Hasonlóan: $\overrightarrow{SB}=\dfrac{3\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{c}-\mathbf{d}}{4}$; $\overrightarrow{SC}=\dfrac{3\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{d}}{4}$; $\overrightarrow{SD}=\dfrac{3\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}}{4}$.

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\frac{3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}+3\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{c}-\mathbf{d}+3\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{d}+3\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}}{4}=\mathbf{0}.$$

2362.



2362. Legyenek az A, B, C, D csúcsokba mutató helyvektorok rendre **a**, **b**, **c** és **d**. $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$ az $ABCD$ tetraéder súlypontjának helyvektora. $\overrightarrow{OS_D}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$; $\overrightarrow{OS_A}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}$; $\overrightarrow{OS_B}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}$; $\overrightarrow{OS_C}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}}{3}$ a lapsúlypontokba mutató helyvektorok. Legyen Q az $S_AS_BS_CS_D$ tetraéder súlypontja.

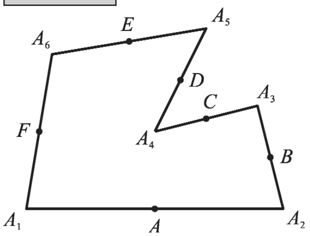
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OS_A}+\overrightarrow{OS_B}+\overrightarrow{OS_C}+\overrightarrow{OS_D}}{4}=\frac{3\mathbf{a}+3\mathbf{b}+3\mathbf{c}+3\mathbf{d}}{12}=$$
$$=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}\Rightarrow Q\equiv S.$$

2363. Nézzük a 2362. ábrát! Legyenek a csúcsokba mutató helyvektorok rendre **a**, **b**, **c** és **d**. A súlypontba mutató helyvektor: $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$. AB felezéspontja E: $\overrightarrow{OE}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, CD felezéspontja F: $\overrightarrow{OF}=\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$, EF felezéspontja P: $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{2}=\dfrac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}}{2}=$

$=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}\Rightarrow P\equiv S\Rightarrow$ A súlypont felezi EF szakaszt.

2364. Nézzük a 2362. ábrát! Felhasználjuk, hogy S felezi EF-et és HG-t (lásd 2363. feladat) $\Rightarrow$ $EGFH$ négyszög EF és GH átlójának közös felezéspontja $S\Leftrightarrow EGFH$ síkbeli négyszög és paralelogramma.

2365.



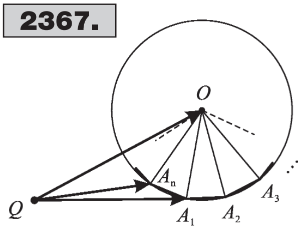
2365. $\overrightarrow{A}=\dfrac{\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}}{2}$ és $\overrightarrow{B}=\dfrac{\overrightarrow{A_2}+\overrightarrow{A_3}}{2}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A}=\dfrac{\overrightarrow{A_3}-\overrightarrow{A_1}}{2}$.

Hasonlóan: $\overrightarrow{CD}==\dfrac{\overrightarrow{A_5}-\overrightarrow{A_3}}{2}$ és $\overrightarrow{EF}=\dfrac{\overrightarrow{A_1}-\overrightarrow{A_5}}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_3}-\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_5}-\overrightarrow{A_3}+\overrightarrow{A_1}-\overrightarrow{A_5}\right)=\mathbf{0}.$

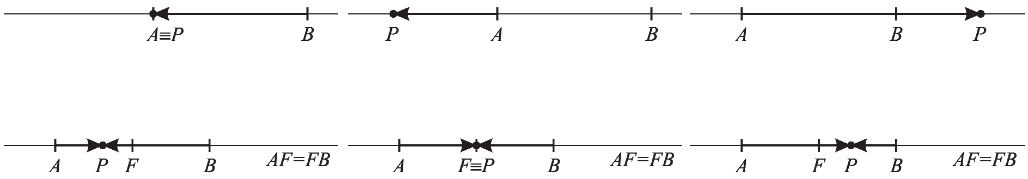
2366. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+$
$+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\right)+$
$+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}\right)=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CD}=\underline{\underline{3\overrightarrow{AD}}}$ az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}=\mathbf{0}$ és $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\mathbf{0}$ összefüggéseket felhasználva.

2367.



2367. $\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{A_1O}$; $\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QA_2}+\overrightarrow{A_2O}$; $\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QA_3}+\overrightarrow{A_3O}$; ... $\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QA_n}+\overrightarrow{A_nO}.\Rightarrow n\cdot\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{QA_2}+\ldots+\overrightarrow{QA_n}+\overrightarrow{A_1O}+$

2369.



III

$+\overrightarrow{A_2O} + \ldots + \overrightarrow{A_nO}$.$\otimes$ Mivel az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszög szabályos, O a sokszög súlypontja is egyben. $\Rightarrow$ $\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{A_2O} + \ldots + \overrightarrow{A_nO} = \mathbf{0}$.

Ezt a $\otimes$ egyenletben felhasználva: $\underline{\underline{\overrightarrow{QO} = \frac{1}{n} \cdot \left(\overrightarrow{QA_1} + \overrightarrow{QA_2} + \ldots + \overrightarrow{QA_n}\right)}}$.

2368. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} = \vec{A_1} - \vec{A} + \vec{B_1} - \vec{B} + \vec{C_1} - \vec{C} + \vec{D_1} - \vec{D} = (C_1 - A) + (D_1 - B) + (A_1 - C) + (B_1 - D) = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{DB_1}$.

2369. **1. eset:** $\lambda = 0$; $\overrightarrow{AP} = \mathbf{0} = 0 \cdot \overrightarrow{BP}$.

2. eset: $0 < \lambda < 1$; $|\overrightarrow{AP}| < |\overrightarrow{BP}|$.

3. eset: $\lambda = 1$; Nincs olyan P pont, amelyre $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP}$ lenne.

4. eset: $1 < \lambda$; $|\overrightarrow{AP}| > |\overrightarrow{BP}|$.

5. eset: $-1 < \lambda < 0$; $|\overrightarrow{AP}| < |\overrightarrow{BP}|$.

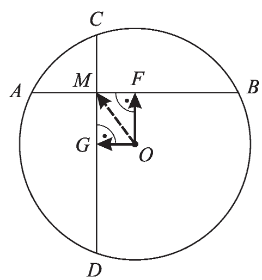
6. eset: $\lambda = -1$; $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP}$.

7. eset: $\lambda < -1$; $|\overrightarrow{AP}| > |\overrightarrow{BP}|$.

2370. $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{A} - \vec{P} + 2\vec{B} - 2\vec{P} + 3\vec{C} - 3\vec{P} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{A} + 2\vec{B} + 3\vec{C} = 6\vec{P} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{P} = \dfrac{\vec{A} + 2\vec{B} + 3\vec{C}}{6}$. A P pontba mutató helyvektor a fenti összefüggéssel szerkeszthető.

2371. $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{B_1} - \vec{A_1} + \vec{B_2} - \vec{A_2} + \ldots + \vec{B_n} - \vec{A_n} = (\vec{B_{i_1}} - \vec{A_1}) + (\vec{B_{i_2}} - \vec{A_2}) + \ldots + (\vec{B_{i_n}} - \vec{A_n}) = \overrightarrow{A_1B_{i_1}} + \overrightarrow{A_2B_{i_2}} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_{i_n}}$.
Felhasználtuk, hogy a vektorösszeadás kommutatív művelet.

2372.



2372. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OF}$, ahol F felezi AB-t; $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OG}$, ahol G felezi CD-t. $OF \perp AB$, $OG \perp CD$ és $AB \perp CD$ miatt $OGMF$ téglalap. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OF} + 2\overrightarrow{OG} = \underline{\underline{2\overrightarrow{OM}}}$.

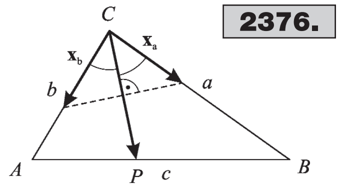
Vektorok felbontása összetevőkre

2373. A súlyvonalvektor az oldalvektorok felének összege.

2374. 2375. A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

III

2376.



2376. A kért felbontást a 2376. ábra mutatja. A szögfelező tételből tudjuk, hogy $\frac{AP}{PB}=\frac{b}{a} \Rightarrow AP=\frac{bc}{a+b}$ $BP=\frac{ac}{a+b}$.
A párhuzamos szelők tétele miatt $\frac{|\mathbf{x}_b|}{b}=\frac{PB}{c}$; $\frac{|\mathbf{x}_a|}{a}=\frac{AP}{c}$.
$|\mathbf{x}_b| = b\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{ac}{a+b}=\frac{ab}{a+b}$ és $\mathbf{x}_b=|\mathbf{x}_b|\cdot\mathbf{e}_b=|\mathbf{x}_b|\cdot\frac{\mathbf{b}}{b}=$
$=\frac{ab}{a+b}\cdot\frac{\mathbf{b}}{b}=\underline{\underline{\frac{a}{a+b}\cdot\mathbf{b}}}$. Hasonlóan belátható, hogy $\mathbf{x}_a=\underline{\underline{\frac{b}{a+b}\cdot\mathbf{a}}}$.
$\overrightarrow{CP}=\mathbf{x}_b+\mathbf{x}_a=\underline{\underline{\frac{a}{a+b}\cdot\mathbf{b}+\frac{b}{a+b}\cdot\mathbf{a}}}$.

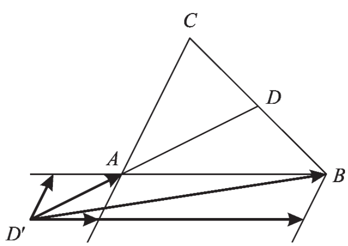
2377. *a)* Az egyértelmű előállíthatóság miatt $\underline{\underline{\alpha=3}}$ és $2\beta+1=5 \Rightarrow \underline{\underline{\beta=2}}$. *b)* $\alpha+\beta-1=0$ és $2\alpha-\beta=0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha=\frac{1}{3}}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta=\frac{2}{3}}}$. *c)* $\alpha=\beta+1$ és $\beta=-(\alpha-1) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha=1}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta=0}}$.

d) $2\alpha-\beta-1=0$ és $3\alpha+\beta+10=0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha=-\frac{9}{5}}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta=-\frac{23}{5}}}$.

2378. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD'}=\mathbf{0} \Rightarrow D$ középpontos tükörképe A-ra D'.
$\overrightarrow{D'A}=\overrightarrow{AD}=\underline{\underline{\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2}}}$; $\overrightarrow{D'B}=\overrightarrow{D'A}+\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2}+\overrightarrow{AB}=\underline{\underline{\frac{\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}}{2}}}$.

2379. $\mathbf{m}=-\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

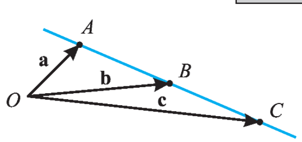
2378.



2380. $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$. A, B és C egy egyenesen vannak, ezért $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AB}$ $(\neq\mathbf{0})$ egyállású vektorok. $\Rightarrow$ Van olyan $\lambda\in\mathbf{R}$, hogy $\overrightarrow{BC}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$; $\mathbf{c}=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}+\lambda\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=$
$=(\lambda+1)\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}$; $\beta=\lambda+1$ és $\alpha=-\lambda$ választással
$\mathbf{c}=\alpha\cdot\mathbf{a}+\beta\cdot\mathbf{b}$ és $\alpha+\beta=1$.

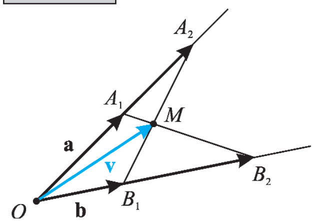
2381. $\mathbf{c}=\alpha\cdot\mathbf{a}+\beta\cdot\mathbf{b}$ és $\alpha+\beta=1 \Rightarrow \alpha=1-\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{c}=(1-\beta)\cdot\mathbf{a}+\beta\cdot\mathbf{b}$; $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}=$
$=(1-\beta)\cdot\mathbf{a}+\beta\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}=(\beta-1)\cdot\mathbf{b}-(\beta-1)\cdot\mathbf{a}=$
$=(\beta-1)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(\beta-1)\cdot\overrightarrow{AB}$. $\otimes$ Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem egyállású vektorok, akkor $\overrightarrow{AB}\neq\mathbf{0}$. Ha $\beta=1$, akkor $\mathbf{c}=\beta\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\Rightarrow C$ rajta van az AB egyenesen. Ha $\beta\neq1$, akkor $\overrightarrow{BC}\neq\mathbf{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ a $\otimes$ összefüggés miatt egymásba fűzött egyállású vektorok, így A, B és C egy egyenesen vannak.

2381.

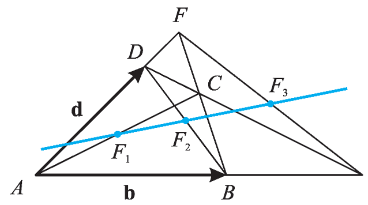


III

2382.



2383.



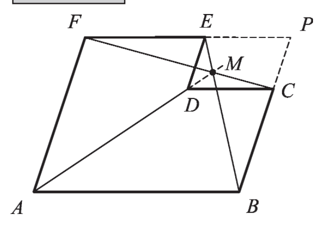
2382. Az M metszéspont akkor létezik, ha A_1B_2 nem párhuzamos B_1A_2-vel, azaz $\lambda\mu \neq 1$. A 2380. feladatban láttuk, hogy A_2, M, B_1 egy egyenesen lévő pontokba mutató vektorokra: $\mathbf{v} = \alpha \cdot \lambda\mathbf{a} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{b}$. Hasonlóan az A_1, M, B_2 pontokba mutató vektorokra: $\mathbf{v} = \beta \cdot \mathbf{a} + (1 - \beta) \cdot \mu\mathbf{b} \Rightarrow \alpha \cdot \lambda\mathbf{a} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{v} = \beta \cdot \mathbf{a} + (1 - \beta) \cdot \mu\mathbf{b}$. Az előállítás egyértelműsége miatt: $\alpha \cdot \lambda = \beta$ és $1 - \alpha = (1 - \beta) \cdot \mu \Rightarrow \alpha = \dfrac{\beta}{\lambda} \Rightarrow 1 - \dfrac{\beta}{\lambda} = (1 - \beta) \cdot \mu \Rightarrow \beta = \dfrac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1}$

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{a} + \left(1 - \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1}\right) \cdot \mu\mathbf{b} = \underline{\underline{\frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{a} + \frac{\mu(\lambda - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{b}}}.$$

2383. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{AE} = \lambda\mathbf{b}$; $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$; $\overrightarrow{AF} = \mu\mathbf{d}$. A 2382. feladat eredményét felhasználva $\overrightarrow{AC} = \dfrac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{b} + \dfrac{\mu(\lambda - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{d}$; $\overrightarrow{AF_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \dfrac{\lambda(\mu - 1)}{2(\mu\lambda - 1)} \cdot \mathbf{b} + \dfrac{\mu(\lambda - 1)}{2(\mu\lambda - 1)} \cdot \mathbf{d}$; $\overrightarrow{AF_2} = \dfrac{\mathbf{d} + \mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{AF_3} = \dfrac{\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}}{2}$; $\overrightarrow{AF_1} = \dfrac{\lambda\mu\mathbf{b} - \lambda\mathbf{b} + \lambda\mu\mathbf{d} - \mu\mathbf{d}}{2(\mu\lambda - 1)} =$
$= \dfrac{\lambda\mu(\mathbf{b} + \mathbf{d})}{2(\mu\lambda - 1)} - \dfrac{\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}}{2(\mu\lambda - 1)} = \dfrac{\lambda\mu}{(\mu\lambda - 1)} \cdot \overrightarrow{AF_2} + \dfrac{1}{1 - \mu\lambda} \cdot \overrightarrow{AF_3}$; $\overrightarrow{AF_1} = k \cdot \overrightarrow{AF_2} + m \cdot \overrightarrow{AF_3}$, ahol $k = \dfrac{\lambda\mu}{(\mu\lambda - 1)}$ és $m = \dfrac{1}{1 - \mu\lambda}$. $k + m = \dfrac{\mu\lambda}{(\mu\lambda - 1)} + \dfrac{1}{1 - \mu\lambda} = \dfrac{\mu\lambda - 1}{\mu\lambda - 1} = 1$ miatt a 2381. feladat alapján ez éppen azt jelenti, hogy F_1, F_2 és F_3 egy egyenesen vannak.

2384. Legyen $\overrightarrow{PE} = \mathbf{e}$ $\overrightarrow{PF} = \lambda\mathbf{e}$ $\overrightarrow{PC} = \mathbf{c}$ $\overrightarrow{PB} = \mu\mathbf{c}$ és $EC \cap FC = M$. A 2382. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{PM} = \dfrac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{e} + \dfrac{\mu(\lambda - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{c}$; $AB \parallel PF$; $FA \parallel PB$; $DC \parallel PE$ és $ED \parallel PC$ miatt $\overrightarrow{PA} = \lambda \cdot \mathbf{e} + \mu \cdot \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{PD} = \mathbf{e} + \mathbf{c}$. $\overrightarrow{PM} = \dfrac{\lambda\mu \cdot \mathbf{e} - \lambda \cdot \mathbf{e} + \lambda\mu \cdot \mathbf{c} - \mu \cdot \mathbf{c}}{\lambda\mu - 1} =$
$= \dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu - 1} \cdot (\mathbf{e} + \mathbf{c}) - \dfrac{\lambda \cdot \mathbf{e} + \mu \cdot \mathbf{c}}{\lambda\mu - 1} = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu - 1} \cdot \overrightarrow{PD} - \dfrac{1}{\lambda\mu - 1} \cdot \overrightarrow{PA}$. $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu - 1} - \dfrac{1}{\lambda\mu - 1} = 1$ és a 2381. feladat felhasználásával ez azt jelenti, hogy M rajta van az AD egyenesen. $\Rightarrow AD$, BE és CF egy pontban metszik egymást.

2384.



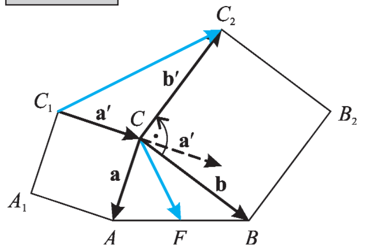
2385. Az osztópontba mutató helyvektorokra vonatkozó összefüggés miatt $\vec{V}=\dfrac{\vec{A}+\vec{D}}{2}$; $\vec{Z}=\dfrac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$; $\vec{X}=\dfrac{\mu\vec{A}+\lambda\vec{B}}{\lambda+\mu}$; $\vec{Y}=\dfrac{\mu\vec{D}+\lambda\vec{C}}{\lambda+\mu}$. P az XY egyenes pontja, ezért a 2380. feladat állítása szerint van olyan $k\in\mathbf{R}$, hogy $\vec{P}=k\cdot\vec{X}+(1-k)\cdot\vec{Y}$. P a VZ egyenes pontja, ezért van olyan $m\in\mathbf{R}$, hogy $\vec{P}=m\cdot\vec{V}+(1-m)\cdot\vec{Z}$. A kettőt összevetve $k\cdot\vec{X}+(1-k)\cdot\vec{Y}=m\cdot\vec{V}+(1-m)\cdot\vec{Z}$, azaz $k\cdot\dfrac{\mu\vec{A}+\lambda\vec{B}}{\lambda+\mu}+(1-k)\cdot\dfrac{\mu\vec{D}+\lambda\vec{C}}{\lambda+\mu}=m\cdot\dfrac{\vec{A}+\vec{D}}{2}+(1-m)\cdot\dfrac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$.
$\vec{A}(2k\mu-m(\mu+\lambda))+\vec{B}(2k\lambda-(1-m)(\mu+\lambda))+\vec{C}(2\lambda(1-k)-(1-m)(\mu+\lambda))+$
$+\vec{D}(2\mu(1-k)-m(\mu+\lambda))=\mathbf{0}\Rightarrow 2k\mu=m(\mu+\lambda)$; $2k\lambda=(1-m)(\mu+\lambda)$; $2\lambda(1-k)=$
$=(1-m)(\mu+\lambda)$; $2\mu(1-k)=m(\mu+\lambda)\Rightarrow\dfrac{\mu}{\lambda}=\dfrac{m}{1-m}\Rightarrow m=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\Rightarrow 2k\mu=$
$=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot(\mu+\lambda)\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\underline{\underline{\dfrac{k}{1-k}=1}}$. A P pont felezi az XY szakaszt és $\lambda:\mu$ arányban osztja a VZ szakaszt.

Vektorok elforgatásával megoldható feladatok

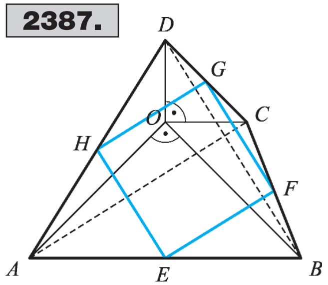
2386. Legyen $\overrightarrow{CA}=\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}$. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=2\overrightarrow{CF}$, mert CF súlyvonal. Legyen $\mathbf{a}$ $+90°$-os elforgatottja $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$ $+90°$-os elforgatottja $\mathbf{b}'$. $\overrightarrow{C_1C}=\mathbf{a}'$; $\overrightarrow{CC_2}=\mathbf{b}'\Rightarrow\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CC_2}=\mathbf{a}'+\mathbf{b}'=$
$=(\mathbf{a}+\mathbf{b})'=(2\overrightarrow{CF})'\Rightarrow\underline{\underline{C_1C_2=2CF}}$ és a 90°-os elforgatás miatt egymásra merőlegesek.

2387. $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$; $\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$; $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$; $\overrightarrow{BD}=\mathbf{d}-\mathbf{b}$. *a)* Tekintsük az O középpontú $+90°$-os elforgatást. $\mathbf{a}$ képe $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ képe $\mathbf{d}$, $(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ képe $(\mathbf{d}-\mathbf{b})$, $\overrightarrow{AC}$ képe $\overrightarrow{BD}\Rightarrow BD\perp AC$ és $BD=AC$. *b)* $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{EH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. A feladat *a)* része miatt $EF\perp EH$ és $EF=EH$. Ez az $EFGH$ négyszög bármely két szomszédos oldalára megmutatható, ezért $EFGH$ négyzet.

2386.



2387.



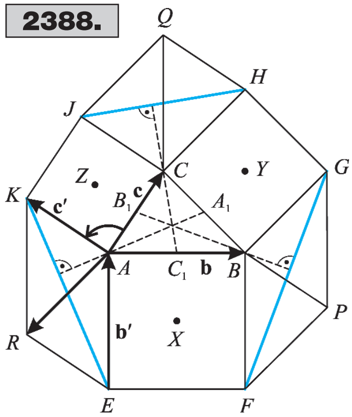
2388. *a)* A megoldást lásd a 2386. feladat megoldásánál. *b)* Az *a)* pontban láttuk, hogy $KE \perp AA_1$, ahol AA_1 az egyik súlyvonal. $\Rightarrow$ A-ból KE-re bocsátott merőleges az AA_1 egyenes. Hasonlóan B-ből FG-re bocsátott merőleges a BB_1 egyenes, C-ből JH-ra bocsátott merőleges a CC_1 egyenes. A háromszög súlyvonalai a súlypontban metszik egymást, ezért a feltételeknek eleget tevő merőlegesek is a súlypontban metszik egymást. *c)* Legyen $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. Tekintsük a $+90°$-os elforgatást. $\mathbf{b}$ képe $\mathbf{b}'$ és $\mathbf{c}$ képe $\mathbf{c}'$, ezért $\overrightarrow{EA} = \mathbf{b}'$ és $\overrightarrow{AK} = \mathbf{c}'$. $\overrightarrow{AR} = \mathbf{c}' - \mathbf{b}' = (\mathbf{c} - \mathbf{b})' = \left(\overrightarrow{BC}\right)' \Rightarrow \overrightarrow{AR}$ a $\overrightarrow{BC}$ $+90°$-os elforgatottja, ezért $AR \perp BC$ és $AR = BC$. Hasonlóan megmutatható, hogy $BP \perp AC$ és $BP = AC$, valamint $CQ \perp AB$ és $CQ = AB$. *d)* A korábbi jelöléseket használva (a helyvektorok közös kezdőpontja A): $\vec{Z} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{c}'}{2}$; $\vec{X} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2}$; $\vec{A_1} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{A_1Z} = \vec{Z} - \vec{A_1} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{c}'-\mathbf{b}-\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{c}'-\mathbf{b}}{2}$ és $\overrightarrow{A_1X} = \vec{X} - \vec{A_1} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'-\mathbf{b}-\mathbf{c}}{2} = \frac{-\mathbf{c}-\mathbf{b}'}{2}$. Vegyük az $\overrightarrow{A_1Z}$ $+90°$-os elforgatottját. $(\overrightarrow{A_1Z})' = \left(\frac{\mathbf{c}'-\mathbf{b}}{2}\right)' = \frac{\mathbf{c}''-\mathbf{b}'}{2} = \frac{-\mathbf{c}-\mathbf{b}'}{2} = = \overrightarrow{A_1X} \Rightarrow X$ a Z pont A_1 körüli $+90°$-os elforgatottja. $\Rightarrow$ Az A_1 oldalfelezéspont az $XYZ\triangle$ XZ oldala fölé befelé rajzolt négyzet középpontja. Hasonlóan megmutatható, hogy B_1 az XY oldal fölé, C_1 az YZ oldal fölé rajzolt négyzet középpontja. *e)* A korábbi jelöléseket használva: $\vec{P} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GP} = \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{c})' - \mathbf{b}' = \mathbf{b} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{c}'$; $\vec{R} = \mathbf{c}' - \mathbf{b}'$; $\vec{X} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2}$. $\frac{\vec{P}+\vec{R}}{2} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{c}'+\mathbf{c}'-\mathbf{b}'}{2} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2} = \vec{X} \Rightarrow X$ a PR szakasz felezőpontja. Hasonlóan megmutatható, hogy Y a PQ szakasz, Z pedig a QR szakasz felezőpontja. *f)* Az *e)* pontban láttuk, hogy X felezi a PR szakaszt, ezért QX a $PQR\triangle$ Q-ból induló súlyvonala. Hasonlóan belátható, hogy PZ és RY is súlyvonalak, tehát a $PQR\triangle$ súlypontjában metszik egymást. *g)* A korábbi jelöléseket használva: $\vec{S}_{ABC} = \underline{\underline{\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}}}$; $\vec{X} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2}$;

$\vec{Y} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{b}'-\mathbf{c}'}{2}$; $\vec{Z} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{c}'}{2}$; $\vec{S}_{XYZ} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{b}'-\mathbf{c}'+\mathbf{c}+\mathbf{c}'}{6} = \frac{2\mathbf{b}+2\mathbf{c}}{6} = \underline{\underline{\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}}}$

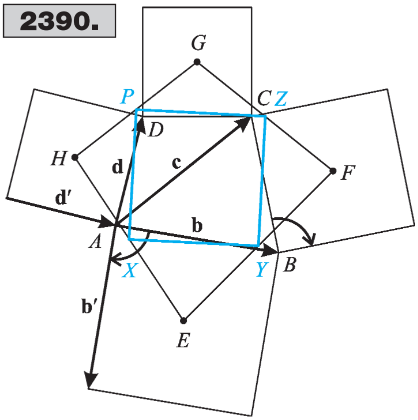
$\vec{E} = -\mathbf{b}'$; $\vec{G} = \mathbf{b} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}'$; $\vec{J} = \mathbf{c} + \mathbf{c}'$; $\vec{S}_{EGJ} = \frac{-\mathbf{b}'+\mathbf{b}+\mathbf{b}'-\mathbf{c}'+\mathbf{c}+\mathbf{c}'}{3} = \underline{\underline{\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}}}$;

$\vec{F} = \mathbf{b} - \mathbf{b}'$; $\vec{H} = \mathbf{c} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}'$; $\vec{K} = \mathbf{c}'$; $\vec{S}_{FHK} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'+\mathbf{c}+\mathbf{b}'-\mathbf{c}'+\mathbf{c}'}{3} = \underline{\underline{\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}}}$. A fentiek alapján $S_{ABC} \equiv S_{XYZ} \equiv S_{EGJ} \equiv S_{FHK}$. *h)* $ABHJ$ négyszögben a C pont olyan, hogy AJC és BHC egyenlő szárú derékszögű háromszögek. A 2387. feladatban beláttuk, hogy ilyen négyszög esetében az átlók merőlegesek és egyenlők: $AH = BJ$ és $AH \perp BJ$. Hasonlóan megmutatható a másik két szakaszpár egyenlősége és merőlegessége is.

2388.



2390.



2389. A 2387. ábra jelöléseivel: Legyenek az A, B, C és D pontokba mutató helyvektorok $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ és $\vec{D}$. $\overrightarrow{AC}=\vec{C}-\vec{A}$ és $\overrightarrow{BD}=\vec{D}-\vec{B}$, $AC\perp BD$ és $AC=BD$ miatt $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BD}$ $(-90)°$-os elforgatottja: $\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BD})'\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{C}-\vec{A}=\vec{D}'-\vec{B}'$; $\vec{E}=\dfrac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$; $\vec{F}=\dfrac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$;

$\vec{H}=\dfrac{\vec{A}+\vec{D}}{2}$. $\overrightarrow{EF}=\vec{F}-\vec{E}=\dfrac{\vec{B}+\vec{C}-\vec{A}-\vec{B}}{2}=$

$=\dfrac{\vec{C}-\vec{A}}{2}$; $\overrightarrow{EH}=\vec{H}-\vec{E}=\dfrac{\vec{A}+\vec{D}-\vec{A}-\vec{B}}{2}=\dfrac{\vec{D}-\vec{B}}{2}$.

Tekintsük az $\overrightarrow{EH}$ $(-90)°$-os elforgatottját. $\left(\overrightarrow{EH}\right)'=$

$=\left(\dfrac{\vec{D}-\vec{B}}{2}\right)'=\dfrac{\vec{D}'-\vec{B}'}{2}=\dfrac{\vec{C}-\vec{A}}{2}=\overrightarrow{EF}\Rightarrow F$ a H pont E körüli $(-90)°$-os elforgatottja. Hasonlóan H az F pont G körüli $(-90)°$-os elforgatottja, ezért $HEFG$ négyzet.

2390. Legyen A a helyvektorok közös kezdőpontja. Jelöljük a $(-90)°$-os elforgatás során keletkezett képeket ′-vel. $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$; $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}$; $\overrightarrow{AE}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{AF}=\mathbf{b}+\dfrac{\mathbf{c}-\mathbf{b}+\mathbf{c}'-\mathbf{b}'}{2}=$

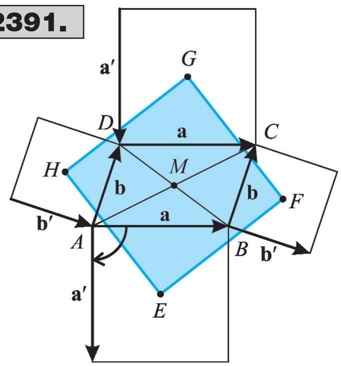
$=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{c}'-\mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{AG}=\mathbf{c}+\dfrac{\mathbf{d}-\mathbf{c}+\mathbf{d}'-\mathbf{c}'}{2}=\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{d}'-\mathbf{c}'}{2}$; $\overrightarrow{AH}=\dfrac{\mathbf{d}-\mathbf{d}'}{2}$;

$$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG}=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{b}'-(\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{d}'-\mathbf{c}')}{2}=\frac{\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}+\mathbf{b}'+\mathbf{c}'-\mathbf{d}'}{2};$$

$$\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AF}=\frac{\mathbf{d}-\mathbf{d}'-(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{c}'-\mathbf{b}')}{2}=\frac{\mathbf{b}'-\mathbf{c}'-\mathbf{d}'-\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2};$$

$\left(\overrightarrow{GE}\right)'=\left(\dfrac{\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}+\mathbf{b}'+\mathbf{c}'-\mathbf{d}'}{2}\right)'=\dfrac{\mathbf{b}'-\mathbf{c}'-\mathbf{d}'+\mathbf{b}''+\mathbf{c}''-\mathbf{d}''}{2}$. Felhasználva, hogy $\mathbf{b}''=-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}''=-\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}''=-\mathbf{d}$: $\left(\overrightarrow{GE}\right)'= =\dfrac{\mathbf{b}'-\mathbf{c}'-\mathbf{d}'-\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}=\overrightarrow{FH}\Rightarrow$ A $HEFG$ négyszög átlói merőlegesek és egyenlők. A 2389. feladatot alkalmazva a négyszög oldalfelezéspontjai négyzetet alkotnak.

2391.



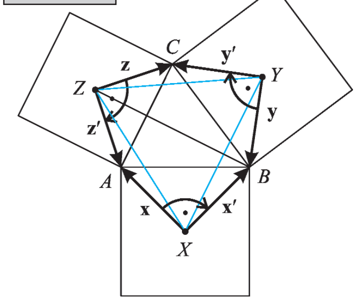
2391. **1. megoldás:** Legyen A a helyvektorok közös kezdőpontja. Jelöljük a $(-90)°$-os elforgatás során keletkezett képeket ′-vel. Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$. $ABCD$ paralelogramma, ezért $\overrightarrow{DC}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$. $\overrightarrow{AE}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2}$; $\overrightarrow{AF}=\mathbf{a}+\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{AG}=\mathbf{b}+\dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{a}'}{2}$;

$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2}$. $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AH}=\mathbf{b}+\dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{a}'}{2}-$

$-\frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AH}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2}-\frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2}=\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{GF}=$ $=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AG}=\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}+\mathbf{b}'}{2}-\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}-\mathbf{a}'}{2}=\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}$. Tehát $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GF}$, ezért $HE=GF$ és $HE\parallel GF$ (1). $(\overrightarrow{HG})'=\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}\right)'=\frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'-\mathbf{a}''+\mathbf{b}''}{2}$. Felhasználva $\mathbf{a}''=-\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}''=-\mathbf{b}$: $(\overrightarrow{HG})'=\frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}=\overrightarrow{HE}\Rightarrow HG=HE$ és $HG\perp GE$ (2). (1) és (2) összefüggésekből következik, hogy $HEFG$ négyzet. **2. megoldás:** Legyen M a paralelogramma átlóinak metszéspontja. $\overrightarrow{AE}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2}$; $\overrightarrow{MA}=-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2}=\frac{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{MH}=$ $=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AH}=-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2}=-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}'}{2}$. Vegyük az $\overrightarrow{ME}$ vektor $(-90°)$-os elforgatottját. $(\overrightarrow{ME})'=\left(\frac{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}{2}\right)'=\frac{\mathbf{a}''-\mathbf{b}'}{2}=\frac{-\mathbf{a}-\mathbf{b}'}{2}=-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}'}{2}=\overrightarrow{MH}$. Hasonlóan belátható, hogy $(\overrightarrow{MH})'=\overrightarrow{MG}$ és $(\overrightarrow{MG})'=\overrightarrow{MF}$. MEF; MFG; MGH és MHE egyenlő szárú derékszögű háromszögek, a derékszög M-ben van. $\Rightarrow EFGH$ négyzet.

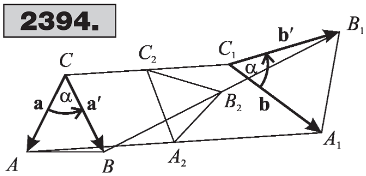
2392. *a)* Jelöljük az ábra szerint a vektorokat, és $'$-vel a $(-90)°$-os elforgatottjukat (felhasználva, hogy a négyzet félátlói merőlegesek és egyenlők). $\overrightarrow{XY}=\mathbf{x}'-\mathbf{y}$; $\overrightarrow{BZ}=-\mathbf{x}'+\mathbf{x}-\mathbf{z}'$. Tekintsük a C-ből kiindulva az egymáshoz fűzött, majd oda visszaérkező vektorokat. $-\mathbf{z}+\mathbf{z}'-\mathbf{x}+\mathbf{x}'-\mathbf{y}+\mathbf{y}'=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}=\mathbf{x}'+\mathbf{y}'+\mathbf{z}'=(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})'\Rightarrow\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}=\mathbf{0}\Rightarrow$ $\Rightarrow\mathbf{y}=-\mathbf{x}-\mathbf{z}$. $\overrightarrow{XY}=\mathbf{x}'+\mathbf{x}+\mathbf{z}$; $(\overrightarrow{XY})'=(\mathbf{x}'+\mathbf{x}+\mathbf{z})'=\mathbf{x}''+\mathbf{x}'+\mathbf{z}'=-\mathbf{x}+\mathbf{x}'+\mathbf{z}'=-\overrightarrow{BZ}$. $\overrightarrow{BZ}$ az $\overrightarrow{XY}$ $+90°$-os elforgatottja, ezért $BZ=XY$ és $BZ\perp XY$. *b)* Az *a)* pontban látottakhoz hasonlóan belátható, hogy $AY\perp ZX$ és $CX\perp ZY$. $\Rightarrow AZ$; CX és BZ az $XYZ\triangle$ magasságvonalai, ezért egy pontban metszik egymást.

2392.



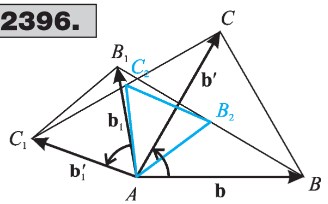
2393. A 2394. ábra jelöléseit használjuk. Legyenek az A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 pontokba mutató helyvektorok rendre $\vec{A}$, $\vec{B}$,..., $\vec{C}_2$. Jelölje a $+90°$-os elforgatás képét $'$. $\vec{C}_2=\frac{\vec{C}+\vec{C}_1}{2}$; $\vec{A}_2=\frac{\vec{A}+\vec{A}_1}{2}$; $\vec{B}_2=\frac{\vec{B}+\vec{B}_1}{2}$. $\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{A}_2-\vec{C}_2=$ $=\frac{\vec{A}-\vec{C}}{2}+\frac{\vec{A}_1-\vec{C}_1}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{C_2B_2}=\vec{B}_2-\vec{C}_2=\frac{\vec{B}-\vec{C}}{2}+$ $+\frac{\vec{B}_1-\vec{C}_1}{2}=\frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}$; $(\overrightarrow{C_2A_2})'=\frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}=\overrightarrow{C_2B_2}\Rightarrow C_2A_2=$ $=C_2B_2$ és $C_2A_2\perp C_2B_2\Rightarrow A_2B_2C_2\triangle$ egyenlő szárú és derékszögű.

2394.

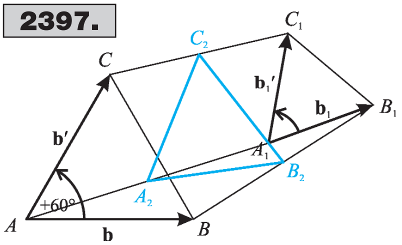


2394. A 2393. feladat megoldásmenete teljes egészében megismételhető, csak a $+90°$-os elforgatás képe helyett az

2396.



2397.



α irányított szögű elforgatás képét jelöljük ′-vel. $(\overrightarrow{C_2A_2})' = \overrightarrow{C_2B_2} \Rightarrow C_2A_2 = C_2B_2$ és $A_2C_2B_2\sphericalangle = \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow C_2A_2B_2\triangle \sim CAB\triangle$.

2395. Legyen $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OA'} = \mathbf{a}'$; $\overrightarrow{OA''} = \mathbf{a}''$. Az $\mathbf{a}''$ az $\mathbf{a}$ vektor $+120°$-os elforgatottja, így $OAA'\triangle$-ben az $\overrightarrow{AA'}$-ral helyettesíthető. A vektorok különbségére tanult ábrázolásból következik, hogy $\mathbf{a}'' = \mathbf{a}' - \mathbf{a}$.

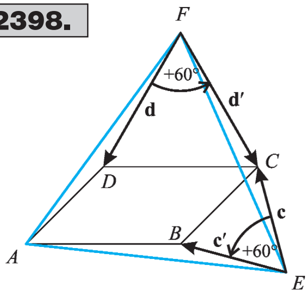
2396. Legyenek az A, B, C, B_1, C_1, B_2, C_2 pontokba mutató helyvektorok rendre $\vec{A}$, $\vec{B}$, ..., $\vec{C}_2$. Jelölje a $+60°$-os elforgatás képét ′. $\vec{C}_2 = \frac{\vec{C} + \vec{C}_1}{2}$; $\vec{B}_2 = \frac{\vec{B} + \vec{B}_1}{2}$. $\overrightarrow{AB_2} =$ $= \vec{B}_2 - \vec{A} = \frac{\vec{B} + \vec{B}_1}{2} - \vec{A} = \frac{\vec{B}_1 - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} = \frac{\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}}{2}$;

$\overrightarrow{AC_2} = \vec{C}_2 - \vec{A} = \frac{\vec{C} + \vec{C}_1}{2} - \vec{A} = \frac{\vec{C}_1 - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2} = \frac{\mathbf{b}_1' - \mathbf{b}'}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB_2})' = \frac{\mathbf{b}_1' - \mathbf{b}'}{2} = \overrightarrow{AC_2}$.

A fentiekből következik, hogy $AC_2 = AB_2$ és $B_2AC_2\sphericalangle = 60° \Rightarrow AB_2C_2\triangle$ szabályos.

2397. Legyenek az $A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pontokba mutató helyvektorok rendre $\vec{A}$, $\vec{B}$, ..., $\vec{C}_2$. Jelölje a $+60°$-os elforgatás képét ′. $\vec{C}_2 = \frac{\vec{C} + \vec{C}_1}{2}$; $\vec{A}_2 = \frac{\vec{A} + \vec{A}_1}{2}$; $\vec{B}_2 = \frac{\vec{B} + \vec{B}_1}{2}$.

2398.



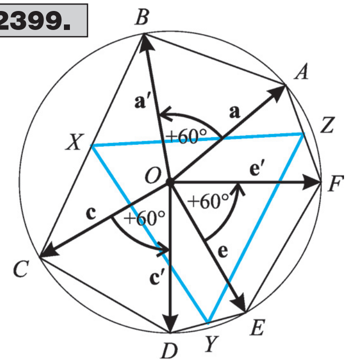
$$\overrightarrow{A_2B_2} = \vec{B}_2 - \vec{A}_2 = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{B}_1 - \vec{A}_1}{2} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}_1}{2};$$

$$\overrightarrow{A_2C_2} = \vec{C}_2 - \vec{A}_2 = \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{C}_1 - \vec{A}_1}{2} = \frac{\mathbf{b}' + \mathbf{b}_1'}{2};$$

$(\overrightarrow{A_2B_2})' = \frac{\mathbf{b}' + \mathbf{b}_1'}{2} = \overrightarrow{A_2C_2}$. A fentiekből következik, hogy $A_2C_2 = A_2B_2$ és $B_2A_2C_2\sphericalangle = 60° \Rightarrow A_2B_2C_2\triangle$ szabályos.

2398. Legyen $\overrightarrow{FD} = \mathbf{d}$, $\overrightarrow{EC} = \mathbf{c}$ és jelölje a $+60°$-os elforgatás képét ′. $\overrightarrow{EF} = \mathbf{c} - \mathbf{d}'$; $\overrightarrow{EA} = \ = \mathbf{c}' + \mathbf{d} - \mathbf{d}'$; $(\overrightarrow{EF})' = \mathbf{c}' - \mathbf{d}''$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{d}'' = \mathbf{d}' - \mathbf{d}$. $\Rightarrow (\overrightarrow{EF})' = \mathbf{c}' - (\mathbf{d}' - \mathbf{d}) = \mathbf{c}' - \mathbf{d}' + \mathbf{d} =$ $= \overrightarrow{EA} \Rightarrow EA = EF$ és $FEA\sphericalangle = 60° \Rightarrow FEA\triangle$ szabályos.

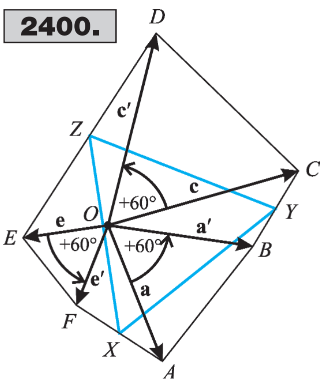
2399.



2399. $CD = r$ és $OC = r$ és $OD = r$, ezért $CDO\triangle$ szabályos. $\Rightarrow COD\sphericalangle = 60°$. Hasonlóan megmutatható, hogy $EOF\sphericalangle = 60°$ és $AOB\sphericalangle = 60°$. Legyen $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e}$ és $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és jelölje a $+60°$-os elforgatás képét ′. $\vec{X} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a}'}{2}$; $\vec{Y} = \frac{\mathbf{e} + \mathbf{c}'}{2}$; $\vec{Z} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{e}'}{2}$. $\overrightarrow{YZ} = \vec{Z} - \vec{Y} =$

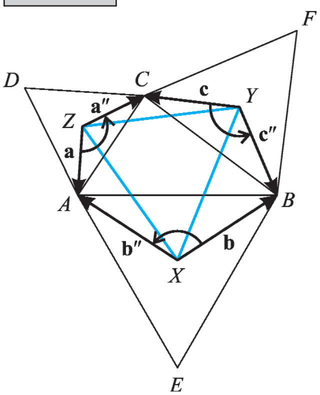
$= \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{e}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'}{2}$; $\overrightarrow{YX} = \vec{X} - \vec{Y} = \dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{a}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'}{2}$; $(\overrightarrow{YZ})' = \dfrac{\mathbf{a}'+\mathbf{e}''-\mathbf{e}'-\mathbf{c}''}{2}$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}' - \mathbf{e}$ és $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$, így $(\overrightarrow{YZ})' = \dfrac{\mathbf{a}'+\mathbf{e}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'+\mathbf{c}-\mathbf{e}'}{2} = \dfrac{\mathbf{a}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'+\mathbf{c}}{2} = \overrightarrow{YX} \Rightarrow YX = YZ$ és $ZYX\sphericalangle = 60°$, ezért $XYZ\triangle$ szabályos.

2400.



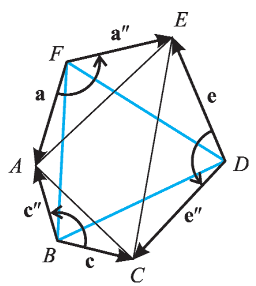
2400. Legyen $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e}$ és $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és jelölje a $+60°$-os elforgatás képét $'$. Szabályos háromszögekről lévén szó $\overrightarrow{OD} = \mathbf{c}'$, $\overrightarrow{OF} = \mathbf{e}'$ és $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a}'$. $\vec{Y} = \dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{a}'}{2}$; $\vec{Z} = \dfrac{\mathbf{e}+\mathbf{c}'}{2}$; $\vec{X} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{e}'}{2}$. $\overrightarrow{ZX} = \vec{X} - \vec{Z} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{e}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'}{2}$; $\overrightarrow{ZY} = \vec{Y} - \vec{Z} = \dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{a}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'}{2}$; $(\overrightarrow{ZX})' = \dfrac{\mathbf{a}'+\mathbf{e}''-\mathbf{e}'-\mathbf{c}''}{2}$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}' - \mathbf{e}$ és $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$, így $(\overrightarrow{ZX})' = \dfrac{\mathbf{a}'+\mathbf{e}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'+\mathbf{c}-\mathbf{e}'}{2} = \dfrac{\mathbf{a}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'+\mathbf{c}}{2} = \overrightarrow{ZY} \Rightarrow ZX = ZY$ és $XZY\sphericalangle = 60°$, ezért $XYZ\triangle$ szabályos.

2401.



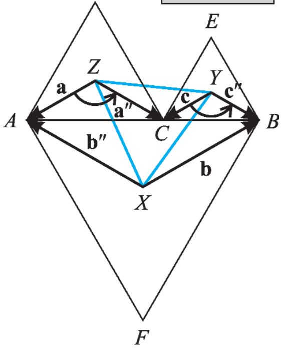
2401. Legyenek a szabályos háromszögek középpontjai X, Y és Z. Legyen $\overrightarrow{YC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{XB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{ZA} = \mathbf{a}$. Jelölje a $+60°$-os elforgatás képét $'$, a $+120°$-os elforgatás képét $''$. Felhasználva, hogy $BXA\sphericalangle = CYB\sphericalangle = AZC\sphericalangle = +120°$: $\overrightarrow{YB} = \mathbf{c}''$, $\overrightarrow{XA} = \mathbf{b}''$ $\overrightarrow{ZC} = \mathbf{a}''$. $\overrightarrow{XY} = \mathbf{b} - \mathbf{c}''$; $\overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a}$; $(\overrightarrow{XY})' = \mathbf{b}' - (\mathbf{c}'')' = \mathbf{b}' - (-\mathbf{c}) = \mathbf{b}' + \mathbf{c}$. X-ből kiindulva vegyük sorra az egymásba fűzött vektorokat. $\mathbf{b} - \mathbf{c}'' + \mathbf{c} - \mathbf{a}'' + \mathbf{a} - \mathbf{b}'' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}'' + \mathbf{b}'' + \mathbf{c}'' \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a} = \mathbf{b}'' + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}' - \mathbf{b}$, így $\overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}' - \mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{b}' + \mathbf{c} = (\overrightarrow{XY})' \Rightarrow XZ = XY$ és $YXZ\sphericalangle = 60°$, ezért $XYZ\triangle$ szabályos.

2402.



2402. Legyen $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DE} = \mathbf{e}$ és $\overrightarrow{FA} = \mathbf{a}$ és jelölje a $+60°$-os elforgatás képét $'$, a $+120°$-os elforgatás képét $''$. Felhasználva, hogy $CBA\sphericalangle = EDC\sphericalangle = AFE\sphericalangle = +120°$; $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}''$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{e}''$ és $\overrightarrow{FE} = \mathbf{a}''$. $\overrightarrow{BD} = \mathbf{c} - \mathbf{e}''$; $\overrightarrow{BF} = \mathbf{c}'' - a$; $(\overrightarrow{BD})' = \mathbf{c}' - (\mathbf{e}'')' = \mathbf{c}' - (-\mathbf{e}) = \mathbf{c}' + \mathbf{e}$. B-ből kiindulva vegyük sorra az egymásba fűzött vektorokat. $\mathbf{c} - \mathbf{e}'' + \mathbf{e} - \mathbf{a}'' + \mathbf{a} - \mathbf{c}'' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{e} = \mathbf{a}'' + \mathbf{c}'' + \mathbf{e}'' \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{e} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{e} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \mathbf{c}'' - \mathbf{a} = \mathbf{c}'' + \mathbf{c} + \mathbf{e}$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$, így $BF = \mathbf{c}' - \mathbf{c} + \mathbf{c} + \mathbf{e} = \mathbf{c}' + \mathbf{e} = (\overrightarrow{BD})' \Rightarrow BF = BD$ és $DBF\sphericalangle = 60°$, ezért $BDF\triangle$ szabályos.

2403.



2403. Legyenek a szabályos háromszögek középpontjai X, Y és Z. Legyen $\overrightarrow{YC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{XB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{ZA} = \mathbf{a}$, és jelölje a + 60°-os elforgatás képét ′, a +120°-os elforgatás képét ″. Felhasználva, hogy $BXA\sphericalangle = CYB\sphericalangle = AZC\sphericalangle = +120°$; $\overrightarrow{YB} = \mathbf{c}''$, $\overrightarrow{XA} = \mathbf{b}''$ és $\overrightarrow{ZC} = \mathbf{a}''$.
$\overrightarrow{XY} = \mathbf{b} - \mathbf{c}''$; $\overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a}$; $(\overrightarrow{XY})' = \mathbf{b}' - (\mathbf{c}'')' = \mathbf{b}' - (-\mathbf{c}) = \mathbf{b}' + \mathbf{c}$.
X-ből kiindulva vegyük sorra az egymásba fűzött vektorokat.
$\mathbf{b} - \mathbf{c}'' + \mathbf{c} - \mathbf{a}'' + \mathbf{a} - \mathbf{b}'' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}'' + \mathbf{b}'' + \mathbf{c}'' \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a} = \mathbf{b}'' + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}' - \mathbf{b}$, így $\overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}' - \mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{b}' + \mathbf{c} = (\overrightarrow{XY})' \Rightarrow XZ = XY$ és $YXZ\sphericalangle = 60°$, ezért $XYZ\triangle$ szabályos.

Műveletek koordinátákkal megadott vektorokkal

2404. Legyen a kezdőpont az origó. Alkalmazzuk a $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ képletet, ahol v_1 és v_2 a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái. Ekkor $|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{34}$; $|\mathbf{c}| = \sqrt{73}$; $|\mathbf{d}| = 4$; $|\mathbf{e}| = \sqrt{153}$; $|\mathbf{f}| = \dfrac{\sqrt{2404}}{15}$; $|\mathbf{g}| = \sqrt{10}$; $|\mathbf{h}| = \sqrt{12 - \sqrt{5} + 4{,}5\sqrt{2}}$. Ha a vektorok kezdőpontja az (5; 5) koordinátájú pont, a vektorok abszolútértéke nem változik. Ekkor például az **a** vektor kezdőpontja az (5; 5), végpontja a (9; 11) koordinátájú pont.
$|\mathbf{a}| = \sqrt{(9-5)^2 + (11-5)^2} = 2\sqrt{13}$. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{c} = -8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{d} = -4\mathbf{j}$; $\mathbf{e} = 12\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{f} = \dfrac{2}{3}\mathbf{i} - 3{,}2\mathbf{j}$; $\mathbf{g} = -\sqrt{2}\,\mathbf{i} - \sqrt{8}\,\mathbf{j}$; $\mathbf{h} = \dfrac{\sqrt{20} - 1}{2}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{18} + 3}{2}\mathbf{j}$.

2405. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Alkalmazzuk a $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ képletet, ahol v_1, v_2, v_3, a **v** vektor koordinátái. Ekkor $|\mathbf{a}| = 3\sqrt{5}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{29}$; $|\mathbf{c}| = \sqrt{109}$; $|\mathbf{d}| = 5\sqrt{17}$.

2406. A feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

2407. Az $\mathbf{m} = (a; b)$; $\mathbf{n} = (b; a)$ helyvektorok egymás tükörképei az $y = x$ egyenletű (az origón átmenő és az első és a harmadik siknegyedet felező) egyenesre.

2408. *a)* (3; −4) és így tovább; *b)* (−3; 4) és így tovább; *c)* (−3; −4); (4; −2); (−4; 5); (−5; 0); (0; 3); $(-p; -q)$; *d)* (4; 3); (2; −4); (−5; 4); (0; 5); (−3; 0); $(q; p)$; *e)* (−4; −3); (−2; 4); (5; −4); (0; −5); (3; 0); $(-q; -p)$.

2409. $C_1(5; 6)$, $C_2(-5; 6)$, $C_3(-5; -6)$, $C_4(5; -6)$. Pitagorasz tételét alkalmazva $m^2 = 8^2 - 6^2 = 28$, $m = 2\sqrt{7}$. A megoldás: $C_1\left(6; 2\sqrt{7}\right)$, $C_2\left(-6; 2\sqrt{7}\right)$, $C_3\left(-6; -2\sqrt{7}\right)$, $C_4\left(6; -2\sqrt{7}\right)$.

2410. *a)* $AC = a\sqrt{2}$, így $A\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $B\left(0; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $D\left(0; -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$;

b) $A\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}\right)$, $C\left(-\dfrac{a}{2}; -\dfrac{a}{2}\right)$, $D\left(\dfrac{a}{2}; -\dfrac{a}{2}\right)$.

2411. $\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$.

2412. *a)* A szabályos hatszög tulajdonságai miatt ABO háromszög szabályos. Pitagorasz tételéből: $m^2 = 4^2 - 2^2 = 12$, $m = 2\sqrt{3}$. A csúcspontok: $A(4; 0)$, $B(2; 2\sqrt{3})$, $C(-2; 2\sqrt{3})$, $D(-4; 0)$, $E(-2; -2\sqrt{3})$, $F(2; -2\sqrt{3})$, illetve
$A(2a; 0)$, $B(a; a\sqrt{3})$, $C(-a; a\sqrt{3})$, $D(-2a; 0)$, $E(-a; -a\sqrt{3})$, $F(a; -a\sqrt{3})$.
b) $(0; 4)$, $(2\sqrt{3}; 2)$, $(2\sqrt{3}; -2)$, $(0; -4)$, $(-2\sqrt{3}; -2)$, $(-2\sqrt{3}; 2)$, illetve $(0; 2a)$, $(-a\sqrt{3}; a)$, $(-a\sqrt{3}; -a)$, $(0; -2a)$, $(a\sqrt{3}; -a)$, $(a\sqrt{3}; a)$.

2413. 233. ábra

2414. *a)* $a'(-3; -2)$, $a''(3; -2)$; *e)* $e'(-b; a)$, $e''(b; -a)$; *f)* $f'(-\cos\alpha; \sin\alpha)$, $f''(\cos\alpha; -\sin\alpha)$.

2415. 1. $(-1; 7)$. 2. $(5; 10)$. 3. $(10; -7)$. 4. $-2\mathbf{b}(8; -4)$, $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}(11; 1)$. 5. $\frac{1}{2}\mathbf{a}\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $\frac{2}{3}\mathbf{b}\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$, $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}\left(-\frac{7}{6}; \frac{23}{6}\right)$. 6. $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$. 7. $\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

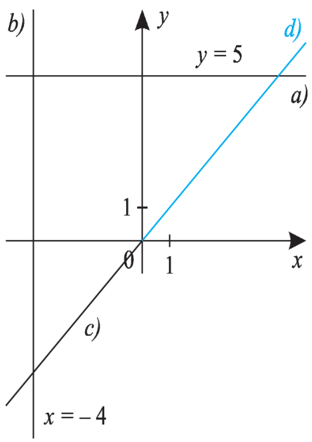
2416. $\overrightarrow{AB}(-2; 7)$, $\overrightarrow{BC}(-8; -1)$, $\overrightarrow{CA}(10; -6)$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{89}$, $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{104}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-2; 7) + (-8; -1) + (10; -6) = (0; 0) = \mathbf{0}$;
$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}| = 26{,}9$.

2417. $\overrightarrow{AB}(-8; 4)$, $\overrightarrow{BC}(-4; -11)$, $\overrightarrow{CA}(12; 7)$, $\overrightarrow{DA}(5; 16)$.

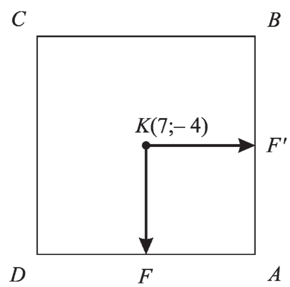
2418. $\overrightarrow{KF'}(-4; -10)$, $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KF'}$, $\overrightarrow{KA}(-14; -6)$. Legyen 0 az origó. Ekkor $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{OA}(-7; -10)$, $A(-7; -10)$. $-\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KC}(14; 6)$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{OC}(21; 2)$, $C(21; 2)$. $\overrightarrow{KB}(6; -14)$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{OB}(13; -18)$, $B(13; -18)$, $-\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KD}$, ebből $D(1; 10)$.

2419. $\overrightarrow{AB}(2; 5)$, $\overrightarrow{DC}(2; 5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ paralelogramma;
$\overrightarrow{AD}(5; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow ABCD$ négyzet.

2413.



2418.



2420. $|\mathbf{a}| = \sqrt{73}$; $\mathbf{a}^0\left(\frac{8}{\sqrt{73}}; \frac{3}{\sqrt{73}}\right)$; $|\mathbf{b}| = 2\sqrt{10}$; $\mathbf{b}^0\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; $|\mathbf{c}| = \sqrt{106}$; $\mathbf{c}^0\left(\frac{5}{\sqrt{106}}; -\frac{9}{\sqrt{106}}\right)$; $|\mathbf{d}| = \sqrt{58}$; $\mathbf{d}^0\left(-\frac{7}{\sqrt{58}}; -\frac{3}{\sqrt{58}}\right)$.

III

2421. Az A, B, C, D, K pontokhoz vezessenek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{k}$ helyvektorok. Ekkor $\overrightarrow{KA} = \mathbf{a} - \mathbf{k}(-4; -2)$, $\overrightarrow{KC}(4; 2)$. $\mathbf{c} = \overrightarrow{KC} + \mathbf{k}$. Innen $\mathbf{c}(5; 11)$, $C(5; 11)$. $\overrightarrow{KB}$ a $\overrightarrow{KA}$ 90°-os elforgatottjának $\frac{1}{2}$-szerese, tehát $\overrightarrow{KB}(1; -2)$. $\mathbf{b} = \mathbf{k} + \overrightarrow{KB} \Rightarrow \mathbf{b}(2; 7)$, $B(2; 7)$. $\overrightarrow{KD}(-1; 2)$, $\mathbf{d}(0; 11)$, $D(0; 11)$.

2422. $a = -\dfrac{2\sin\frac{39+13}{2}\cdot\cos\frac{39-13}{2}}{\sin 26°\cdot\cos 13°} = -2$; $b = \sqrt{10^2\cdot 10^{\lg 25}} = \sqrt{10^2\cdot 25} = 50$;
$c = (\sqrt{5}+2)^3 - (\sqrt{5}-2)^3$, mert $(\sqrt{5}+2)\cdot(\sqrt{5}-2) = 1$.
$c = 4[(\sqrt{5}+2)^2 + (\sqrt{5}-2)\ (\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}-2)^2] = 4\cdot 19 = 76$.
$\overrightarrow{AB}(2; 52)$, $\overrightarrow{BC}(1; 26)$. Mivel $\overrightarrow{AB} = 2\cdot\overrightarrow{BC}$, ezért a 3 pont egy egyenesre illeszkedik.

2423. $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{29}$.

2424. *a)* $|\mathbf{a}| = \sqrt{42}$, $\mathbf{a}^0\left(\frac{1}{\sqrt{42}}; \frac{4}{\sqrt{42}}; \frac{5}{\sqrt{42}}\right)$, *b)* $\mathbf{a}^0\left(-\frac{3}{\sqrt{29}}; -\frac{2}{\sqrt{29}}; -\frac{4}{\sqrt{29}}\right)$,
c) $\mathbf{a}^0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Két vektor skaláris szorzata

2425. Az oldalhossz négyzetének a $\frac{3}{2}$-szerese.

2426. 43,5. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha$ és $\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{bc}\cdot\cos\alpha = \mathbf{a}^2 \Rightarrow |\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2}{2}$.

2427. Bontsuk fel **a**-t a **b**-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. A **b**-vel párhuzamos összetevő $-k\mathbf{b}$.

2428. $\cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \cos\alpha = \dfrac{19\sqrt{43}}{215}$. $(3\mathbf{a} - 5\mathbf{b})(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$ és $(\mathbf{a} + 4\mathbf{b})(-\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6a^2 - 7ab\cos\alpha - 5b^2 = 0$ és $-a^2 - 3ab\cos\alpha + 4b^2 = 0 \Rightarrow 6\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right)\cos\alpha - 5 = 0$ és
$-\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right)\cos\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\sqrt{43}}{5}$; $\cos\alpha = \frac{19\sqrt{43}}{215}$.

2429. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 4\cdot 5\cdot\cos 40° = 15{,}32$.

2430. *a)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 24 + 24 = 48$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{16+9} = 5$; $|\mathbf{b}| = 10$; $48 = 5\cdot 10\cdot\cos(\mathbf{a};\mathbf{b}) \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos(\mathbf{a};\mathbf{b}) = 0{,}96 \Rightarrow (\mathbf{a};\mathbf{b})\sphericalangle = 16{,}26°$. *b)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -7$, $(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle = 105{,}1°$. *c)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 48$, $(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle = 67{,}2°$. *d)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1$, $(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle = 88{,}9°$.

2431. *a)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -1 + 6 - 35 = -30$; *b)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 11$; *c)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 27$; *d)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sqrt{6} - 58$.

2432. *a)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2 + 15 - 28 = -15$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$,
$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\dfrac{15}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{59}} = -0{,}2911$, $(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle = 106{,}9°$. *b)* $30{,}8°$; *c)* $122{,}7°$.

2433. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -6\cdot 12 + 4y = 0 \Rightarrow y = 18$.

2434. $\overrightarrow{AC}(10;-5)$, $\overrightarrow{AB}(6;75)$, $\overrightarrow{AB} - k\cdot\overrightarrow{AC}(6-10k; 7+5k)$, $\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB} - k\cdot\overrightarrow{AC}) =$ $= 10(6-10k) - 5(7+5k) = 0$, $12 - 20k - 7 - 5k = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{5}$.

2435. $\overrightarrow{CA}(9;\ 3)$, $\overrightarrow{CB}(2;\ -6)$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$.

2436. $\overrightarrow{AB}(10;\ 12)$, $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}(5;\ 6)$ 90°-os elforgatottja $\overrightarrow{AD_1}(-6;\ 6)$, illetve $\overrightarrow{AD_2}(6;\ -5)$, $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{OD_1}(-8;\ 9)$, $\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD_2}$, $\overrightarrow{OD_2}(4;\ -1)$. $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{AD_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{OC_1}(2;\ 21)$, $\overrightarrow{OC_2}(14;\ 11)$. $C_1(2;\ 21)$, $D_1(-8;\ 9)$, illetve $C_1(14;\ 11)$, $D_2(4;\ -1)$.

2437. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -10 - 2 - 3z = 0 \Rightarrow z = -4$.

2438. $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = p^2 + (p+1)^2 + p^2(p+1)^2 = p^2 + (p+1)^2(1+p^2) \Rightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$.
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -p^2(p+1) - p(p+1) + (p+1)^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -p(p+1) + p(p+1)^2 - p^2(p+1) = 0 \Rightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{c}$.

2439. *a)* $\overrightarrow{AB}(3;\ 5)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34}$, $\overrightarrow{AC}(5;\ 1)$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{26}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 15 + 5 = 20$.
$20 = \sqrt{34}\cdot\sqrt{26}\cdot\cos\alpha \Rightarrow \alpha = 47{,}7°$. Hasonlóan kiszámítható a $\beta = 57{,}5°$, $\gamma = 74{,}8°$.
b) $\overrightarrow{BA}(-2;\ -1)$, $\overrightarrow{BC}(1;\ -2)$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \gamma = 90°$. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5} \Rightarrow \alpha = \beta = 45°$;
c) $101{,}9°$, $48{,}2°$, $29{,}9°$; *d)* $81{,}9°$, $74{,}1°$, $24°$.

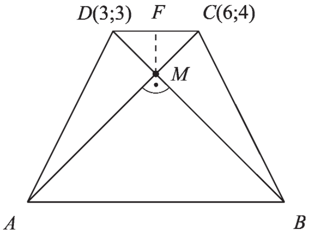
2440. $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{17}$, $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{38}$, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{19}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 1$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA} = 18$.
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{BA}|} = \frac{18}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{38}} = 0{,}7082 \Rightarrow \alpha = 44{,}9°. \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{19}} =$$
$= -0{,}0556 \Rightarrow \gamma = 93{,}2°$, $\beta = 41{,}9°$.

2441. Legyen $\mathbf{x}(a;\ b;\ c)$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = 5a - b + 2c = 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{x} = -2a + 3b + c = 0$.
$$\left.\begin{aligned}-b + 2c &= -5a\\ 3b + c &= 2a\end{aligned}\right\} \Rightarrow c = -\frac{13}{7}a,\quad b = \frac{9}{7}a.\quad \mathbf{x}\left(a;\ \frac{9}{7}a;\ -\frac{13}{7}a\right),$$ illetve $\mathbf{x}(7a;\ 9a;\ -13a)$, ahol $a\in\mathbf{R}$.

2442. Legyen $\mathbf{e}(a;\ b)$, $\mathbf{f}(c;\ d)$, $|\mathbf{e}| = \sqrt{a^2+b^2}$; $|\mathbf{f}| = \sqrt{c^2+d^2}$. $\mathbf{e}\cdot\mathbf{f} = ac + db$.
$\mathbf{e}\cdot\mathbf{f} = |\mathbf{e}|\cdot|\mathbf{f}|\cdot\cos(e, f) \le |\mathbf{e}|\cdot|\mathbf{f}|$, behelyettesítve: $ac + bd \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

III

2443.



2443. $ABM\triangle \sim CDM\triangle$ egyenlő szárú derékszögű háromszögek. $F\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$. $\overrightarrow{FC}\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ 90°-os elforgatottjai $\overrightarrow{FM_1}\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{FM_2}\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Ha 0 az origó, $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM_1}$, illetve $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM_2}$. Innen $M_1(5; 2)$, $M_2(4; 5)$. $\overrightarrow{M_1C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_1}$ $\overrightarrow{M_1C}(1; 2)$, $-3\overrightarrow{M_1C} = \overrightarrow{M_1A}(-3; -6)$; $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1A}$, $\overrightarrow{OA}(2; -4)$, $A_1(2; -4)$, $\overrightarrow{OB_1}(11; -1)$, $B_1(11; -1)$. Hasonlóan M_2-ből $A_2(-2; 8)$, $B_2(7; 11)$.

2444. $|\mathbf{a}| = 10$, $\mathbf{a}^0\left(\frac{8}{10}; \frac{6}{10}\right)$, $|\mathbf{a}^0| = 1$. Ha $\mathbf{a}^0$ irányszöge α, akkor $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Legyen $|\mathbf{e}| = 1$, irányszöge: $(\alpha \pm 60°)$. $\sin\varphi = \sin(\alpha \pm 60°) = \sin\alpha \cdot \cos 60° \pm \cos\alpha \cdot \sin 60° = \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{10}$, $\cos\varphi = \frac{4 \pm 3\sqrt{3}}{10}$. $\mathbf{e}\left(\frac{4 \pm 3\sqrt{3}}{10}; \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}\right)$. $\mathbf{b} = k\mathbf{e}$, ahol $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

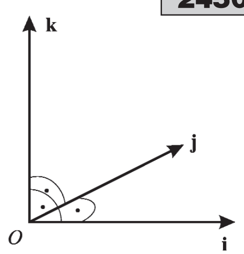
2445. $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, $\left.\begin{array}{l} 6 = 4\alpha + 2\beta \\ 4 = \alpha + 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. $\alpha\mathbf{a}\left(\frac{16}{3}; \frac{4}{3}\right)$, $\beta\mathbf{b}\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$, $\mathbf{v} = \frac{4}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$.

2446. $\mathbf{v} = -\frac{4}{3}\mathbf{a} + \frac{5}{6}\mathbf{b}$. **2447.** $\mathbf{v} = \frac{6}{5}\mathbf{a} + \frac{8}{5}\mathbf{b}$.

2448. Legyen $\mathbf{e}(\cos\alpha; \sin\alpha)$ a szögfelezőre illeszkedő egységvektor. $(\mathbf{a}, \mathbf{e})\sphericalangle = (\mathbf{b}, \mathbf{e})\sphericalangle = \varphi$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{e}|\cdot\cos\varphi$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{e} = |\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{e}|\cdot\cos\varphi$. Ezekből $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{a}|\cdot 1} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{b}|\cdot 1}$, ahol $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 13$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e} = 3\cos\alpha + 4\sin\alpha$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{e} = 5\cos\alpha + 12\sin\alpha$, $\frac{3\cos\alpha + 4\sin\alpha}{5} = \frac{5\cos\alpha + 12\sin\alpha}{13} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{7}{4}$. $\mathbf{e} \parallel \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}(4; 7)$. A $k\cdot\mathbf{v}$ is kielégíti a feladat feltételeit, ahol $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Két vektor vektoriális szorzata

2450.



2449. A vektoriális szorzat definíciója szerint $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin|(\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle|$. Ez a pozitív valós szám annak a paralelogrammának a területe, amelynek oldalai $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$ hosszúságúak és a hajlásszögük $\alpha = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle$.

2450. Alkalmazzuk a vektoriális szorzat definícióját és tekintsük az 2450. ábra jobbrendszerét. Ekkor az ábráról leolvashatjuk a feladat állításainak helyességét!

2451. $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1\mathbf{i} + \mathbf{a}_2\mathbf{j} + \mathbf{a}_3\mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1\mathbf{i} + \mathbf{b}_2\mathbf{j} + \mathbf{b}_3\mathbf{k}$. A szorzás elvégzésekor az $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ vektoriális szorzás két (bizonyítható) tulajdonságát használjuk fel.

a) A vektoriális szorzatot úgy szorozhatjuk meg egy számmal, hogy egyik tényezőjét szorozzuk! $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{d})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})$. (Ebből következik, hogy (-1) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{a})$.
b) A vektoriális szorzás disztributív tulajdonságú, azaz például $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c} + + \mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{b}\times\mathbf{d}$. Ekkor $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) = (a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1 - - a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_3)\mathbf{k}$, mert $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$, továbbá $\mathbf{j}\times\mathbf{i}-\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$.

2452. *a)* $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = 2(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+4(\mathbf{j}\times\mathbf{i})+2(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+3(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+6(\mathbf{j}\times\mathbf{j}) + + 3(\mathbf{k}\times\mathbf{j})-2(\mathbf{i}\times\mathbf{k})-4(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) - 2(\mathbf{k}\times\mathbf{k}) = -7\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$; $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{49+16+1} = \sqrt{66}$.
b) $-2\mathbf{j}$; $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 2$. *c)* $29\mathbf{i}-22\mathbf{j}-3\mathbf{k}$; $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{1334}$.

2453. *a)* $t_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\sin\varphi$, ahol φ az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektorok által bezárt szög. $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3}$, mert $\overrightarrow{BC}(-1;1;1)$. $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$, $(\overrightarrow{AC}) = \sqrt{3}$.
A φ szög kiszámítható a koszinusztétellel. $3 = 3+4-2\cdot 2\sqrt{3}\cos\varphi$, innen $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ és $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $t_{ABCD} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{8}$ egység. *b)* $\sqrt{424}$.

2454. *a)* $t = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\varphi$, ahol φ az A csúcsnál fekvő szög. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{24}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}$. Ekkor $\cos\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{30}}$, a koszinusztétel alkalmazásával, $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{7}{15}}$; $t = \sqrt{14}$. *b)* $\sqrt{11}$.

2455. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$; $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{b},\mathbf{a})$ és $\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\sin(\mathbf{b},\mathbf{a})$; $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin 0 = \mathbf{0}$.

III