3390. *a)* $a_{\min} = 6$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4}$. Hozzunk közös nevezőre, alakítsuk át a következő alakúra: $a(x) = \frac{4}{4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} + \frac{2}{2\cdot\sin x\cdot\cos x} = \frac{4}{\sin^2 2x} + \frac{2}{\sin 2x}$.
b) $b_{\min} = 2\cdot\sqrt{2}$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4}$. Mivel $b(x) > 0$ a megadott intervallumon, ezért pontosan ott van a minimuma, ahol a négyzetének. $b^2(x) = \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}\right)^2 = \ldots =$
$= \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} + \frac{4}{2\cdot\sin x\cdot\cos x} = 4\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\sin 2x}\right) \geq 8.$

c) $c_{\min} = 2\cdot\sqrt{2} + 2$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4}$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív $\frac{1}{\sin x}$ és $\frac{1}{\cos x}$-re! Kapjuk, hogy $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq$ $\geq \frac{2}{\sqrt{\sin x\cdot\cos x}}$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$. Mutassuk meg, hogy ez $x = \frac{\pi}{4}$-nél teljesül! Tehát $c(x) \geq \frac{2}{\sqrt{\sin x\cdot\cos x}} + \frac{1}{\sin x\cdot\cos x} = \ldots = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} +$ $+\frac{2}{\sin 2x} \geq 2\cdot\sqrt{2} + 2$. *d)* $d_{\min} = 2\cdot\sqrt{2} + 4$, ezt $x = \frac{\pi}{4}$-nél veszi fel. Hasonlóan járhatunk el, mint az előző feladat megoldásánál. *e)* A kifejezés minimuma $2\cdot\sqrt{2} + 2$ és ezt $x = \frac{\pi}{4}$-nél veszi fel. A kifejezést hozzuk a következő alakúra: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$. Alkalmazzuk az első két tagra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, kapjuk hogy $\frac{1}{\cos x} +$ $+\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x\cdot\cos x} \geq 2\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}} + \frac{1}{\sin x\cdot\cos x} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} + \frac{2}{\sin 2x} \geq 2\cdot\sqrt{2} + 2.$

3391. $K_{\max} = \frac{n}{2}$ és ezt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$-nél veszi fel. Alkalmazzuk az $a\cdot b \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ismert és könnyen igazolható egyenlőtlenséget! $\sin x_1\cdot\cos x_2 \leq \frac{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_2}{2}$, $\sin x_2\cdot\cos x_3 \leq$ $\leq \frac{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_3}{2}$, …, $\sin x_{n-1}\cdot\cos x_n \leq \frac{\sin^2 x_{n-1} + \cos^2 x_n}{2}$, $\sin x_n\cdot\cos x_1 \leq \frac{\sin^2 x_n + \cos^2 x_1}{2}$.
Adjuk össze ezen egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy:
$K \leq \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1\right) + \left(\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2\right) + \ldots + \left(\sin^2 x_n + \cos^2 x_n\right)\right) =$
$= \frac{1}{2}\cdot(1 + 1 + \ldots + 1) = \frac{n}{2}$.

IV

3392. *a)* $a_{max}=\frac{1}{8}$ és ezt $x=\frac{\pi}{3}$-nál veszi fel. $a(x)=\cos x\cdot\cos x\cdot\left(\frac{3}{2}-2\cdot\cos x\right)$. Alkalmazzuk e három tényezőre a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget!

$\sqrt[3]{\cos x\cdot\cos x\cdot\left(\frac{3}{2}-2\cdot\cos x\right)}\le\frac{\cos x+\cos x+\frac{3}{2}-2\cdot\cos x}{3}$. Ebből következik, hogy $a(x)\le\frac{1}{8}$.

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\cos x=\frac{3}{2}-2\cdot\cos x$. *b)* $b_{max}=\frac{8}{27}$, ezt akkor veszi fel a függvény, amikor $x=\arccos\frac{2}{3}\approx 0{,}8411$. $b(x)=\cos x\cdot\cos x\cdot(2-2\cdot\cos x)$, ezután hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatnál. *c)* $c_{max}=\frac{8}{27}$, és ezt akkor veszi fel, ha $x=\arcsin\frac{2}{3}\approx 0{,}7297$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. A következőkben is *k, l, m, n, p, q, u, v* tetszőleges egész számokat jelentenek.

Trigonometrikus egyenletrendszerek

3393. $x=(k-l)\cdot\frac{\pi}{2};\quad y=(k+l)\cdot\frac{\pi}{2}$.

3394. *a)* $\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi,\\ y_1=\frac{\pi}{2}+l\cdot\pi;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{3\cdot\pi}{2}+m\cdot 2\cdot\pi,\\ y_2=\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi.\end{cases}$ Adjuk össze az egyenletrendszert!

b) $\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi,\\ y_1=l\cdot\pi;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-\frac{\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi,\\ y_2=n\cdot\pi;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=\frac{3\cdot\pi}{4}+p\cdot 2\cdot\pi,\\ y_3=q\cdot\pi;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-\frac{3\cdot\pi}{4}+u\cdot 2\cdot\pi,\\ y_4=v\cdot\pi.\end{cases}$

Adjuk össze az egyenletrendszert!

3395. *a)* $\begin{cases}x_1=k\cdot\pi,\\ y_1=\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=m\cdot\pi,\\ y_2=\frac{3\cdot\pi}{4}+n\cdot\pi;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3\approx 0{,}2527+p\cdot 2\cdot\pi,\\ y_3=\frac{\pi}{2}+q\cdot\pi;\end{cases}$; $\begin{cases}x_4\approx 2{,}8889+u\cdot 2\cdot\pi,\\ y_4=\frac{\pi}{2}+v\cdot\pi.\end{cases}$

b) $\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi,\\ y_1=\frac{\pi}{2}+l\cdot\pi;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{3\cdot\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi,\\ y_2=\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi.\end{cases}$

3396. *a)* $\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\\ y=\frac{\pi}{6}-k\cdot\pi.\end{cases}$ Fejezzük ki a második egyenletből *y*-t és helyettesítsük be az első egyenletbe, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! Használjuk fel a konstans eltüntetésére az $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ azonosságot, majd osszuk el az egyenletet $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla! Kapunk $\operatorname{tg} x$-re egy másodfokú egyenletet. (Mutassuk meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla!)

b) $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} - k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{4} + l \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{2} - l \cdot \pi. \end{cases}$

Hasonlóan járhatunk el, mint az előző feladatban, a végén kis eltéréssel. Ugyanis a végén rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

3397. *a)* $\begin{cases} x = \dfrac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi. \end{cases}$ Hasonlóan kezdhetjük el, mint az előző két feladatot. A továbbiakban az összegzési tétel alkalmazása után $\cos y$-nal osszuk el az egyenletet (ha x-et fejeztük ki korábban)!

b) $\begin{cases} x = \dfrac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{6} - k \cdot \pi. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot \pi. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x = \dfrac{5 \cdot \pi}{60} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} - k \cdot \pi. \end{cases}$

3398. *a)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \\ y_1 = 0 + k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 0 + l \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + l \cdot \pi. \end{cases}$

Fejezzük ki x-et az első egyenletből és helyettesítsük be a második egyenletbe! Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, szorozzunk a nevezővel, rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

b) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{7 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi, \\ y_1 = -\dfrac{5 \cdot \pi}{60} + k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{5 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{4} + l \cdot \pi. \end{cases}$

Hasonlóan kezdhetjük el, mint az előzőeket, itt $\operatorname{tg} y$-ra másodfokú egyenletet kapunk. *c)* Az egyenletrendszernek nincs megoldása a valós számpárok halmazán. Hasonló módszerrel oldhatjuk meg, mint az előzőt. *d)* Az egyenletrendszernek nincs megoldása a valós számpárok halmazán.

3399. $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{2} + m \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$ $(\sin^2 x)^2 + \cos^4 x = \sin^2 y + \cos^2 y = 1.$ Másrészt a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság négyzetre emelése után kaphatjuk, hogy $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$. Így $1 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$. Folytassuk!

IV

3400. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}, \\ y_2 = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}, \\ y_3 = -\dfrac{\pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}, \\ y_4 = \dfrac{5 \cdot \pi}{4} + p \cdot 2 \cdot \pi \end{cases}$

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \ldots = \dfrac{1}{4} \cdot (\sin^2 y + \cos^2 y) = \dfrac{1}{4}.$ Így $\begin{cases} \sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{1}{4}, \\ \sin^3 x = \dfrac{1}{2} \cdot \sin y. \end{cases}$

Használjuk fel, hogy $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ és $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, ezeket beírva az előbbi egyenletrendszer első egyenletébe, majd rendezve az egyenletet, azt kapjuk, hogy $\cos 2x = 0$.

3401. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y_1 = l \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 \approx 1{,}1071 + m \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi. \end{cases}$ Vegyük figyelembe, hogy az első egyenlet a következő alakra hozható: $\sin(x + y) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - (x - y)\right)$.

3402. *a)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{11 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{5 \cdot \pi}{60} + l \cdot \pi. \end{cases}$

Fejezzük ki az első egyenletből x-et, majd ezt helyettesítsük be a második egyenletbe! Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, majd szorozzunk a nevezővel és $\operatorname{tg} y$-ra kapunk egy másodfokú egyenletet.

b) $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{\pi}{12} + k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{17 \cdot \pi}{12} - k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{4} + l \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{19 \cdot \pi}{12} - l \cdot \pi. \end{cases}$

3403. $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{9} + 2 \cdot l \cdot \dfrac{\pi}{3}, \\ y = \dfrac{2 \cdot \pi}{9} + 2 \cdot l \cdot \dfrac{2 \cdot \pi}{3}. \end{cases}$

3404. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5 \cdot \pi + \sqrt{25 \cdot \pi^2 - 16}}{4}, \\ y_1 = \dfrac{5 \cdot \pi - \sqrt{25 \cdot \pi^2 - 16}}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{5 \cdot \pi - \sqrt{25 \cdot \pi^2 - 16}}{4}, \\ y_2 = \dfrac{5 \cdot \pi + \sqrt{25 \cdot \pi^2 - 16}}{4}. \end{cases}$

Az első egyenletből kaphatjuk, hogy $x \cdot y = 1$. A második egyenletet rendezzük át úgy, hogy az 1 magányosan álljon a jobb oldalon! Majd alkalmazzuk a bal oldalra a megfelelő összegzési tételt! Vegyük majd figyelembe a megoldásnál, hogy $x > 0$ és $y > 0$, ezért az összegük is pozitív.

3405. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3\cdot\pi}{4} + k\cdot 2\cdot\pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{6} + l\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{3\cdot\pi}{4} + m\cdot 2\cdot\pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{6} + n\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = \dfrac{3\cdot\pi}{4} + p\cdot 2\cdot\pi, \\ y_3 = \dfrac{5\cdot\pi}{6} + q\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -\dfrac{3\cdot\pi}{4} + u\cdot 2\cdot\pi, \\ y_4 = -\dfrac{5\cdot\pi}{6} + v\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$ A második egyenletből határozzuk meg x-et és ezt helyettesítsük be az első egyenletbe!

IV

3406. $\begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \\ z = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi. \end{cases}$ Fejezzük ki az első egyenletből y-t és helyettesítsük be a második egyenletbe! Szorozzunk a nevezővel és kapunk x-re egy másodfokú egyenletet. Ennek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

3407. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi, \\ y_1 = -\dfrac{\pi}{3} + l\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + m\cdot\pi. \end{cases}$ Használjuk fel, hogy $\cos 2x = 1 - 2\cdot\sin^2 x$ és $\cos 2y = 2\cdot\cos^2\cdot y - 1$. Ezeket behelyettesítve, kapjuk, hogy $\sin^2 x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4}$, ezt alakítsuk szorzattá, majd használjuk fel a másik egyenletet és kapjuk, hogy: $\sin x + \cos y = \dfrac{3}{2}$. Oldjuk meg a $\begin{cases} \sin x - \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x + \cos y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ egyenletrendszert!

3408. $\begin{cases} x_1 = k\cdot 2\cdot\pi, \\ y_1 = k\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{2} + l\cdot 2\cdot\pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{4} + l\cdot\pi. \end{cases}$ Az első egyenletből kapjuk, hogy $x = 2\cdot y$, ezt helyettesítsük be a második egyenletbe és oldjuk meg az egyenletet!

3409. *a)* $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\cdot 2\cdot\pi, \\ y = \dfrac{\pi}{12} - k\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$ A második egyenletet alakítsuk át a következő módon: $2\cdot\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

b) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{6} + k\cdot 2\cdot\pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{2} - k\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \pi + l\cdot 2\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} - l\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$ Fejezzük ki az első egyenletből y-t és helyettesít-

IV

sük be a második egyenletbe, alkalmazzunk egy megfelelő összegzési tételt, majd rendezés után osszuk el az egyenletet $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ -mal!

3410. *a)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2\cdot\pi}{3} + k\cdot 2\pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{5\cdot\pi}{6} + l\cdot 2\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{7\cdot\pi}{6} + l\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$ Hasonló módon is megoldhatjuk, mint az előző feladatot.

b) $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\cdot 2\cdot\pi, \\ y = \dfrac{\pi}{12} + k\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x = \pi + k\cdot 2\cdot\pi, \\ y = \dfrac{2\cdot\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\cdot\pi, \\ y = \dfrac{\pi}{6} - k\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$

3411. *a)* $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + (k+l)\cdot\pi, \\ y = \dfrac{\pi}{6} + (k-l)\cdot\pi. \end{cases}$ Adjuk össze a két egyenletet, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! *b)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + (l-k)\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + (k-l)\cdot\pi. \end{cases}$ Használjuk fel a tangens definícióját! Majd az első egyenletet használjuk fel a második egyenlet átalakításában és kapjuk, hogy: $\cos x\cdot\cos y = \dfrac{1}{4}$.

Ezt adjuk össze először az első egyenlettel, majd másodszor pedig vonjuk ki belőle az első egyenletet, kapjuk a következő egyenletrendszert:

$\begin{cases} \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y = 1 \\ \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, majd oldjuk meg az egyenletrendszert! *c)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5\cdot\pi}{12} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_1 = \dfrac{5\cdot\pi}{60} + (k-l)\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{7\cdot\pi}{12} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{5\cdot\pi}{60} + (k-l)\cdot\pi. \end{cases}$ Először adjuk össze a két egyenletet, majd másodszor vonjuk ki egymásból a két egyenletet! Ekkor egy újabb egyenletrendszert kapunk. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és ekkor ismét újabb egyenletrendszert kapunk, amelyet már könnyen megoldhatunk. *d)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5\cdot\pi}{12} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + (l-k)\cdot\pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{5\cdot\pi}{12} + (k-l)\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = \dfrac{\pi}{3} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_3 = \dfrac{5\cdot\pi}{12} + (k-l)\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = \dfrac{5\cdot\pi}{12} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_4 = -\dfrac{\pi}{3} + (k-l)\cdot\pi. \end{cases}$ Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3412. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -\dfrac{\pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = \dfrac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = -\dfrac{\pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = -\dfrac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$ Az első egyenletet alakítsuk át a következő alakúra a megfelelő azonosság segítségével: $\dfrac{1}{2} \cdot (\cos x + \cos y) = \dfrac{1}{2}$. Fejezzük ki innen például $\cos y$ értékét és helyettesítsük be a második egyenletbe!

3413. *a)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = \dfrac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = -\dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = \dfrac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = -\dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_5 = -\dfrac{\pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_5 = \dfrac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_6 = -\dfrac{\pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_6 = -\dfrac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_7 = \dfrac{4 \cdot \pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_7 = \dfrac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_8 = \dfrac{4 \cdot \pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_8 = -\dfrac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$ Alkalmazzuk a következő azonosságokat: $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$; $\cos 2y = 2 \cdot \cos^2 y - 1$. Ezeket felhasználva az első egyenletből a következőt kapjuk: $\sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{2}$. Oldjuk meg a második egyenletből és az új egyenletből kapott egyenletrendszert! *b)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + (k+m) \cdot \pi, \\ y_1 = -\dfrac{\pi}{12} + (k-m) \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{12} + (k+m) \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{4} + (k-m) \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = \dfrac{7 \cdot \pi}{12} + (p+m) \cdot \pi, \\ y_3 = -\dfrac{5 \cdot \pi}{12} + (p-m) \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = \dfrac{\pi}{4} + (p+m) \cdot \pi, \\ y_4 = \dfrac{7 \cdot \pi}{12} + (p-m) \cdot \pi. \end{cases}$ A második egyenletet a következő alakra hozhatjuk a szinuszok összegének szorzattá alakítására való azonosság segítségével: $2 \cdot \sin \dfrac{2x + 2y}{2} \cdot \cos \dfrac{2x - 2y}{2} = \dfrac{1}{2}$, ebből az első egyenlet felhasználásával kapjuk, hogy: $\cos(x - y) = \dfrac{1}{2}$.

3414. *a)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{4} + (n-m) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{4} + (n+m) \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{5 \cdot \pi}{12} + (n-m) \cdot \pi; \end{cases}$

IV

IV

$\begin{cases} x_3 = \dfrac{17\cdot\pi}{12} + (m+n)\cdot 2\cdot\pi, \\ y_3 = -\dfrac{3\cdot\pi}{4} + (n-m)\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = \dfrac{3\cdot\pi}{4} + (m+n)\cdot 2\cdot\pi, \\ y_4 = -\dfrac{17\cdot\pi}{12} + (n-m)\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$ Mindkét egyenletet alakítsuk át a megfelelő azonosságok segítségével a következő alakúra: $2\cdot\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $2\cdot\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Osszuk el egymással a két új egyenletet és kapjuk, hogy: $\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2} = 2-\sqrt{3}$. *b)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + (n+m)\cdot 2\cdot\pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{6} + (m-n)\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{6} + (m+n)\cdot 2\cdot\pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{3} + (m-n)\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = \dfrac{13\cdot\pi}{6} + (m+p)\cdot 2\cdot\pi, \\ y_3 = \dfrac{\pi}{3} + (m-p)\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = \dfrac{\pi}{3} + (m+p)\cdot 2\cdot\pi, \\ y_4 = \dfrac{13\cdot\pi}{6} + (m-p)\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$

3415. *a)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + (m+n)\cdot\pi, \\ y_1 = \dfrac{5\cdot\pi}{60} + (m-n)\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{5\cdot\pi}{60} + (m+n)\cdot\pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{3} + (m-n)\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = \dfrac{5\cdot\pi}{6} + (m+n)\cdot\pi, \\ y_3 = \dfrac{7\cdot\pi}{12} + (m-n)\cdot\pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = \dfrac{7\cdot\pi}{12} + (m+n)\cdot\pi, \\ y_4 = \dfrac{5\cdot\pi}{6} + (m-n)\cdot\pi. \end{cases}$ Használjuk fel a tangens és a kotangens definícióját! Legyen $a = 2$ és $b = 2\cdot\left(1+\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)$. Ekkor az első egyenletet a következő alakra hozhatjuk: $\sin(x+y) = a\cdot\cos x\cdot\cos y$. Míg a második egyenletet a következő alakra hozhatjuk: $\sin(x+y) = b\cdot\sin x\cdot\sin y$. Ezeket alakítsuk át még a következő módon:

(1) $\sin(x+y) = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\cos(x-y) + \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\cos(x+y)$ és

(2) $\sin(x+y) = \dfrac{1}{2}\cdot b\cdot\cos(x-y) - \dfrac{1}{2}\cdot b\cdot\cos(x+y)$. Az (1) egyenletet szorozzuk b-vel, a (2) egyenletet szorozzuk a-val, majd a kapott első egyenletből vonjuk ki a kapott második egyenletet, kapjuk, hogy: $(b-a)\cdot\sin(x+y) = a\cdot b\cdot\cos(x+y)$, ebből (*)$\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{a\cdot b}{b-a}$. Ha most összeadjuk a b-vel, illetve a-val való szorzás után kapott egyenleteket , akkor azt kapjuk, hogy (**) $(a+b)\cdot\sin(x+y) = a\cdot b\cdot\cos(x-y)$. A (*) és (**) egyenletekből álló egyenletrendszert már könnyebben megoldhatjuk, főleg, ha visszahelyettesítjük a, illetve b értékeit.

b) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + (n+m)\cdot\pi, \\ y_1 = -\dfrac{\pi}{12} + (m+n)\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{5\cdot\pi}{12} + (m+n)\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{4} + (m-n)\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = \dfrac{3\cdot\pi}{4} + (m+n)\cdot\pi, \\ y_3 = \dfrac{5\cdot\pi}{12} + (m-n)\cdot\pi; \end{cases}$

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{11 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_4 = \dfrac{\pi}{4} + (m-n) \cdot \pi. \end{cases}$$

3416. *a)* $\begin{cases} x = \pi + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{2 \cdot \pi}{3} - k \cdot \pi. \end{cases}$ A második egyenletet alakítsuk át a következő alakúra: $\dfrac{1}{2} \cdot \left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right) = \dfrac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)$. *b)* $\begin{cases} x = \dfrac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot \pi, \\ y = -\dfrac{5 \cdot \pi}{60} - k \cdot \pi. \end{cases}$ Alakítsuk át a második egyenletet a következő alakúvá: $\dfrac{1}{2} \cdot \left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) = \dfrac{3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$.

3417. *a)* $\begin{cases} x = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{12} - k \cdot \pi. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4} - k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} - m \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot \pi. \end{cases}$

3418. *a)* $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} - k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{3} + l \cdot \pi, \\ y_2 = -l \cdot \pi. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{12} - k \cdot \pi. \end{cases}$

3419. $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{4} - k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{2} + m \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{4} - m \cdot \pi. \end{cases}$

3420. *a)* $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{12} + k \cdot \pi. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} - k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{3} + m \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{2} - m \cdot \pi. \end{cases}$

3421. *a)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} - k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} - m \cdot \pi. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x = \dfrac{1}{6} + k, \\ y = -\dfrac{1}{6} + k. \end{cases}$

3422. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + (m+k) \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + (m-k) \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + (m+k) \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + (m-k) \cdot \pi. \end{cases}$ Alkalmazzuk a tangens definícióját, ekkor kapjuk a második egyenletből, hogy $4 \cdot \cos x \cdot \cos y = 1$, ha felhasználjuk közben az első egyenletet is. Adjuk össze az új egyenletet az első egyenlettel, kapjuk, hogy $\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = 1$. Ezután a korábban kapott egyenletből most vonjuk le az első egyenletet, kapjuk, hogy: $\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = -\dfrac{1}{2}$.

Majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és a kapott új egyenletrendszert már könynyen megoldhatjuk.

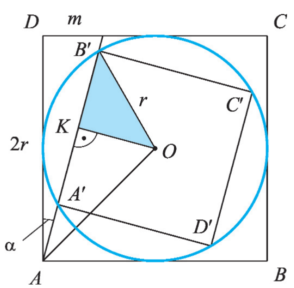
3423. $\begin{array}{l} x = (k - n + m) \cdot \pi \\ y = (n + k - m) \cdot \pi \\ z = (1 + 6 \cdot n - k - m) \cdot \pi \end{array}$. Adjuk össze az első két egyenletet, majd ebből vonjuk le a harmadik egyenletet! Kapjuk, hogy $\sin x + \sin y - \sin z + \sin(x + y + z) = 0$.
$(\sin x + \sin y) + (\sin(x + y + z) - \sin z) = 0$. Alakítsuk szorzattá a zárójeles kifejezéseket:
$2 \cdot \sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \cos \dfrac{x-y}{2} + 2 \cdot \cos \dfrac{x+y+z+z}{2} \cdot \sin \dfrac{x+y+z-z}{2} = 0,$
$\sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \left(\cos \dfrac{x-y}{2} + \cos \dfrac{x+y+2 \cdot z}{2} \right) = 0$. Alakítsuk szorzattá a zárójeles kifejezést! Kis átalakítás után kapjuk, hogy $\sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \cos \dfrac{x+z}{2} \cdot \cos \dfrac{y+z}{2} = 0$. Ebből előbb-utóbb: $x + y = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x + z = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$; $y + z = \pi + n \cdot 2 \cdot \pi$. Oldjuk meg a kapott egyszerű egyenletrendszert!

Néhány nehezebb trigonometriai feladat

3424. $\begin{cases} x = 0 \\ y = l \cdot 2 \cdot \pi \end{cases}$. Gondoljuk meg, hogy $3^x + 3^{-x} \le 2$. Alkalmazzuk a negatív kitevőjű hatvány definícióját, szorozzunk a nevezővel, rendezzük nullára és oldjuk meg a 3^x-re másodfokú egyenlőtlenséget! Vegyük észre, hogy teljes négyzetet alakíthatunk ki: $(3^x - 1)^2 \le 0$, ebből következik, hogy $3^x = 1$, azaz $x = 0$.

3425. A háromszög oldalai 4; 5; 6 egységnyiek, a szögei $\approx 41{,}4°$; $\approx 55{,}8°$; $\approx 82{,}8°$. Legyen az $n - 1$ hosszúságú oldallal szemközti szög x, az $n + 1$ hosszúságú oldallal szemközti szög $2 \cdot x$, ekkor az n hosszúságú oldallal szemközti szög $180° - 3 \cdot x$. A szinusztételt alkalmazva $\dfrac{n+1}{n-1} = \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$, ebből előbb-utóbb $\cos x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n+1}{n-1}$. Alkalmazzuk a koszinusztételt! $(n-1)^2 = n^2 + (n+1)^2 - 2 \cdot n(n+1) \cdot \cos x$. Ebből $\cos x = \dfrac{n+4}{2 \cdot (n+1)}$. Ha összevetjük a $\cos x$-re kapott két egyenletet, akkor azt kaphatjuk a kapott egyenlet megoldása után, hogy $n = 5$.

3426.



3426. Legyen K az $A'B'$ szakasz felezőpontja, $OK = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{OK}{OA} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$, $r = 1$. Ezekből $\alpha = 45° - 30° (= 15°)$. $\dfrac{m}{2 \cdot r} = \operatorname{tg}\alpha$, és így $t = \dfrac{2 \cdot r \cdot m}{2} = 2 \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2 \cdot r^2 \cdot \dfrac{\operatorname{tg}45° - \operatorname{tg}30°}{1 + \operatorname{tg}45° \cdot \operatorname{tg}30°} = \ldots = 2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)$.