IV

Összetettebb feladatok

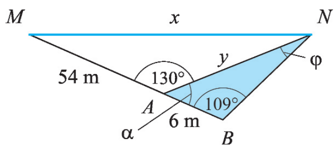
3055. $\approx 6{,}7\ \mathrm{cm}^2$ a három kör közötti síkidom területe. Kössük össze a körök középpontjait, így kapunk egy háromszöget. Legyen $a = 12$ cm, $b = 13$ cm, $c = 15$ cm. Számítsuk ki koszinusztétellel például e háromszög azon szögét, amelynek az 5 cm sugarú kör középpontja a csúcsa. Kapjuk, hogy $\gamma \approx 73{,}62°$. Például szinusztétellel számíthatjuk az α szöget. $\alpha \approx 50{,}13°$. Ebből kapjuk, hogy $\beta \approx 56{,}25°$. Számítsuk ki a háromszög területét! $t_\triangle = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$, ebből $t_\triangle \approx 74{,}83\ \mathrm{cm}^2$. Most számítsuk ki az egyes körcikkek területét, majd vonjuk ki ezeket a háromszög területéből és megkapjuk a keresett síkidom területét. $t_\alpha \approx 27{,}99\ \mathrm{cm}^2$; $t_\beta \approx 24{,}05\ \mathrm{cm}^2$; $t_\gamma \approx 16{,}06\ \mathrm{cm}^2$. Így $t_{\mathrm{idom}} \approx 6{,}7\ \mathrm{cm}^2$.

3056. 16 egység; 12 egység; ≈ 18 egység a háromszög oldalainak a hossza, $\approx 60{,}61°$; $\approx 40{,}81°$ a háromszög ismeretlen szögei. Oldjuk meg a feladatban megadott egyenletrendszert! Ekkor kapjuk, hogy $a = 16$; $b = 12$, illetve fordítva. Írjuk fel a c oldalra a koszinusztételt! Ebből kapjuk, hogy: $c \approx 18$. Írjunk fel egy szinusztételt az a és c oldalra!

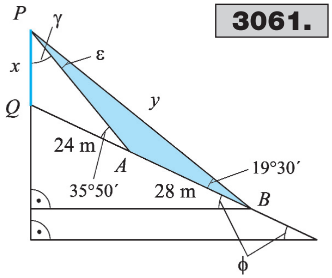
3057. ≈ 109 cm; ≈ 61 cm a háromszög ismeretlen oldalainak a hossza; $\approx 79{,}61°$; $\approx 33{,}4°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $c = 102$ és $\gamma = 66{,}99°$. A háromszög trigonometrikus területképletéből: (1) $a \cdot b \approx 6649$. Írjuk fel a c oldalra a koszinusztételt! (2) $102^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 66{,}99°$. Ha felhasználjuk az előző egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy: (3) $a^2 + b^2 \approx 15\,602$. Oldjuk meg az (1) és (3) egyenletekből álló egyenletrendszert! Ha egy kicsit ravaszabbak vagyunk, akkor megkönnyíthetjük a megoldást, ha észrevesszük, hogy: $(a + b)^2 - 2 \cdot a \cdot b \approx 15\,602$. Ebből $(a + b)^2 \approx 28\,900$, s így (4) $a + b \approx 170$. Az (1) és (4) egyenletekből álló egyenletrendszert már egy kicsit könnyebb megoldani. (Kihasználtuk, hogy a háromszög oldalai pozitív számok.) Kapjuk, hogy $a \approx 109$; $b \approx 61$, illetve fordítva. Alkalmazzuk a szinusztételt a b és c oldalakra! Ebből kapjuk, hogy $\beta \approx 33{,}4°$, ebből pedig $\alpha \approx 79{,}61°$, illetve fordítva.

3058. ≈ 12 cm; ≈ 7 cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 27{,}27°$; $\approx 51{,}75°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $c = 15$ és $\gamma = 100{,}98°$. Ekkor a feltétel szerint (1) $a^2 + b^2 = 193$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! (2) $15^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 100{,}98°$. Felhasználva (1)-et, ebből azt kapjuk, hogy (3) $a \cdot b \approx 84$. Oldjuk meg az (1) és (3) egyenletből álló egyenletrendszert! Kicsit könnyebb a megoldás, ha észrevesszük, hogy $(a + b)^2 - 2 \cdot a \cdot b \approx 193$, azaz $(a + b)^2 \approx 361$, vagyis (4) $a + b \approx 19$. Oldjuk meg inkább a (3) és (4) egyenletből álló egyenletrendszert! Kapjuk, hogy $a \approx 12$; $b \approx 7$, illetve fordítva. Írjunk fel egy szinusztételt az a és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 51{,}75°$, ebből pedig $\beta \approx 27{,}27°$, illetve fordítva.

3060.



3061.



3059. $\approx 5{,}69$ dm; $\approx 3{,}76$ dm; 6,34 dm a háromszög oldalainak a hossza. Az $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$ képlet alapján számíthatjuk a értékét. $a \approx 5{,}69$ dm. A háromszög trigonometrikus területképletéből kapjuk, hogy (1) $b \cdot c \approx 23{,}853$. Írjuk fel a koszinusztételt az a oldalra! Kapjuk, hogy (2) $32{,}376 \approx b^2 + c^2 - b \cdot c \cdot 0{,}916\,68$. Használjuk fel az (1) egyenletet, kapjuk, hogy (3) $b^2 + c^2 \approx 54{,}24$. Oldjuk meg az (1) és (3) egyenletből álló egyenletrendszert! Kapjuk, hogy $b \approx 3{,}76$; $c \approx 6{,}34$, illetve fordítva.

3060. $MN = x \approx 65{,}3$ m a tereppontok távolsága. Számítsuk ki az α szöget: $\alpha = 50°$, majd ebből a φ szöget: $\varphi = 21°$. Alkalmazzuk a szinusztételt az ABN háromszögre! Ebből kapjuk, hogy $\gamma \approx 15{,}83$ m. Alkalmazzuk most a koszinusztételt az MNA háromszögre! Kapjuk, hogy $x \approx 65{,}3$ m.

3061. $x \approx 19{,}7$ m az épület magassága, $\varphi \approx 8°41'$ a lejtő hajlásszöge. Számítsuk ki az ABP háromszög A-nál levő szögét! Majd írjuk fel a szinusztételt az ABP háromszögre! Ebből kaphatjuk, hogy $y \approx 58{,}3$ m. Majd alkalmazzuk a koszinusztételt a PQA háromszögre! Ebből kapjuk, hogy $x \approx 19{,}7$ m. Számítsuk ki a γ szöget, például úgy, hogy szinusztételt írunk fel a PQA háromszögben. Kapjuk, hogy $\gamma \approx 45°29'$. Ebből és a $19°30'$-es szög segítségével kaphatjuk a lejtő hajlásszögét: $\varphi \approx 8°41'$.

3062. $\approx 10{,}72$ cm; $\approx 15{,}72$ cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 60{,}22°$; $\approx 83{,}5°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $c = 18$ cm és $s_c = 10$ cm, $\alpha = 36{,}28°$. Az s_c súlyvonal két részre vágja a γ szöget. Legyen γ_1 azon része γ-nak, amely a b oldal felé esik. Szinusztétellel kiszámíthatjuk ezt a szöget. $\dfrac{\sin\gamma_1}{\sin 36{,}28°} = \dfrac{\frac{c}{2}}{s_c}$. Jelöljük φ-vel azt a szöget, amely az AFC háromszögben az F-nél van, ahol F az AB oldal felezőpontja. Ekkor φ-t könnyen kiszámíthatjuk: $\varphi \approx 111{,}54°$. Írjuk fel a koszinusztételt az AFC háromszögben az $AC = b$ oldalra! Kapjuk, hogy $b \approx 15{,}72$ cm. Írjuk fel most a koszinusztételt a BFC háromszögben a $BC = a$ oldalra! Kapjuk, hogy $a \approx 10{,}72$ cm. Írjuk fel a szinusztételt az ABC háromszögben az a és c oldalakra! Ebből kapjuk, hogy $\gamma \approx 83{,}5°$, ebből pedig $\beta \approx 60{,}22°$.

3063. $\approx 12{,}09$ cm; $\approx 9{,}26$ cm a háromszög ismeretlen oldalai; $\approx 49{,}96°$; $\approx 88{,}63°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $c = 8$ cm, $\gamma = 41{,}41°$, $s_c = 10$ cm. Jelöljük φ-vel a BFC háromszögben F-nél levő szöget, ahol F az AB oldal felezőpontja. Ekkor az AFC háromszögben $180° - \varphi$ szög van az F csúcsnál. Írjuk fel a koszinusztételt a BFC háromszögben a $BC = a$ oldalra, majd az AFC háromszögben az $AC = b$ oldalra! Használjuk fel, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$. Majd adjuk össze a két egyenletet! Kapjuk, hogy $a^2 + b^2 = 2 \cdot s_c^2 + \dfrac{c^2}{2}$, ha behelyettesítjük az ismert adatokat, akkor kapjuk, hogy (1) $a^2 + b^2 = 232$. A következőkben írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögben a c oldalra és helyettesítsük be ide az ismert adatokat, majd használjuk fel az (1) egyenletet, és azt kaphatjuk, hogy (2) $a \cdot b \approx 112$. Oldjuk meg az (1) és (2) egyenletből álló egyenletrendszert! Kicsit könnyebb a megoldás, ha észrevesszük, hogy $(a + b)^2 - 2 \cdot a \cdot b = 232$ és felhasználva (2)-t: (3) $a + b \approx 21{,}35$. Így elég megoldani az (1) és (3) egyenletből álló egyenletrendszert. Azt kapjuk, hogy $a \approx 12{,}09$; $b \approx 9{,}26$, illetve fordítva. Írjuk fel a szinusztételt az ABC háromszögben a b és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\beta \approx 49{,}96°$, ebből pedig $\alpha \approx 88{,}63°$, illetve fordítva.

3064. $\approx 16{,}38$ cm; $\approx 6{,}35$ cm a háromszög ismeretlen oldalai; $\approx 82{,}04°$; $\approx 22{,}58°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $c = 16$ cm, $\gamma = 75{,}38°$, $s_c = 9{,}5$ cm. Az előző feladat megoldásához hasonlóan kaphatjuk, hogy $a^2 + b^2 = 2 \cdot s_c^2 + \dfrac{c^2}{2}$. Ebből pedig (1) $a^2 + b^2 = 308{,}5$. Írjuk fel a koszinusztételt az eredeti háromszögben a c oldalra, ha ide behelyettesítjük az adatokat, akkor kaphatjuk, hogy (2) $a \cdot b \approx 104$. Oldjuk meg az (1) és (2) egyenletből álló egyenletrendszert! Vagy az előző útmutatásban szereplő fogással konstruálunk egyszerűbb egyenletrendszert és azt oldjuk meg. Akár így, akár úgy csináljuk, azt kapjuk, hogy $a \approx 16{,}38$ cm; $b \approx 6{,}35$ cm, illetve fordítva. Írjuk fel a szinusztételt az eredeti háromszögben a b és c oldalra! Kapjuk, hogy $\beta \approx$ $\approx 22{,}58°$, ebből pedig $\alpha \approx 82{,}04°$, illetve fordítva.

3065. $4 \cdot \sqrt{13}$ egység $\approx 14{,}42$ egység a háromszög harmadik oldalának a hossza, $120°$; $\approx 13{,}9°$; $\approx 46{,}1°$ a háromszög szögei. Legyen $AC = b = 4$, $AB = c = 12$, $AE = s_a = 3$. Legyen $CE = x$ és ekkor $BE = a - x$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt! $\dfrac{x}{a - x} = \dfrac{4}{12}$, ebből $a = 4x$, s így $a - x = 3x$. Alkalmazzuk a koszinusztételt az AEC háromszögre, majd az ABE háromszögre! $x^2 = 4^2 + 3^2 -$ $- 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$, $(3x)^2 = 3^2 + 12^2 - 2 \cdot 3 \cdot 12 \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! $x = \sqrt{13}$ és $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$. Ebből $\alpha = 120°$, és $a = 4 \cdot \sqrt{13}$. Szinusztétellel számíthatjuk a β szöget. $\beta \approx$ $\approx 13{,}9°$, ebből $\gamma \approx 46{,}1°$.

IV

3066. $\approx 33{,}06°$; $\approx 54{,}91°$; $\approx 92{,}03°$ a háromszög szögei, $\approx 43{,}97$ cm a háromszög ismeretlen oldala. Legyen $a = 24$, $b = 36$, $f_c = 20$. A szögfelező x, illetve $c - x$ hosszúságú szakaszokra osztja fel a c oldalt. Legyen az x szakasz az a oldal mellett és így a $c - x$ szakasz a b oldal mellett. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt! Kapjuk, hogy $\frac{x}{c-x} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. Írjunk fel két koszinusztételt a két részháromszögre! Kapjuk, hogy $x^2 = f_c^2 + a^2 - 2 \cdot f_c \cdot a \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$ és $(c-x)^2 = f_c^2 + b^2 - 2 \cdot f_c \cdot b \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$. Osszuk el a két egyenletet egymással és alkalmazzuk a szögfelezőtételből kapott összefüggést, ezenkívül helyettesítsük be az adatokat! Ekkor $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20^2 + 24^2 - 2 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{20^2 + 36^2 - 2 \cdot 20 \cdot 36 \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$. Ebből $\cos\frac{\gamma}{2} \approx 0{,}6944$, s így $\gamma \approx 92{,}03°$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt az eredeti háromszögben a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 43{,}97$ cm. Alkalmazzuk most a szinusztételt az eredeti háromszögben az a és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 33{,}06°$, és ebből pedig $\beta \approx 54{,}91°$.

3067. Alakítsuk át a feltételi egyenletet a következő alakúra: $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = 2 \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$. A továbbiakban pedig alkalmazzuk az $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$ összefüggést mindhárom oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} = 2 \cdot \frac{\cos\gamma}{c}$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt mindegyik oldalra! A három felírt koszinusztétel mindegyikéből fejezzük ki a szög koszinuszát és helyettesítsük be az előző egyenletbe! Átalakítások után könnyen kaphatjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

3068. $b^2 + c^2 = 5 \cdot a^2$ összefüggés van az oldalak között. Alkalmazzuk a kotangens definícióját, majd a feltételi egyenletet hozzuk a következő alakúra: $\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \cos\gamma \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$. Alkalmazzuk itt a szinusztételt majd a koszinusztételt háromszor.
$\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{a}{c}$. Ezt pedig addig alakítsuk, amíg azt nem kapjuk, hogy $b^2 + c^2 = 5 \cdot a^2$.

3069. Alkalmazzuk a szinusztételt és a $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ azonosságot! Kapjuk, hogy $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta}{\sin\beta} = 2 \cdot \cos\beta$. Ebből (1) $\cos\beta = \frac{a}{2b}$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt a b oldalra és használjuk fel még az (1) összefüggést! $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{a}{2b}$. Ebből kapjuk, hogy $b \cdot (b-c) \cdot (b+c) = a^2 \cdot (b-c)$. **1. eset:** ha $b - c \neq 0$, akkor lehet osztani vele, s így $b \cdot (b+c) = a^2$, ebből pedig $a^2 - b^2 = bc$. **2. eset:** ha $b - c = 0$, ekkor $b = c$, ebből következik, hogy $\beta = \gamma$. Felhasználva, hogy $\alpha = 2 \cdot \beta$, kapjuk, hogy $\beta = \gamma = 45°$ és $\alpha = 90°$. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét e derékszögű háromszögre: $a^2 = b^2 + c^2$, ebből $a^2 - b^2 = c^2$, de mivel a 2. esetben $b = c$, ezért $a^2 - b^2 = bc$, tehát a 2. esetben is igaz az állítás.

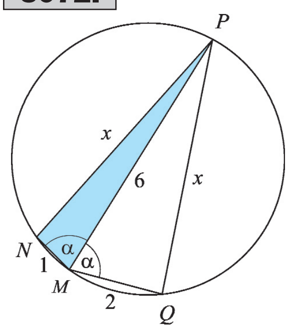
3070. A feltételi egyenlet bal oldalán alkalmazzuk kétszer a szinusztételt, kapjuk, hogy: $\frac{c}{b} + \frac{b}{c} = 2 \cdot \sin\alpha$! Alkalmazzuk most a koszinusztételt az a oldalra és fejezzük ki a szög koszinuszát! $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Használjuk fel, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$! Helyettesítsük be ide az előzőkben kapott képletekből a szögfüggvényeket! $\left(\frac{b^2+c^2}{2bc}\right)^2+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=1$! Alakítsuk át ezt az egyenletet a következő alakúra: $\left(b^2-c^2\right)^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)^2=0$! Ebből következik, hogy $b=c$, vagyis a háromszög egyenlő szárú. Ezenkívül még az következik, hogy $b^2+c^2=a^2$, ebből pedig következik, hogy a háromszög derékszögű is. Miért? Tehát a háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

Nehezebb feladatok

3071. $a:b:c=\sqrt{5}:\sqrt{8}:3$ a háromszög oldalainak az aránya. A feltételekből kapjuk, hogy $\frac{1}{2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$, ebből $\frac{1}{2}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$. Alkalmazzuk a szinusztételt, majd kétszer a koszinusztételt, amelyekből fejezzük ki a szögek koszinuszait! A behelyettesítés után: $\frac{1}{2}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$. Ezen egyenletet kissé átalakítva, kapjuk, hogy (1) $3\cdot a^2-3\cdot b^2+c^2=0$.

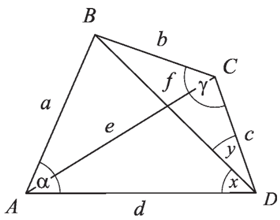
A feltételből kapjuk, hogy $\frac{2}{3}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}$, ebből $\frac{2}{3}=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$. Alkalmazva a szinusztételt és kétszer a koszinusztételt, kaphatjuk, hogy $\frac{2}{3}=\frac{b}{c}\cdot\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}$, ebből kaphatjuk, hogy (2) $a^2+5\cdot b^2-5\cdot c^2=0$. Vizsgáljuk meg az (1) és (2) egyenletből álló egyenletrendszert! Például fejezzük ki (1)-ből c^2-et és ezt helyettesítsük be (2)-be! Ebből azt kapjuk, hogy $\frac{a^2}{b^2}=\frac{5}{8}$, s így $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$. Másrészt a^2-et innen kifejezve és behelyettesítve c^2 kifejezésébe és ezt átalakítva kapjuk, hogy $\frac{b^2}{c^2}=\frac{8}{9}$, ebből $\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{8}}{3}$.

3072.

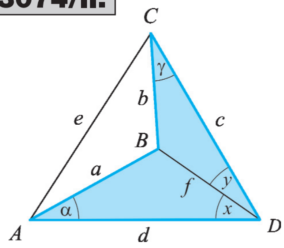


3072. $R=2\cdot\sqrt{\frac{34}{15}}$ egység a kör sugara. $PQ=2\cdot R\cdot\sin\alpha$ és $PN=2\cdot R\cdot\sin\alpha$, ebből következik, hogy $PQ=PN=x$, vagy használjuk ki a kerületi szögek tételét. Alkalmazzuk a koszinusztételt az MNP háromszögre, majd az MPQ háromszögre, mindkettőben az x oldalra! Az egyenletrendszerből kaphatjuk, hogy $\cos\alpha=\frac{1}{4}$ és $x=\sqrt{34}$. Az $x=2\cdot R\cdot\sin\alpha$-ból következik, hogy $R=2\cdot\sqrt{\frac{34}{15}}$.

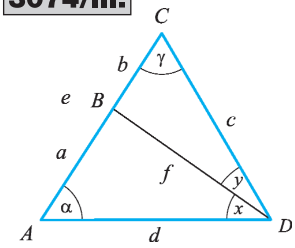
3074/I.



3074/II.



3074/III.



3073. $R = 4\cdot\sqrt{\dfrac{14}{55}}$ egység a kör sugara. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3074. Alkalmazzuk kétszer a szinusztételt: (1) $\dfrac{\sin x}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{f}$ és (2) $\dfrac{\sin y}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{f}$. Ezekből $\sin x\cdot\sin y = \dfrac{a\cdot b}{f^2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma$. Átalakítva $\sin x\cdot\sin y = \dfrac{a\cdot b}{f^2}\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma))$. Alkalmazva kétszer a koszinusztételt, kapjuk, hogy: $\cos\alpha = \dfrac{a^2+d^2-f^2}{2\cdot a\cdot d}$ és $\cos\gamma = \dfrac{b^2+c^2-f^2}{2\cdot b\cdot c}$.
Ezeket behelyettesítve az előző egyenletbe, kapjuk, hogy:
(*) $\sin x\cdot\sin y = \dfrac{a\cdot b}{f^2}\cdot\left(\dfrac{a^2+d^2-f^2}{2\cdot a\cdot d}\cdot\dfrac{b^2+c^2-f^2}{2\cdot b\cdot c} - \cos(\alpha+\gamma)\right)$. Másrészt $\sin x\cdot\sin y =$ $= \cos x\cdot\cos y - \cos(x+y)$. Háromszor alkalmazva a koszinusztételt, kapjuk, hogy:
$\cos x = \dfrac{f^2+d^2-a^2}{2\cdot f\cdot d}$; $\cos y = \dfrac{f^2+c^2-b^2}{2\cdot f\cdot c}$; $\cos(x+y) = \dfrac{c^2+d^2-e^2}{2\cdot c\cdot d}$. Ezeket beírva az előző egyenletbe, kapjuk, hogy: (**) $\sin x\cdot\sin y = \dfrac{f^2+d^2-a^2}{2\cdot f\cdot d}\cdot\dfrac{f^2+c^2-b^2}{2\cdot f\cdot c} - \dfrac{c^2+d^2-e^2}{2\cdot c\cdot d}$.
A (*) és (**) egyenletből kapjuk, hogy: $\dfrac{f^2+d^2-a^2}{2\cdot f\cdot d}\cdot\dfrac{f^2+c^2-b^2}{2\cdot f\cdot c} - \dfrac{c^2+d^2-e^2}{2\cdot c\cdot d} =$ $= \dfrac{a\cdot b}{f^2}\cdot\left(\dfrac{a^2+d^2-f^2}{2\cdot a\cdot d}\cdot\dfrac{b^2+c^2-f^2}{2\cdot b\cdot c} - \cos(\alpha+\gamma)\right)$. A továbbiakban addig facsarjuk az egyenletet, amíg ki nem jön belőle *Bretschneider tétele:* $e^2\cdot f^2 = a^2\cdot c^2 + b^2\cdot d^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot\cos(\alpha+\gamma)$.

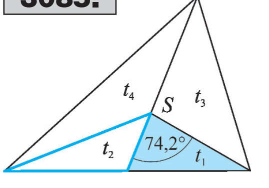
3075. Alkalmazzuk Bretschneider tételét: $e^2\cdot f^2 = a^2\cdot c^2 + b^2\cdot d^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot\cos(\alpha+\gamma)$. Mivel $-1 \le \cos(\alpha+\gamma) \le 1$, ezért $2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d \ge -2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot\cos(\alpha+\gamma) \ge -2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $e^2\cdot f^2 \le a^2\cdot c^2 + b^2\cdot d^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d$, azaz $e^2\cdot f^2 \le (a\cdot c + b\cdot d)^2$, ebből pedig következik, hogy $e\cdot f \le a\cdot c + b\cdot d$, ezzel igazoltuk az általánosított *Ptolemaiosz-tételt*. Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\cos(\alpha+\gamma) = -1$, azaz ha $\alpha+\gamma = 180°$, vagyis ha a négyszög húrnégyszög. Ha van kedvünk, akkor könnyen igazolhatjuk azt is, az előzőeket figyelembe véve, hogy $e\cdot f \ge |a\cdot c - b\cdot d|$. Keressünk más bizonyítást is az általánosított Ptolemaiosz-tételre!

Néhány könnyű területszámítási feladat

Szinusztételt, illetve koszinusztételt nem igénylő könnyű feladatok

3076. $\approx 48{,}8\ \text{cm}^2$ a háromszög területe.
3077. **1. eset:** $\approx 43{,}34°$-os; **2. eset:** $\approx 136{,}66°$-os szöget zárnak be az adott oldalak.
3078. $\approx 8{,}3$ cm az adott szög melletti ismeretlen oldal hossza.
3079. $\approx 22{,}7\ \text{cm}^2$ a rombusz területe.
3080. $\approx 1314{,}4\ \text{cm}^2$ a paralelogramma területe.
3081. $\approx 240{,}5\ \text{cm}^2$ a paralelogramma területe.
3082. Vegyük figyelembe, hogy az átlók négy egyenlő területű háromszögre vágják a paralelogrammát! Miért? Másrészt tudjuk, hogy $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$. Alkalmazzuk a háromszög trigonometrikus területképletét!
3083. A konvex négyszög f átlója x és $e - x$ hosszúságú szakaszokra osztja az e átlót, míg az e átló y és $f - y$ hosszúságú szakaszokra osztja az f átlót. Legyen φ az átlók hajlásszöge. A négy részháromszög területének összege megegyezik a négyszög területével. $t = \frac{x \cdot y \cdot \sin(180° - \varphi)}{2} + \frac{x \cdot (f - y) \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{(f - y) \cdot (e - x) \cdot \sin(180° - \varphi)}{2} + \frac{y \cdot (e - x) \cdot \sin\varphi}{2}$. Vegyük figyelembe, hogy $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$, majd alakítsuk a képletet és hamarosan megkapjuk, hogy $t = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$.
3084. $\approx 9{,}8$ cm; $\approx 6{,}8$ cm; $\approx 5{,}97$ cm a háromszög oldalai. Az $a - b = 3$ egyenletből és a háromszög trigonometrikus területképletére felírt egyenletből álló egyenletrendszert oldjuk meg. Ez másodfokú egyenletre vezet, amelyet könnyen megoldhatunk. Kapjuk, hogy $b \approx 6{,}8$. Ebből $a \approx 9{,}8$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből $c \approx 5{,}97$.
3085. $t \approx 28{,}06\ \text{cm}^2$ a háromszög területe. $t_1 = t_2$, $t_3 = 2 \cdot t_1$, $t_4 = 2 \cdot t_2$, így $t = 6 \cdot t_1$. Miért?

3085.



3086. $\approx 42{,}59\ \text{cm}^2$ a háromszög területe. Számítsuk ki a megfelelő középponti szögeket, majd az egyes középponti szögekhez tartozó részháromszögek területét, amelyeket összeadva kapjuk a háromszög területét.
3087. A körülírt kör középpontját kössük össze a háromszög csúcspontjaival! Így három részháromszöget kapunk. Alkalmazzuk a középponti és kerületi szögek tételét, amelyből kapjuk, hogy a részháromszögeknek az a szöge, amely a kör középpontjánál van, megegyezik az eredeti háromszög megfelelő szögének kétszeresével. Írjuk fel a részháromszögek területeit a trigonometrikus területképlettel, majd ezeket összeadva megkapjuk a háromszög területére a bizonyítandó összefüggést. Három esetet különböztessünk meg: a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszög esetét.

Szinusztételt, illetve koszinusztételt igénylő könnyű feladatok

3088. $\approx 101{,}3\ \text{cm}^2$ a háromszög területe. Használjuk a szinusztételt és a háromszög trigonometrikus területképletét!
3089. 12 cm; 16 cm; $\approx 22{,}8$ cm a háromszög oldalai, 30°; $\approx 41{,}81°$; $\approx 108{,}19°$ a háromszög szögei. Legyen $a = 3x$, $b = 4x$, ekkor $t = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ és $t = \frac{c \cdot m_c}{2}$, ahol $m_c = 8$ cm. Másrészt $c = 2 \cdot R \cdot \sin\gamma$,

ahol $R = 12$ cm. Ezekből meghatározhatjuk, hogy $x = 4$ cm. Ebből pedig $a = 12$ cm és $b = 16$ cm. Az $a = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$-ból kapjuk, hogy $\alpha = 30°$. Ugyanilyen módon kapjuk, hogy $\beta = 41{,}81°$. Ezekből következik, hogy $\gamma = 108{,}19°$. A c értékét a $c = 2 \cdot R \cdot \sin \gamma$ egyenletből kaphatjuk: $c \approx 22{,}8$ cm.

3090. $\approx 184{,}72$ m; $\approx 167{,}82$ m; ≈ 216 m a háromszög oldalai. 1 hektár = 10 000 m^2.

$t = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$, és a szinusztétel: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin \beta}{\sin \gamma}$, ezekből: $t = \dfrac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \cdot \sin \gamma}$. Innen megkaphatjuk, hogy $c \approx 216$. Az a és c oldalra felírt szinusztételből: $a \approx 184{,}72$. A b és c oldalra felírt szinusztételből: $b \approx 167{,}82$.

3091. Az előző feladat megoldásához való útmutatásában lényegében levezettük e feladat képletét.

3092. $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ és $a = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$, $b = 2 \cdot R \cdot \sin \beta$, ezekből kaphatjuk a bizonyítandó képletet.

3093. $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ és $c = 2 \cdot R \cdot \sin \gamma$, ezekből kaphatjuk a bizonyítandó képletet.

3094. 4 cm; 8 cm; $\approx 4{,}96$ cm a háromszög oldalai. Egyrészt $a + b = 12$ a feltétel szerint, másrészt a háromszög trigonometrikus területképletéből kaphatjuk, hogy $a \cdot b = 32$. Oldjuk meg az egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy $a = 4$ és $b = 8$, illetve fordítva. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 4{,}96$ cm.

3095. ≈ 293 cm^2 a négyszög területe. Húzzuk be a négyszög azon átlóját, amely a 25 m-es és a 18 m-es oldalak közös csúcspontjából indul ki. Ekkor annak a háromszögnek könnyen kiszámíthatjuk a területét, amelynek a 14 m-es és 25 m-es oldalai vannak és ismert ezek hajlásszöge is. Ezután számítsuk ki a koszinusztétellel az előbb meghúzott átló hosszát! Ekkor a másik részháromszögre felírva a koszinusztételt, megkaphatjuk a 15 m-es és a 18 m-es oldalak közötti szöget. Ennek segítségével kiszámíthatjuk ezen részháromszög területét is. Adjuk össze a részháromszögek területeit és megkapjuk a négyszög területét.

3096. $\approx 21{,}05$ cm; $\approx 35{,}08$ cm; $\approx 24{,}26$ cm, a háromszög oldalai. Legyen $a = 3x$, $b = 5x$, $\gamma = 42{,}7°$. A $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ képletből kiszámíthatjuk x-et. $x \approx 7{,}02$. Ebből $a \approx 21{,}05$; $b \approx 35{,}08$ cm. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 24{,}26$ cm.

3097. **1. eset:** $\approx 34{,}35°$; $\approx 81{,}63°$; $\approx 64{,}02°$ a háromszög szögei, $\approx 11{,}63$ cm a harmadik oldala. A háromszög trigonometrikus területképletéből kiszámíthatjuk, hogy $\gamma \approx 64{,}02°$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 11{,}63°$. Alkalmazzuk a szinusztételt az a oldalra és a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 34{,}35°$, ebből pedig: $\beta \approx 81{,}63°$. **2. eset:** $\gamma_2 \approx 116°$; $c_2 \approx 17{,}3$ cm; $\alpha_2 \approx 41{,}68°$; $\beta_2 \approx 22{,}32°$.

3098. $\approx 14{,}68$ dm; $\approx 19{,}87$ dm a háromszög ismeretlen oldalai; $\approx 23{,}43°$; $\approx 114{,}42°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $a = 8{,}7$ dm, $\beta = 42{,}15°$, $t = 58$ dm^2. A β szögre felírt területképletből kapjuk, hogy $c \approx 19{,}87$ dm. Alkalmazzuk a koszinusztételt a b oldalra! Ebből kapjuk, hogy $b \approx 14{,}65$ dm. Alkalmazzuk a szinusztételt az a és b oldalakra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 23{,}43°$ és ebből pedig, felhasználva a másik ismert szöget is, kapjuk, hogy $\gamma \approx 114{,}42°$.

3099. ≈ 16 cm; ≈ 25 cm; $\approx 25{,}12$ cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 37{,}23°$; $\approx 70{,}97°$ a háromszög ismeretlen szögei. $a^2 + b^2 = 881$ a feltételből, míg a háromszög trigonometrikus területképletéből kaphatjuk, hogy $190 = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin 71{,}8°}{2}$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! Azt kapjuk, hogy $a \approx 16$; $b \approx 25$, illetve fordítva. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 25{,}12$ cm. Alkalmazzuk a szinusztételt az a és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 37{,}23°$ és ezután könnyen kaphatjuk, hogy $\beta \approx 70{,}97°$, illetve fordítva.

3100. ≈ 2 dm; ≈ 3 dm a háromszög ismeretlen oldalai. Egyrészt (1) $a^2 + b^2 = 13$, másrészt a háromszög területképletéből kaphatjuk, hogy (2) $a \cdot b \cdot \sin \gamma = 6$, harmadrészt a koszinusztételt felírva az ismert oldalra: (3) $3{,}6^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$. Ezen egyenletrendszerből kaphatjuk a következő egyenletrendszert: (I) $a \cdot b \cdot \sin\gamma \approx 13$; (II) $a \cdot b \cdot \cos\gamma \approx 0{,}02$. Ha elosztjuk a két egyenlet megfelelő oldalait egymással, akkor azt kapjuk, hogy $\mathrm{tg}\,\gamma \approx 650$, ebből $\gamma \approx 89{,}91°$. Ha visszahelyettesítjük ezt az (I) egyenletbe, akkor kapjuk, hogy: (III) $a \cdot b \approx 6$. Oldjuk meg az (I) és (III) egyenletből álló egyenletrendszert! Kapjuk, hogy $a \approx 2$, $b \approx 3$, illetve fordítva.

Összegzési tételek alkalmazása

Bevezető alapfeladatok

3101. *a)* $\sin\alpha$; *b)* $-\cos\alpha$; *c)* $\sin\alpha$; *d)* $-\cos\alpha$; *e)* $-\sin\alpha$; *f)* $\sin\alpha$; *g)* $-\cos\alpha$; *h)* $\cos\alpha$.
3102. *a)* $-\sin\alpha$; *b)* $-\cos\alpha$; *c)* $\sin\alpha$; *d)* $-\sin\alpha$.
3103. *a)* $\cos\alpha$; *b)* $\sin\alpha$; *c)* $-\cos\alpha$; *d)* $-\sin\alpha$.
3104. *a)* $\cos\alpha$; *b)* $-\sin\alpha$; *c)* $-\cos\alpha$; *d)* $\sin\alpha$.
3105. *a)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *d)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3106. *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* 0; *c)* $-\frac{1}{2}$; *d)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3107. *a)* $-\mathrm{tg}\,\alpha$; *b)* $\mathrm{tg}\,\alpha$; *c)* $\mathrm{tg}\,\alpha$; *d)* $-\mathrm{tg}\,\alpha$;
3108. *a)* Alkalmazzuk a $\sin(\alpha + \beta)$-ra való összegzési képletet, ha $\alpha = \beta = x$. *b)* Alkalmazzuk a $\cos(\alpha + \beta)$-ra való összegzési képletet, ha $\alpha = \beta = x$.
3109. Alkalmazzuk az előző feladatban bizonyított képleteket x helyett $\frac{x}{2}$-re!

Alapvető feladatok

3110. *a)* $\sqrt{3} \cdot \cos\alpha$; *b)* $\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$; *c)* $\cos\alpha$; *d)* $\cos\alpha$.
3111. *a)* $\frac{1 + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha}$; *b)* $\frac{1 - \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha}$.
3112. *a)* 1; *b)* 0.
3113. Alkalmazzuk a bizonyítandó azonosságok bal oldalaira a tanult összegzési (addíciós) tételeket!
3114. Az előző feladat azonosságaiban végezzük el az $\alpha = \frac{x+y}{2}$ és $\beta = \frac{x-y}{2}$ helyettesítést! Ekkor $\alpha + \beta = x$ és $\alpha - \beta = y$. Így az ottani *a)*, *b)*, *c)*, *d)* azonosságokból rendre következnek az itteni *a)*, *b)*, *c)*, *d)* azonosságok.
3115. A bizonyítandó azonosságok bal oldalaira alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, és használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ minden valós x-re teljesül.
3116. $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{19}{8}$. Alkalmazzuk a tangensnél tanult megfelelő összegzési tételt!
3117. *a)* $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = 1$; *b)* $\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{7}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket!
3118. *a)* $\cos x$; *b)* 1; *c)* 1; *d)* $\cos x$; *e)* $\cos x$; *f)* 1.

IV

3119. *a)* Helyettesítsük be $\cos 2x$ megfelelő képletét, majd rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, a $\cos^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x$ segítségével! Ezután alakítsunk ki teljes négyzetet és azt kapjuk, hogy $0 \le (\sin x - 1)^2$, ez pedig minden x valós számra teljesül. *b)* Hasonlóan bizonyíthatjuk, mint az előző feladatot, csak itt $\sin^2 x$-et alakítjuk át $\cos^2 x$ segítségével. Azt kapjuk, hogy $0 \le (\cos x - 1)^2$.

3120. *a)* $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha)^2$. Alkalmazzuk most a megfelelő összegzési tételt, majd használjuk fel $\sin 2\alpha$ és $\cos 2\alpha$ ismert képleteit, másrészt azt, hogy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Kapjuk, hogy $\sin 3\alpha = 3 \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha$. *b)* Hasonló módon oldhatjuk meg. Kapjuk, hogy $\cos 3\alpha = 4 \cdot \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos\alpha$. *c)* $\sin 4\alpha = 8 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$.
d) $\cos 4\alpha = 8 \cdot \cos^4 \alpha - 8 \cdot \cos^2 \alpha + 1 = 1 - 8 \cdot \sin^2\alpha + 8 \cdot \sin^4\alpha$.

3121. *a)* Végeredmény –1. Alkalmazzuk $\cos 3\alpha$ előbb kapott képletét és a $\sin 2\alpha$ képletét! *b)* Végeredmény 1. Alkalmazzuk $\sin 3\alpha$ előzőekben kapott képletét és a $\sin 2\alpha$ képletét!

3122. *a)* Alkalmazzuk a $\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta)$-ra tanult összegzési képletet $\alpha = \beta = x$-re! Másrészt vegyük figyelembe a második egyenlőségnél, hogy $\mathrm{ctg}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, x}$ a megfelelő értelmezési tartományban.
b) $\mathrm{ctg}\, 2x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, 2x}$ és vegyük figyelembe az előző feladat eredményét! *c)* $\dfrac{2 \cdot \mathrm{tg}\, x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$-et addig alakítjuk a tangens definíciójának a felhasználásával, közös nevezőre hozással, egyszerűsítéssel, amíg $\sin 2x$-et nem kapunk. Másrészt $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\, x}$ felhasználásával mutassuk meg, hogy $\dfrac{2 \cdot \mathrm{tg}\, x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{2 \cdot \mathrm{ctg}\, x}{\mathrm{ctg}^2 x + 1}$. *d)* Addig alakítsuk a középső képletet a tangens definíciójának a felhasználásával, közös nevezőre való hozással, egyszerűsítéssel, amíg $\cos 2x$-et nem kapunk. Másrészt $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\, x}$ alkalmazásával addig alakítsuk más módon, mint az előbb, a középső képletet, amíg a harmadik képletet meg nem kapjuk.

3123. *a)* $\dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ kifejezést alakítsuk, $\cos 2x$ képletét felhasználva! *b)* $\dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ kifejezést alakítsuk, $\cos 2x$ képletét felhasználva! *c)* Az $\dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ kifejezést alakítsuk, amíg $\mathrm{tg}\, x$ nem lesz. Másrészt mutassuk meg, hogy $\dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$, szorozzunk be itt a nevezőkkel!
d) $\mathrm{ctg}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, x}$ és vegyük figyelembe az előző feladat állítását! *e)* Az $\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ kifejezést alakítsuk addig, amíg $\mathrm{tg}^2 x$ nem lesz. *f)* $\mathrm{ctg}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, x}$ és vegyük figyelembe az előző feladat állítását!

3124. **1. eset:** $\sin 2\alpha = \dfrac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{7}{25}$; $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \dfrac{24}{7}$; $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \dfrac{7}{24}$.

2. eset: $\sin 2\alpha = -\dfrac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{7}{25}$; $\mathrm{tg}\, 2\alpha = -\dfrac{24}{7}$; $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = -\dfrac{7}{24}$.

3125. **1. eset:** $\sin 2\alpha = \dfrac{120}{169}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{119}{169}$; $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \dfrac{120}{119}$; $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \dfrac{119}{120}$.

2. eset: $\sin 2\alpha = -\dfrac{120}{169}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{119}{169}$; $\mathrm{tg}\, 2\alpha = -\dfrac{120}{119}$; $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = -\dfrac{119}{120}$.

3126. $\sin 2x = \frac{20}{29}$; $\cos 2x = \frac{21}{29}$; $\operatorname{tg} 2x = \frac{20}{21}$; $\operatorname{ctg} 2x = \frac{21}{20}$.

3127. *a)* Alkalmazzuk a $\sin 2\alpha$-ra tanult képletet $\alpha = \frac{x}{2}$-re! *b)* Alkalmazzuk a $\cos 2\alpha$-ra tanult képletet $\alpha = \frac{x}{2}$-re! *c)* Alkalmazzuk a $\operatorname{tg} 2\alpha$-ra tanult képletet $\alpha = \frac{x}{2}$-re! Másrészt vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. *d)* Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, majd alkalmazzuk az előző eredményt! *e)* $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ kifejezésből induljunk ki, majd alkalmazzuk az *a)* és *b)* feladatok eredményeit! Másrészt $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, itt szorozzunk a nevezőkkel! *f)* Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, majd alkalmazzuk az előző feladat eredményét. *g)* $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ kifejezésből induljunk ki, majd alkalmazzuk az *a)* és a *b)* feladatok eredményeit! *h)* Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, majd alkalmazzuk az előző feladat eredményét!

3128. **1. eset:** $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$; **2. eset:** $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{4}$. **3. eset:** $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{4}$; **4. eset:** $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$.

3129. $\sin\alpha = \frac{720}{1681}$; $\cos\alpha = \frac{1519}{1681}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{720}{1519}$.

Gyakorlófeladatok

3130. A bizonyítandó azonosságok bal oldalaiba helyettesítsük be a megfelelő összegzési tételekből kapott képleteket, majd vegyük figyelembe, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
Az *e)* és az *f)* feladatoknál a jobb oldalon érdemes még elvégezni a kijelölt szorzást.
A *g)* és a *h)* feladatoknál a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot esetleg kétszer érdemes alkalmazni.
3131. Végeredmény: 1. A bal oldalon alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, végezzük el a műveleteket, majd a két csoportba osztott tagoknál mindkét csoportból végezzünk kiemelést. Majd használjuk fel, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezután ugyanezt használjuk fel még-egyszer, de most β-ra alkalmazva.
3132. A bal oldalon alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, majd végezzük el a beszorzást. Ezután írjuk be a megfelelő nevezetes hegyesszögek pontos értékeit!
Majd alkalmazzuk a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságot és ezután a bizonyítandó állítást kapjuk.
3133. Végeredmény: $\frac{1}{4}$. Alkalmazzuk a kifejezésre a megfelelő összegzési tételeket, majd végezzük el a kijelölt műveleteket! A kapott kifejezésben levő $\sin^2 x$-et alakítsuk át $\cos^2 x$-re, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság segítségével. Ezután emeljünk ki $\cos^2 x$-et azon tagokból, amelyek-

ben ezenkívül még 30° szögfüggvénye is szerepel. Majd alkalmazzuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot 30°-ra, s végül írjuk be a megfelelő nevezetes hegyesszög szögfüggvényének értékét és megkapjuk a végeredményt.

3134. Végeredmény: − 1. Alkalmazzuk a kifejezésre a megfelelő összegzési tételeket, majd végezzük el a kijelölt műveleteket. Ezután helyettesítsük be a 45°-os nevezetes hegyesszög megfelelő szögfüggvényeinek az értékeit. Az egyszerűsítések után megkapjuk a végeredményt.

3135. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, végezzük el a kijelölt műveleteket és egyszerűsítsünk!

IV

a) 1; *b)* 0; *c)* 0; *d)* 1; *e)* 1; *f)* 0; *g)* 0; *h)* 1.

3136. $\alpha = 45°$, ezért elég igazolni, hogy $\beta + \gamma = 45°$. $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$ és $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}$. Alkalmazzuk $\operatorname{tg}(\beta + \gamma)$-ra a megfelelő összegzési tételt. Azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = 1$, ebből pedig következik, hogy $\beta + \gamma = 45°$. Keressünk elemi megoldást, amely nem használ szögfüggvényt! Érdemes megtalálni a szép elemi megoldást, mert van ilyen.

3137. Végeredmény: 2. Vegyük észre, hogy $\alpha + \beta = 45°$, így $1 = \operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. Alkalmazzuk most a megfelelő összegzési tételt, szorozzunk a nevezővel, rendezzük nullára az egyenletet, majd adjunk mindkét oldalhoz 1-et. Ezután szorzattá alakítva kaphatjuk, hogy:
$(1 + \operatorname{tg}\alpha) \cdot (1 + \operatorname{tg}\beta) = 2$.

3138. *a)* $\frac{1}{2}$. *b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$. *c)* $-\frac{1}{2}$. *d)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. *e)* $-\frac{1}{2}$. *f)* $\frac{1}{4}$.

3139. *a)* $\frac{1}{2}$. *b)* 0. *c)* 2. *d)* 0.

3140. *a)* $\operatorname{tg} x$. *b)* $\sin x$. *c)* $\operatorname{ctg} x$. *d)* $\operatorname{ctg}^2 x$.

3141. Az *a)* és a *b)* feladatoknál alkalmazzuk a kijelölt műveleteket és az ismert összefüggéseket a kétszeres szögekre! A *c)* feladatnál használjuk fel az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosságot, amelynek segítségével alakítsuk szorzattá a bal oldalt. A *d)* feladatnál használjuk fel kétszer a $\sin 2\alpha$-ra vonatkozó azonosságot!

3142. Alkalmazzuk a kotangens, illetve a tangens definícióját, hozzunk közös nevezőre, alkalmazzuk a kétszeres szögekre ismert képleteket! Illetve használjuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot.

3143. $\sin 2x = \frac{120}{169}$; $\cos 2x = -\frac{119}{169}$; $\operatorname{tg} 2x = -\frac{120}{119}$; $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{119}{120}$.

3144. $\sin 2x = \frac{60}{61}$. *Vázlat:* Mutassuk meg, hogy $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$; $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$, majd használjuk ezeket fel a $\sin 2x$ képletében. Keressünk másik megoldást is!

3145. Az $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mutassuk meg, hogy $\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$; $\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$ és ezeket felhasználva kaphatjuk az eredményt!

3146. $\cos 2x = \frac{3}{5}$. A másodfokú egyenletet megoldva és a két jelölt közül kiválasztva a megfelelőt, kapjuk, hogy: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója 1, a másik befogója 2 egység, ekkor számítsuk ki az átfogó hosszát, illetve az x szög szinuszát és a koszinuszát! Majd alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét!

3147. **1. eset:** $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{5}$; **2. eset:** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{5}$. Alkalmazzuk tg $2x$ képletét! Majd behelyettesítés után kapunk egy másodfokú egyenletet tg x-re. Ezt megoldva kapjuk az eredményeket.

3148. **1. eset:** $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; **2. eset:** $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióját. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és a $\sin 2x$ képletét. Kapjuk, hogy $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Ebből számítsuk ki, hogy $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Ebből számíthatjuk a végeredményeket.

IV

3149. $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ismert, hogy $|\operatorname{tg} x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$, lásd például a 3123. *e)* feladatot! Alkalmazzuk ezt $\frac{x}{4}$-re és vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{tg}\frac{x}{4} > 0$! Másrészt vegyük észre, hogy $\cos\frac{x}{2} < 0$! Ismert, hogy $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

3150. $\sin 4x = \frac{24}{25}$. Egyrészt $\sin 4x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x = 4\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x)$. Osszunk $\cos^4 x$ -szel, ami nem nulla, ekkor kapjuk, hogy: $\frac{\sin 4x}{\cos^4 x} = 4\cdot\operatorname{tg} x\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)$. Másrészt mutassuk meg, hogy $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$! Ezeket felhasználva, tg x-ekből felépített kifejezést kapunk. Keressünk egy második megoldást, amely egy olyan derékszögű háromszögön alapszik, amelynek az x szöggel szemközti befogója 1 egység, míg a másik befogója 3 egység!

3151. Szorozzunk 2-vel, majd alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét!

3152. Bővítsük a bal oldalt sin 10°-kal és alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét többször is.

$$\frac{8\cdot\sin 10°\cdot\cos 10°\cdot\cos 20°\cdot\cos 40°}{\sin 10°} = \frac{4\cdot 2\cdot\sin 10°\cdot\cos 10°\cdot\cos 20°\cdot\cos 40°}{\sin 10°} =$$

$$= \frac{4\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°\cdot\cos 40°}{\sin 10°}.$$ Folytassuk! A végén használjuk fel, hogy $\sin 80° = \cos(90° - 80°)$!

3153. Szorozzuk meg az egyenletet $\sin\alpha$-val, majd alkalmazzuk a $\sin 2\alpha$ képletét többször is, majd az előző feladat megoldásához hasonló módon egyre rövidítsük a bal oldalt, egészen addig amíg meg nem kapjuk a kívánt eredményt.

3154. Végeredmény: $\frac{1}{64}$. Legyen K a kifejezés. Használjuk fel $\sin 2x$ képletét többször is. Induljunk ki abból, hogy $K = \frac{2\cdot\sin\frac{\pi}{65}\cdot K}{2\cdot\sin\frac{\pi}{65}} =$

$$= \frac{2\cdot\sin\frac{\pi}{65}\cdot\cos\frac{\pi}{65}\cdot\cos\frac{2\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{4\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{8\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\cdot\pi}{65}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{65}} =$$

IV

$$=\frac{\sin\frac{2\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{2\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{4\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{8\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\cdot\pi}{65}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{65}}=$$

$=\dfrac{\sin\frac{4\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{4\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{8\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\cdot\pi}{65}}{2^2\cdot\sin\frac{\pi}{65}}$. Folytassuk! A végén használjuk fel, hogy $\sin\frac{64\cdot\pi}{65}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{65}\right)=\sin\frac{\pi}{65}$.

3155. Használjunk teljes indukciót! $n=0$-ra: $\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2\cdot\sin x}$ ez pedig igaz. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n=k$-ra! Ekkor fennáll, hogy $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos\left(2^k\cdot x\right)=\dfrac{\sin\left(2^{k+1}\cdot x\right)}{2^{k+1}\cdot\sin x}$. Szorozzuk ezt $\cos\left(2^{k+1}\cdot x\right)$-szel! Így $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos\left(2^k\cdot x\right)\cdot\cos\left(2^{k+1}\cdot x\right)=$
$=\dfrac{\sin\left(2^{k+1}\cdot x\right)\cdot\cos\left(2^{k+1}\cdot x\right)}{2^{k+1}\cdot\sin x}$. Mutassuk meg, hogy a kapott egyenlet jobb oldala éppen: $\dfrac{\sin\left(2^{k+2}\cdot x\right)}{2^{k+2}}$. Ha ezt megmutatjuk, akkor igazoltuk az állítást $n=k+1$-re, s a teljes indukció elvének megfelelően igazoltuk minden nemnegatív n egész számra.

3156. Alkalmazzuk a bal oldalra a megfelelő összegzési tételt és $\sin 2\alpha$ képletét és $\sin^2\alpha+$ $+\cos^2\alpha=1$! Kapjuk, hogy : $\dfrac{1}{2}+\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. A jobb oldalra szintén alkalmazzuk az összegzési tételt és a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ képletet! Kapjuk, hogy $\dfrac{1}{2}+\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

3157. *a)* Végeredmény: 0. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és $\sin 2\alpha$ képletét, ezenkívül a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ azonosságot! *b)* Végeredmény: 0. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és $\cos 2\alpha$ képletét! Majd osszuk el a harmadik tört számlálóját is és nevezőjét is $\cos^2\alpha$-val s így alakítsuk át tangenseket tartalmazó kifejezéssé a harmadik törtet. Ehhez használjuk fel, hogy $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\mathrm{tg}^2\alpha$. Az első két törtet hozzuk közös nevezőre! Vegyük észre hogy az első két tört összegéből kivonva a harmadik tört átalakított kifejezését, éppen nullát kapunk.
c) Végeredmény: $\sin 2\alpha$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, majd a számlálóban és a nevezőben hozzunk közös nevezőre, majd egyszerűsítsünk! Majd a műveletek elvégzése után alkalmazzuk a tangens definícióját, a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ azonosságot és $\sin 2\alpha$ képletét!

3158. *a)* Végeredmény: $\dfrac{3}{2}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési képleteket és a megfelelő nevezetes hegyesszögek szögfüggvényeinek értékeit helyettesítsük be! Használjuk fel a $\sin^2\alpha+$ $+\cos^2\alpha=1$ azonosságot! *b)* Végeredmény: $\dfrac{3}{2}$. Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatban.

3159. *a)* $\operatorname{tg}^2\left(45° + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{90° + x}{2}\right)$. Alkalmazzuk most a következő képletet: $|\operatorname{tg} x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$. Lásd a 3123. *e)* feladatot! Használjuk fel, hogy $\cos(90° + x) = -\sin x$!

b) $\operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{90° - x}{2}\right)$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot. Használjuk fel, hogy $\cos(90° - x) = \sin x$. *c)* $\operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{90° - x}{2}\right)$. Alkalmazzuk a következő képletet: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$. Lásd a 3123. *c)* feladatot! Majd használjuk fel, hogy $\cos(90° - x) = \sin x$.

d) $\operatorname{tg}\left(45° + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{90° + x}{2}\right)$. Használjuk fel, hogy: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$ és $\cos(90° + x) = -\sin x$.

3160. Végeredmény: $\sin^2 \alpha$, ez tényleg nem függ x-től. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket! Ezután végezzük el a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítést. Majd két megfelelő tagból emeljünk ki $\cos^2 x$ -et, ezután alkalmazzuk a következő azonosságot: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

3161. Végeredmények: $\sin 15° = \cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\cos 15° = \cos 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{ctg} 75° = 2 - \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 15° = \operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$; $\sin 105° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$; $\cos 105° = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg} 105° = -2 - \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 105° = \sqrt{3} - 2$. Induljunk ki abból, hogy $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és a megfelelő nevezetes hegyesszögek szögfüggvényeinek értékeit! Használjuk fel, hogy $\sin \alpha = \cos(90° - \alpha)$. Ugyanígy határozhatjuk meg $\cos 15°$ és a $\sin 75°$ értékeit. A $\operatorname{tg} 15°$ értékének meghatározására használjuk a tangens definícióját és az előzőekben kiszámított értékeket. Használjuk fel még, hogy $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$! A $\operatorname{ctg} 15°$ meghatározásánál a legegyszerűbb, ha $\operatorname{tg} 15°$-ből számítjuk ki. $\operatorname{tg} 105° = \operatorname{tg}(105° - 180°) = \operatorname{tg}(-75°) = -\operatorname{tg} 75°$. A $\operatorname{ctg} 105°$-ot hasonlóan számíthatjuk ki.

3162. $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$ erre alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, ezután pedig helyettesítsük be a megfelelő nevezetes szögfüggvények értékeit.
$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$, ezt ahhoz hasonlóan alakítsuk át, mint az előzőt.

3163. $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(60° - 45°)$. Alkalmazzuk erre a megfelelő összegzési tételt és a nevezetes hegyesszögek tangenseinek megfelelő értékeit. Majd használjuk fel, hogy $\operatorname{ctg} 15° = \frac{1}{\operatorname{tg} 15°}$!

3164. Használjuk fel, hogy $\sin 75° = \cos 15°$, $\cos 75° = \sin 15°$, $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(135° - 180°) = \operatorname{tg}(-45°) = -\operatorname{tg} 45° = -1$!

3165. $\sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; $\cos 18° = \sin 72° = \frac{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{4}$; $\operatorname{tg} 18° = \operatorname{ctg} 72° = \frac{\sqrt{25 - 10 \cdot \sqrt{5}}}{5}$; $\operatorname{ctg} 18° = \operatorname{tg} 72° = \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{5}}$. Tekintsünk egy olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek szögei 72°; 72°; 36°, a szárainak hossza 1 egység és az alap hossza legyen x egység! Húzzuk meg az egyik 72°-os szög szögfelezőjét! Mutassuk meg, hogy ennek a hosszúsága is x ! Vegyük észre, hogy a szögfelező x és $1-x$ hosszúságú részre osztja fel a szárat. Miért? Alkalmazzuk a szögfelezőtételt: $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$. Ebből határozzuk meg x-et! $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ebből pedig: $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Számítsuk ki az említett egyenlő szárú háromszög magasságát a Pitagorasz-tétellel: $m=\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}$, ebből kiszámíthatjuk cos 18°-ot. A tg 18°-ot a tangens definíciójának és az előző eredmények felhasználásával kaphatjuk. Némely algebrai átalakításokat azért néhol végre kell hajtani, például a nevező gyöktelenítését, ha azokat az eredményeket szeretnénk kapni, amelyeket előbb megadtunk.

3166. $\cos 36°=\cos(2\cdot 18°)=\cos^2 18°=-\sin^2 18°$, másrészt használjuk fel az előző feladatból a megfelelő képleteket.

3167. Mutassuk meg, hogy $\sin 234°=-\cos 36°$, ezt pedig már az előző feladat megoldásában kiszámítottuk. Használjuk fel $\sin 18°$ pontos értékét és a megfelelő szorzás elvégzése után megkapjuk a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát.

3168. Végeredmény: 4 a kifejezés pontos értéke. Használjuk fel, hogy $\cos 290°=\cos(270°+20°)$! Alkalmazzuk erre a megfelelő összegzési tételt és mutassuk meg, hogy $\cos 290°=\cos(270°+20°)==\sin 20°$! Másrészt $\sin 250°=\sin(270°-20°)$, ezt kifejtve a megfelelő összegzési tétellel, kaphatjuk, hogy $\sin 250°=\cos 20°$. Felhasználva az eddigieket, kaphatjuk, hogy a kiszámítandó kifejezés egyenlő a következő kifejezéssel: $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20°}-\frac{1}{\cos 20°}$. Ebből

$$2\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\cos 20°-\sin 20°}{2\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20°-\frac{1}{2}\sin 20°}{2\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°}=4\cdot\frac{\sin 60°\cdot\cos 20°-\cos 60°\cdot\sin 20°}{2\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°}=$$

$$=4\cdot\frac{\sin(60°-20°)}{2\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°}=\ldots=4$$

3169. $\gamma=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$, ezt felhasználva: $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\cdot(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=$

$=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\cdot(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\cdot(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$. Ezután alkalmazzuk a kotangensre való összegzési tételt! Ha ez éppen nem jut eszünkbe, akkor alakítsuk át a kotangenst tangensre és alkalmazzuk a tangensre ismert összegzési tételt.

3170. Használjuk a tangensre ismert összegzési tételt többször is. Számítsuk ki először, hogy $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{7}{24}$, másrészt számítsuk ki, hogy $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$. Ezután mutassuk meg, hogy $\operatorname{tg}(4\alpha+2\beta)=\operatorname{tg}\big(2\cdot(2\alpha+\beta)\big)=\frac{3}{4}$, majd ezután következik, hogy $\operatorname{tg}(5\alpha+2\beta)=$ $=\operatorname{tg}\big((4\alpha+2\beta)+\alpha\big)=1$. Ebből következik, hogy $5\alpha+2\beta=45°+k\cdot 180°$, ahol k tetszőleges egész szám. Mutassuk meg, hogy $0<\alpha<45°$, majd azt, hogy $0<2\alpha<45°$. Hasonlóan mutassuk meg, hogy β, $2\alpha+\beta$ és $4\alpha+2\beta$ is 0° és 45° közé esik, ezért $k=0$.

3171. Számítsuk ki először, hogy $\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{28}}$, ezután pedig $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$ következhet. Alkalmazzuk a tangensre ismert összegzési tételt! Kaphatjuk, hogy $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vegyük figyelembe, hogy $0 < \alpha + \beta < 180°$. Ebből és az előzőből következik, hogy $\alpha + \beta = 30°$.

3172. Számítsuk ki, hogy $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, másrészt $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Majd az utóbbiból $\operatorname{tg}2\beta = \frac{3}{4}$. Majd végül $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = 1$. Mutassuk meg, hogy $0 < \alpha + 2\beta < \pi$, így ezekből következik, hogy $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.

IV

Geometriai feladatok

3173. $\approx 48°11'$; $\approx 96°22'$; $\approx 35°27'$ a háromszög szögei, $\approx 4{,}67$ cm a háromszög ismeretlen oldala. Alkalmazzuk a szinusztételt! Majd alkalmazzuk a $\sin 2\alpha$ képletét.

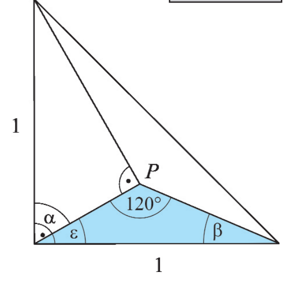
3174. $\approx 51°3'$; $\approx 68°57'$ a háromszög ismeretlen szögei. Alkalmazzuk a szinusztételt! Ezután alkalmazzuk a szögek különbségére a megfelelő összegzési tételt. Kapunk egy egyenletet, amelyben az egyik szög szinusza és koszinusza szerepel. Osszuk el az egyenletet a szög koszinuszával, ekkor olyan egyenletet kapunk, amelyben a szög tangense lesz. Ebből megkaphatjuk a megfelelő szöget.

3175. $\approx 6{,}09$ cm; $\approx 9{,}13$ cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 41°47'$; $\approx 88°13'$ a háromszög ismeretlen szögei. Hasonlóan számíthatjuk ki a szögeket, mint az előző feladatban. Ezután az ismeretlen oldalakat szinusztétellel számíthatjuk ki.

3176. $\approx 0{,}535$ egység a P pont távolsága a derékszögű csúcstól. Számítsuk ki, hogy $PC = \cos\alpha$. Másrészt $\beta = \alpha - 30°$. Alkalmazzuk a szinusztételt: $\frac{PC}{1} = \frac{\sin\beta}{\sin 120°}$. Ebből $\cos\alpha = \frac{\sin(\alpha - 30°)}{\sin 120°}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, utána osszunk $\cos\alpha$-val. Kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$. Ebből számítsuk ki az α szöget, majd ebből pedig a PC szakasz hosszát.

3177. $x = 60$ m-re közelítettük meg a felhőkarcolót. Az út kezdetén α szögben látjuk a felhőkarcolót, ekkor $300\text{ m} + x$ távolságra vagyunk a felhőkarcolótól. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{120}{300 + x}$, menjünk 300 méterrel közelebb a felhőkarcolóhoz: $\operatorname{tg}(\alpha + 45°) = \frac{120}{x}$. Alkalmazzuk erre a megfelelő összegzési tételt. Majd oldjuk meg az egyenletrendszert! x-re másodfokú egyenletet kapunk, amelyet megoldva, kapjuk, hogy $x = 60$.

3176.



3178. $\approx 37{,}76°$; $\approx 113{,}28°$; $\approx 28{,}96°$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 10{,}12$ cm; $\approx 15{,}18$ cm a háromszög ismeretlen oldalai. Alkalmazzuk a szinusztételt! $\frac{2}{3} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$. Az összegzési tétel segítségével írjuk fel a $\sin 3\alpha$ kifejezést $\sin\alpha$, illetve $\cos\alpha$ segítségével, vagy használjuk fel a 3120. *a)* feladat eredményét. Ebből meghatá-

IV

rozhatjuk az α szöget, ebből a β szöget, ezekből pedig a γ szöget. Majd a szinusztételt kétszer felírva, meghatározhatjuk a két ismeretlen oldal hosszúságát.

3179. Nincs ilyen háromszög. Alkalmazzuk a szinusztételt: $\frac{12}{8} = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. Majd fejezzük ki a megfelelő kifejezéseket $\sin\alpha$, illetve $\cos\alpha$ segítségével. Például a következő egyenletet kaphatjuk: $4\cdot\cos^2 x - 3\cdot\cos x - 1 = 0$, ebből olyan x-eket kapunk, amelyekre nem létezik a megfelelő háromszög.

3180. $\approx 71°12'$; $\approx 72°32'$; $\approx 36°16'$ a háromszög ismeretlen szögei. Alkalmazzzuk a szinusztételt! $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 2\beta$, ekkor $\alpha = 180° - 3\beta$. $\frac{8}{5} = \frac{\sin(180° - 3\beta)}{\sin\beta}$. Alakítsuk át ezt úgy, hogy csak $\sin\beta$, illetve $\cos\beta$ legyen az egyenletben. Ezt az összegzési tétel segítségével kaphatjuk meg vagy használjuk fel a 3120. *a)* feladat eredményét. A rendezés után kapjuk, hogy: $\cos^2\beta = 0{,}65$. Ebből kapjuk a $\beta \approx 36°16'$ szöget. S ebből pedig számíthatjuk a többi szöget.

3181. **1. megoldás:** $\alpha_1 \approx 83{,}28°$; $\beta_1 \approx 48{,}13°$; $\gamma_1 \approx 48{,}59°$ a háromszög ismeretlen szögei, $a_1 \approx 15{,}89$ cm; $b_1 \approx 11{,}91$ cm a háromszög ismeretlen oldalai. **2. megoldás:** $\alpha_2 \approx 28°$; $\beta_2 \approx 20{,}6°$; $\gamma_2 \approx 131{,}4°$, $a_2 \approx 7{,}51$ cm; $b_2 \approx 5{,}63$ cm. Legyen $c = 12$ cm, $R = 8$ cm, ekkor a $c = 2\cdot R\cdot\sin\gamma$ képletből kaphatjuk a γ szöget: $\gamma_1 \approx 48{,}59°$, $\gamma_2 \approx 131{,}4°$, $a = 4\cdot x$, $b = 3\cdot x$. Írjuk fel a c oldalra a koszinusztételt! Ebből kapjuk, hogy: $x_1 \approx 3{,}97$, $x_2 \approx 1{,}877$. Ezekből kaphatjuk az ismeretlen oldalakat. Az α szöget például az $a = 2\cdot R\cdot\sin\alpha$ egyenletből határozhatjuk meg.

3182. $\approx 26{,}57°$; $\approx 53{,}13°$; $\approx 100{,}3°$ a háromszög szögei; ≈ 5 cm; 8,94 cm a háromszög ismeretlen oldalai. Legyen m a háromszög 11 cm-es oldalához tartozó magassága. $\frac{m}{3} = \operatorname{tg} 2\alpha$; $\frac{m}{8} = \operatorname{tg}\alpha$. Alkalmazzuk a tg 2α képletét, majd oldjuk meg az egyenletrendszert! Kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. $\left(\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \text{ nem lehet}\right)$ Ebből kapjuk, hogy: $\alpha \approx 26{,}57°$. A háromszög megfelelő oldalait megfelelő szögfüggvénnyel kaphatjuk.

3183. $\gamma = 135°$ a háromszög harmadik szöge. A feltételből következik, hogy $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. Először mutassuk meg, hogy $1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta \neq 0$. Ha ezt megmutattuk, akkor oszthatunk vele. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = 1$, ebből $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$. Ebből következik, hogy $\alpha + \beta = 45°$, s innen $\gamma = 135°$.

3184. **1. eset:** 914,5 cm^2 a trapéz területe. **2. eset:** 85,4 cm^2 a trapéz területe. Legyen m a trapéz magassága. Húzzuk meg a trapéz egyik átlóját! Legyen $\beta + 26°34'$ a hosszabbik alapon fekvő szög. Ekkor $\frac{m}{5} = \operatorname{tg}(\beta + 26°34')$ és $\frac{m}{25} = \operatorname{tg}\beta$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, majd oldjuk meg az egyenletrendszert! Ekkor tg β-ra kapunk egy másodfokú egyenletet, amelyet megoldva, kapjuk, hogy: **1. eset:** $\operatorname{tg}\beta \approx 1{,}4633$, $\beta \approx 55{,}65°$, $m \approx 36{,}58$, $t \approx 914{,}5$ cm^2, **2. eset:** $\operatorname{tg}\beta \approx 0{,}136675$, $\beta \approx 7{,}78°$, $m \approx 3{,}42$ cm, $t \approx 85{,}4$ cm^2.

3185. $\approx 23{,}865°$, $\approx 36{,}135°$, a középponti szög két része. A két szögre a feltétel: (1) $\alpha_1 + \alpha_2 = 60°$. A két megfelelő húrra: $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. Húzzuk meg a megfelelő háromszög magasságait. Ekkor kaphatjuk, hogy $x = 2\cdot r\cdot\sin\frac{\alpha_1}{2}$ és $y = 2\cdot r\cdot\sin\frac{\alpha_2}{2}$. Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy: (2)

IV

$\frac{2}{3} = \frac{\sin\frac{\alpha_1}{2}}{\sin\frac{\alpha_2}{2}}$. Oldjuk meg az (1) és (2) egyeletből álló egyenletrendszert! $\frac{2}{3} = \frac{\sin\left(30° - \frac{\alpha_1}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha_2}{2}}$.
Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! Majd oldjuk meg az egyenletet! Kapjuk, hogy $\alpha_1 \approx 23{,}865°$.

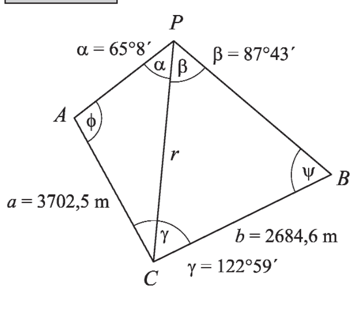
3186. A kifejezés pontos értéke 2. Írjuk fel a szinusztételt kétszer az ABC háromszögre! $\frac{1}{AC} = \frac{\sin 100°}{\sin 20°}$ és $\frac{BC}{1} = \frac{\sin 60°}{\sin 100°}$. Használjuk fel, hogy $\sin 100° = \cos 20°$ és $\sin 20° =$ $= 2\cdot\sin 10°\cdot\cos 10°$. Majd a vége felé használjuk fel, hogy $\cos 10° - \sqrt{3}\cdot\sin 10° =$ $= 2\cdot\sin(30° - 10°)$.

3187. A keresett szögek: 30°; 60°; 90°. Legyenek a háromszög szögei $\alpha - d$, α, $\alpha + d$. Mutassuk meg, hogy $\alpha = 60°$! A feltétel szerint $\sin(60° - d) + \sin 60° + \sin(60° + d) = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, rendezés után kapjuk, hogy $\cos d = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ebből $d = 30°$.

3188. $\frac{3}{\sqrt{14}} : \frac{4}{\sqrt{21}} : \frac{5}{\sqrt{30}}$ vagy más formában $\sqrt{27} : \sqrt{32} : \sqrt{85}$ a háromszög oldalainak aránya. Legyen $\operatorname{tg}\alpha = 3x$, $\operatorname{tg}\beta = 4x$, $\operatorname{tg}\gamma = 5x$. Itt $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(180° - (\alpha + \beta)) = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) =$ $= -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$. Ha ide behelyettesítjük a megfelelő kifejezéseket, akkor x-re kapunk egy egyenletet, amelynek a feladatnak megfelelő megoldása: $x = \sqrt{\frac{1}{5}}$. Ebből kaphatjuk a szögek szinuszait, ha felhasználjuk, hogy: $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$. Majd alkalmazzuk a szinusztételt: $a : b : c =$ $= \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

3189. $PC = r \approx 2193{,}7$ m, a P pont C ponttól való távolsága. Számítsuk ki először, hogy $\varphi + \psi = 84°10'$! Írjuk fel kétszer a szinusztételt: $\frac{r}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ és $\frac{r}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$! Ezekből kapjuk, hogy: $\frac{a\cdot\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{b\cdot\sin\psi}{\sin\beta}$. Helyettesítsük be ide a megfelelő adatokat és kapjuk, hogy $1{,}252\,29\cdot\sin\varphi \approx$ $\approx \sin(84°10' - \varphi)$! Alkalmazzuk a megfelelő összegési tételt, majd osszunk $\cos\varphi$-vel és kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}734\,77$. Ebből határozzuk meg φ-t és helyettesítsük vissza a megfelelő egyenletbe és kapjuk, hogy: $r \approx 2193{,}7$ m.

3189.



A háromszög trigonometriájáról

3190. Hozzuk a feltételt a következő alakra: $\sin\gamma\cdot\cos\gamma=\sin\beta\cdot\cos\beta$, ebből $\sin 2\gamma=\sin 2\beta$. Ebből vonjuk le a megfelelő következtetéseket.

3191. $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$, ebből $\sin\gamma=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$. Így kaphatjuk, hogy $2\cdot\cos\alpha=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\ldots=\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+\cos\alpha$. Ebből $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$. Egy második megoldást kaphatunk, ha alkalmazzuk a szinusztételt a b és a c oldalra, majd alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra.

3192. Végeredmény: Derékszögű a háromszög (és nem egyenlő szárú, hiszen ezt kizártuk.) Alkalmazzuk a szinusztételt! $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\ldots=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$. Ebből: $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$.

3193. $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! Majd szorozzunk a nevezővel! Az átalakítások után $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos^2\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos^2\beta=$ $=\sin\alpha+\sin\beta$, $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\cos\alpha+\cos\beta)=\sin\alpha\cdot(1-\cos^2\beta)+\sin\beta\cdot(1-\cos^2\beta)$,
$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\cos\alpha+\cos\beta)=\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha+\sin\beta)$,
$(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)=0$, $(\sin\alpha+\sin\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=0$.
Ebből $\cos(\alpha+\beta)=0$, mert $(\sin\alpha+\sin\beta)\neq 0$. Ebből következtessünk!

3194. Használjuk fel, hogy: $\sin\gamma=2\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$. Ebből kaphatjuk, hogy $-2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta=$ $=-2\cdot\cos^2\dfrac{\gamma}{2}$. Ebből pedig $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\cdot\cos^2\dfrac{\gamma}{2}$, $-\cos\gamma-\cos(\alpha-\beta)=$ $=-2\cdot\cos^2\dfrac{\gamma}{2}$. Ebből kaphatjuk, hogy $\cos(\alpha-\beta)=1$. Ebből következik, hogy $\alpha-\beta=0$.

3195. $\sin\gamma=\cos\alpha+\cos\beta$, ebből (1) $\sin\gamma=2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, másrészt (2) $\sin\gamma=2\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$. A (2) egyenletből $\sin\gamma=2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Az (1) és (2) egyenletből: $2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot$ $\cdot\left(\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)=0$. Mutassuk meg, hogy $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$ nem állhat fenn. Ebből következik, hogy $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$. Tovább folytatva: $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left(90°-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Ebből **1. eset:** $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=90°-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, innen pedig $\alpha=90°$. **2. eset:** $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=180°-\left(90°-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$, ebből pedig $\beta=90°$.

3196. **1. eset:** $2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, ebből $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=$ $=\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Innen pedig $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$, ebből $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$. Innen következik, hogy $\gamma=90°$.
2. eset: Ha $\gamma=90°$, akkor $\sin\alpha=\cos\beta$ és $\sin\beta=\cos\alpha$, tehát $\sin\alpha+\sin\beta=\cos\alpha+\cos\beta$.

3197. $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$, így $2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2(\alpha+\beta) =$ $= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta$. Ebből $(1-\sin^2\alpha) +$ $+ (1-\sin^2\beta) = \sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta =$ $= \sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta$, $0 = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta +$ $+ \cos^2\beta\cdot(\sin^2\alpha - 1) + \cos^2\alpha\cdot(\sin^2\beta - 1)$, $0 = \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta - \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta$, $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cdot\cos\beta) = 0$. Ebből kaphatjuk, hogy $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = 0$.

3198. $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy: $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma =$

$= \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\big(-\cos(\alpha+\beta)\big) \le \frac{1}{8}$, $0 \le 8\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta) + 1$.

$0 \le 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)\cdot\cos(\alpha+\beta) + 1$,

$0 \le 4\cdot\cos^2(\alpha+\beta) + 4\cdot\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)$.

$0 \le \big(2\cdot\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)^2 + \sin^2(\alpha-\beta)$. Vizsgáljuk meg az egyenlőség esetét is! Azt kapjuk, hogy akkor és csak akkor van egyenlőség, ha a háromszög szabályos.

3199. Használjuk majd fel a koszinuszok összegének a szorzattá alakítására ismert képletet.

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$$

$$+2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) =$$

$$=4\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} = 4\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

3200. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\big(180^\circ - (\alpha+\beta)\big) =$

$$=\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$=1 + 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cdot\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1 + 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$=1 + 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot(-2)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) =$$

$$=1 + 4\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} = 1 + 4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

3201. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\big(180^\circ - (\alpha+\beta)\big) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta +$

$$+\frac{\operatorname{tg}180^\circ - \operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{1 + \operatorname{tg}180^\circ\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \ldots =$$

$$=(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\cdot\frac{-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta =$$

$= \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

3202. $-1 = \cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\big((\alpha+\beta)+\gamma\big) = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\gamma =$ $= \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma - \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma - \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$. Osszuk el az

IV

egyenletet $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$-val, kapjuk, hogy: $\dfrac{-1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\gamma-$ $-\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha$. Ebből kapjuk a bizonyítandó állítást.

3203. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin\left(360°-(\alpha+\beta)\right)=\sin 2\alpha+\sin 2\beta-$
$-\sin(2\alpha+2\beta)=2\cdot\sin\dfrac{2\alpha+2\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{2\alpha-2\beta}{2}-2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=\ldots=$
$=2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)=$
$=2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot(-2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{2}\cdot\left((\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\right)\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{2}\cdot\left((\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)\right)\right)=$
$=-4\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=4\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

3204. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos\left(360°-2\cdot(\alpha+\beta)\right)=$
$=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos\left(2\cdot(\alpha+\beta)\right)=$
$=2\cdot\cos\dfrac{2\alpha+2\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{2\alpha-2\beta}{2}+\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha+\beta)=\ldots=$
$-1+2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)=$
$=-1+2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)=\ldots=$
$-1+4\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\ldots=-1-4\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

3205. $\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta+\operatorname{tg}2\gamma=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\dfrac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}+\dfrac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma}=\dfrac{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta}{\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta}+$
$+\dfrac{\sin\left(360°-2\cdot(\alpha+\beta)\right)}{\cos 2\gamma}=\ldots=\dfrac{\sin\left(2\cdot(\alpha+\beta)\right)}{\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta}+\dfrac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma}=\ldots=\dfrac{-\sin 2\gamma}{\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta}+\dfrac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma}=$
$=\dfrac{-\sin 2\gamma\cdot\cos 2\gamma+\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\sin 2\gamma}{\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\gamma}=\dfrac{-\sin 2\gamma\cdot(\cos 2\gamma-\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta)}{\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\gamma}=$
$\dfrac{-\sin 2\gamma\cdot\left(\cos\left(2\cdot(\alpha+\beta)\right)-\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\right)}{\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\gamma}=\ldots=\dfrac{-2\sin 2\gamma\cdot(-\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta)}{\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\gamma}=$
$=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}2\beta\cdot\operatorname{tg}2\gamma$.

3206. Ismert, hogy $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$ ha a szögek egy háromszög szögei. Vegyük észre, hogy $\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)+\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)=180°$. Ezért a zárójelekben levő szögek is egy háromszög szögei, ezért alkalmazhatjuk ezekre a megfelelő tételt. $\operatorname{tg}\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)+$
$+\operatorname{tg}\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)$.

Ebből $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$. Keressünk másik megoldást! Alkalmazzuk a kotangens definícióját, majd az első két törtet hozzuk közös nevezőre! Alkalmazzuk majd a megfelelő helyeken a megfelelő összegzési tételt! Folytassuk! Jóval hosszabb megoldásra számítsunk, mint az előző.

3207. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\big(180°-(\alpha+\beta)\big)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+$ $+\sin^2(\alpha+\beta)$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, majd végezzük el a négyzetre emelést, alakítsuk át a $\sin^2\beta$-t és a $\sin^2\alpha$-t és kapjuk, hogy: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot(1-\cos^2\beta)+\sin^2\beta+$ $+\cos^2\beta\cdot(1-\cos^2\alpha)+2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\ldots=2-2\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+$ $+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta=2-2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)=$ $2-2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)=\ldots=2\cdot(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)$.

3208. Ismert, hogy: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\cdot(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)$. Így $1-\cos^2\alpha+1-$ $-\cos^2\beta+1-\cos^2\gamma=2+2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$. Tehát $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$ $=1-2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$. Ha van kedvünk és időnk, akkor keressünk másik megoldást, amely nem használja fel az előző tételt. Ez kissé hosszabb megoldás lesz.

3209. Vegyük észre, hogy $\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)+\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)=180°$. Ezért a zárójelben levő szögek is egy háromszög szögei. Másrészt tudjuk, hogy: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cdot$ $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$, tetszőleges háromszög szögeire.

Ide behelyettesítve $\cos^2\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\cos^2\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)+\cos^2\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)=$

$=1-2\cdot\cos\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)$. Ebből kapjuk, hogy:

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\gamma}{2}=1-2\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

3210. Ismert, hogy $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\cdot(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)$, tetszőleges háromszög szögeire. Vegyük észre, hogy $\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)+\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)=180°$. Tehát a zárójelekben levő szögek is egy háromszög szögei. Ezekre alkalmazva a szinuszok négyzetösszegére igazolt tételt, kapjuk, hogy: $\sin^2\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)+\sin^2\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)=$

$=2\cdot\left(1+\cos\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)\right)$. Ebből kapjuk, hogy

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\beta}{2}+\cos^2\dfrac{\gamma}{2}=2\cdot\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)$.

3211. Ismert, hogy $t=\dfrac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$, másrészt alkalmazzuk a-ra is és b-re is a következő tételt: $\alpha=2\cdot R\cdot\sin\alpha$!

3212. Ismert, hogy $t=2\cdot R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$. Másrészt ismert, hogy $t=4\cdot R\cdot r\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$. Majd használjuk fel, hogy $\sin\alpha=2\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$, ezt alkalmazzuk β-ra és γ-ra is!

3213. Ismert, hogy $t=4\cdot R\cdot r\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$, másrészt $r=4\cdot R\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$. Osszuk el a két egyenlet megfelelő oldalait egymással!

3214. Tudjuk, hogy $t = 4 \cdot R \cdot r \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}$, másrészt ismert, hogy $r = 4 \cdot R \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2}$. Osszuk el a második egyenletet az elsővel, majd szorozzuk r-rel, ezután t-vel a kapott egyenlet oldalait. Majd használjuk fel, hogy $t = s \cdot r$.

3215. Ismert, hogy $t = s \cdot r$, másrészt $t = 4 \cdot R \cdot r \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}$.

3216. *a)* A koszinusztételből kapjuk, hogy $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$, másrészt tudjuk, hogy $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$, mert $\dfrac{\alpha}{2} < 90°$. Így $1 - \cos\alpha = \ldots = \dfrac{a^2 - (b-c)^2}{2 \cdot b \cdot c} =$ $= \dfrac{(a+b-c)(a+c-b)}{2 \cdot b \cdot c}$, ezeket felhasználva kapjuk, hogy: $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(a+b-c)(a+c-b)}{4 \cdot b \cdot c}}$, ebből pedig $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)\cdot(s-c)}{b \cdot c}}$. *b)* $1 + \cos\alpha = \ldots = \dfrac{(b+c)^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} =$ $= \dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{2 \cdot b \cdot c}$. Másrészt ismert, hogy $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$, mert $\dfrac{\alpha}{2} < 90°$. Ezekből kapjuk, hogy $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{4 \cdot b \cdot c}}$, innen pedig $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s\cdot(s-a)}{b \cdot c}}$.

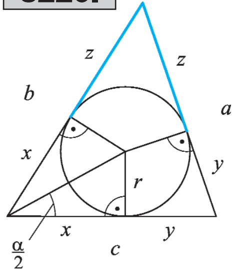
3217. Használjuk fel az előző két feladat végeredményét és használjuk a tangens definícióját!

3218. A szögfelező két részháromszögre osztja az eredeti háromszöget. Írjuk fel, hogy az eredeti háromszög területe egyenlő a részháromszögek területeinek az összegével! $\dfrac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} =$ $= \dfrac{b \cdot f_a \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}}{2} + \dfrac{c \cdot f_a \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}}{2}$. Másrészt használjuk fel, hogy $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

3219. Ismert, hogy $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$, másrészt $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)\cdot(s-c)}{b \cdot c}}$ és $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s\cdot(s-a)}{b \cdot c}}$. Ezekből kaphatjuk a bizonyítandó összefüggést.

3220. Mutassuk meg, hogy $x = s - a$, ehhez használjuk fel, hogy a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. Így $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r}{s-a}$.

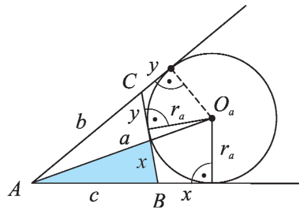
3220.



3221. Ismert, hogy $t = s^2 \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, másrészt tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r}{s-a}$, harmadrészt $t = s \cdot r$.

3222. Ismert, hogy $t = s \cdot r$, másrészt tudjuk, hogy $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$. Egy második megoldást kaphatunk, ha abból indulunk ki, hogy $t=\dfrac{b\cdot c\cdot \sin\alpha}{2}$ és $\sin\alpha=\dfrac{2}{b\cdot c}\cdot$ $\cdot\sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}$. Keressünk további megoldásokat!

3223.



3223. *a)* $t_{ACO_a}=\dfrac{b\cdot r_a}{2}$; $t_{ABO_a}=\dfrac{c\cdot r_a}{2}$; $t_{BCO_a}=\dfrac{a\cdot r_a}{2}$;

$t=t_{ACO_a}+t_{ABO_a}-t_{BCO_a}=\dfrac{b+c-a}{2}\cdot r_a$. Ebből $r_a=\dfrac{t}{s-a}$.

b) $s=c+x$, így $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{r_a}{s}$.

3224. Ismert, hogy $r_a=\dfrac{t}{s-a}$, másrészt $t=s\cdot r$, harmadrészt $t=\sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}$. Induljunk el a $\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}$ kifejezésből és ezt alakítsuk az előzőeket figyelembe véve.

3225. *a)* Tudjuk, hogy $\alpha=2\cdot R\cdot\sin\alpha$. Alkalmazzuk ezt b-re és c-re is, majd adjuk össze a három egyenletet. *b)* Ismert, hogy $\dfrac{r}{R}=4\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$. Másrészt $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$. $=4\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}+1$. Ezekből megkaphatjuk a bizonyítandó állítást.

3226. Írjuk fel az a és b oldalra a szinusztételt! Majd adjunk az egyenlet mindkét oldalához 1-et! Hozzunk közös nevezőre és kapunk egy egyenletet. Induljunk ki újra az előbb felírt szinusztételből, de most az egyenlet mindkét oldalából vonjunk le 1-et. Ezután hozzunk közös nevezőre és így kaptuk a második egyenletet. Osszuk el a második egyenletet az első egyenlettel! Majd használjuk fel, hogy $\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ és $\sin\alpha+\sin\beta=$ $=2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

3227. *a)* Írjuk fel a szinusztételt az a és b oldalra! Adjunk mindkét oldalhoz 1-et, majd hozzunk közös nevezőre. Majd írjuk fel a szinusztételt a b és c oldalra! Ezután szorozzuk össze a kapott két egyenlet megfelelő oldalait! Kapjuk, hogy $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}$. Használjuk fel, hogy $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ és $\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, másrészt $\sin(\alpha+\beta)=$ $=2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. *b)* Induljunk ki az a és b oldalakra felírt szinusztételből, majd mindkét oldalból vonjunk le 1-et, ezután hozzunk közös nevezőre! Hasonló módon járjunk el, mint az *a)* feladatban, csak itt a $\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot használjuk fel.

Trigonometrikus egyenletek II. rész

3228. *a)* Vegyük észre, hogy $f(x) = \sin x$, ha $\sin x \neq 0$, ha pedig $\sin x = 0$, azaz $x = k \cdot \pi$, ahol k tetszőleges egész szám, akkor ezeken a helyeken a függvény nincs értelmezve. *b)* Vegyük észre, hogy $f(x) = \cos x$, ha $\cos x \neq 0$. Ha pedig $\cos x = 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol k tetszőleges egész szám, és ezeken a helyeken a függvény nincsen értelmezve. *c)* Vegyük észre, hogy a függvény $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x$.

3229. *a)* Gondoljuk meg, hogy $f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$.

b) Vegyük figyelembe, hogy $f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$.

c) Alakítsuk át kissé a következő módon: $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right) =$

$= \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Alapvető feladatok

A következőkben szokás szerint k, l, m, n, p, q tetszőleges egész számokat jelöl.

3230. *a)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá a kapott kifejezést! Korábban tanult módszerrel is megoldhatjuk az egyenletet, miszerint
1. eset: $2x = x + k \cdot \pi$; **2. eset:** $2x = \pi - x + l \cdot \pi$.

b) $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladat első megoldását.

c) $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

3231. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Végezzük el a négyzetre emelést, majd használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$! *b)* $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + m \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3232. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Szorozzuk 2-vel! *b)* $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Szorozzunk $\sin x$-szel, majd osszunk 2-vel.

3233. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$. Szorozzuk 2-vel!

3234. $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Szorozzuk 2-vel!

3235. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + p \cdot 2 \cdot \pi$. Rendezzük nullára, alkalmazzuk a tangens definícióját és $\sin 2x$ képletét, majd alakítsuk szorzattá a kifejezést!

3236. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá a kifejezést!

3237. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3238. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd alakítsuk csak szinuszokat tartalmazóvá az egyenletet. Ekkor $\sin x$-re egy másodfokú egyenletet kapunk, melyet könnyen megoldhatunk.

3239. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a kétszeres szögek megfelelő képleteit, majd alakítsuk szorzattá a kifejezést!

3240. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd ezt bontsuk szorzattá. Ezután rendezzük nullára az egyenletet, majd az egész kapott kifejezést alakítsuk szorzattá.

3241. *a)* $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 4 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 4 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + m \cdot 4 \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{4 \cdot \pi}{3} + p \cdot 4 \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

3242. $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + l \cdot 4 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{4 \cdot \pi}{3} + m \cdot 4 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3243. $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 4 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{7 \cdot \pi}{3} + m \cdot 4 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

3244. $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 4 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{3} + m \cdot 4 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző három feladatot.

3245. $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 4 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 4 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző négy feladatot.

3246. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsunk szorzattá!

3247. $x_1 = -\frac{3 \cdot \pi}{8} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét és használjuk fel, hogy: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. A kapott egyenletet osszuk el $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla. Így $\mathrm{tg}\, x$-re egy másodfokú egyenletet kapunk, amelyet könnyen megoldhatunk. Mutassuk meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla!

3248. Az egyenlet azonosság és minden x valós számra fennáll az egyenlőség. Vegyük figyelembe, hogy $\sin(x+\pi) = -\sin x$ és $\cos(x+\pi) = -\cos x$!

3249. $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Alkalmazzuk a kétszeres szögekre vonatkozó megfelelő képleteket, majd alakítsuk szorzattá a megfelelő kifejezést! Csak az egyik tényezőből kapunk valós megoldást.

3250. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\sin 2x$-re való képletet, majd alakítsunk szorzattá!

3251. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\sin 2x$-re való képletet, kapunk egy hiányos negyedfokú egyenletet, amelyet könnyen visszavezethetünk másodfokú egyenletre.

3252. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0{,}9828 + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a kétszeres szögek megfelelő képleteit, majd rendezzük nullára, ezután pedig alakítsuk szorzattá!

3253. $x \approx 0{,}4636 + k \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd a kapott egyenletet osszuk el $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla. Ekkor tg x-re kapunk egy másodfokú egyenletet, amelyet nagyon könnyen megoldhatunk. Mutassuk meg, hogy $\cos 2x$ nem lehet nulla!

3254. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}$. Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióit, a $\sin 2x$ képletét, majd a bal oldalon hozzunk közös nevezőre! Szorozzunk a nevezővel és vegyük észre, hogy a számláló 1-gyel egyenlő.

3255. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióit, majd végezzük el a szorzást. A bal oldalon hozzunk közös nevezőre! Vegyük észre, hogy a számláló értéke 1. Szorozzunk a bal oldal nevezőjével és osszunk 2-vel.

3256. *a)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd rendezzük nullára az egyenletet, ezután pedig alakítsuk szorzattá! Közben használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}2490 + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd a kapott egyenletet osszuk el $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla, kapunk tg x-re egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg. Mutassuk meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla.

3257. $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi$. Hasonló módon oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. Egy második megoldáshoz jutunk, ha felhasználjuk, hogy $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

3258. $x_1 \approx 1{,}6891 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}6891 + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét és ekkor kapunk $\cos x$-re egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg!

3259. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{3} + m \cdot \pi$. Emeljünk ki a két megfelelő tagból $\sqrt{3}$-at, majd alkalmazzuk visszafelé $\cos 2x$ képletét. Ezután alakítsunk szorzattá!

3260. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{7 \cdot \pi}{12} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk visszafelé $\cos 2x$ képletét a bal oldalon, majd rendezzük nullára az egyenletet és ezután alakítsuk szor-

zattá. Az egyik tényező $\sqrt{2}\cdot(\cos x-\sin x)-1=0$, ezt alakítsuk át a következő alakúra: $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos 45°\cdot\cos x-\sin 45°\cdot\sin x=\frac{1}{2}$, ebből $\cos(x+45°)=\frac{1}{2}$.
A továbbiakban is k, l, m, n, p, q, u, v tetszőleges egész számokat jelölnek.

3261. $x_1=\frac{\pi}{10}+k\cdot 2\cdot\pi$; $x_2=\frac{9\cdot\pi}{10}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=-\frac{\pi}{10}+m\cdot 2\cdot\pi$; $x_4=\frac{11\cdot\pi}{10}+n\cdot 2\cdot\pi$; $x_5=\frac{3\cdot\pi}{10}+p\cdot 2\cdot\pi$; $x_6=\frac{7\cdot\pi}{10}+q\cdot 2\cdot\pi$; $x_7=-\frac{3\cdot\pi}{10}+u\cdot 2\cdot\pi$; $x_8=\frac{13\cdot\pi}{10}+v\cdot 2\cdot\pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét és kapunk egy másodfokú egyenletre visszavezethető negyedfokú egyenletet!

IV

3262. $x_1\approx 1{,}2490+k\cdot\pi$; $x_2\approx 0{,}2450+l\cdot\pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd osszuk az egyenletet $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla. $\operatorname{tg} x$-re másodfokú egyenletet kapunk. A végén mutassuk még meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla.

3263. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{4}+l\cdot 2\cdot\pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd osszunk $\cos^4 x$-szel. Ekkor egy olyan negyedfokú egyenletet kapunk, amelyet könnyen másodfokú egyenletre vezethetünk vissza. Mutassuk meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla.

3264. $x_1=k\cdot\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{4}+l\cdot 2\cdot\pi$. Végezzük el a négyzetre emeléseket, majd alkalmazzuk a kétszeres szögekre való megfelelő képleteket, ezután rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

3265. Azonosság, az egyenletnek minden olyan x valós szám a megoldása, amelyre az egyenlet értelmezve van. Vagyis $x\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$.

3266. $x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{6}+l\cdot 2\cdot\pi$. Vegyük észre, hogy $\frac{1+\cos 2x}{2}=\cos^2 x$, ha ezt felhasználjuk, akkor azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3}$.

3267. $x_1=k\cdot\frac{\pi}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{12}+l\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}$; $x_3=-\frac{\pi}{12}+m\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}$; $x_4=\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}$; $x_5=-\frac{\pi}{4}+p\cdot 2\cdot\pi$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, majd szorozzunk a nevezővel, rendezzünk nullára és alakítsunk szorzattá!

3268. $x_1=\pi+k\cdot 2\cdot\pi$; $x_2=\frac{\pi}{6}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=\frac{5\cdot\pi}{6}+m\cdot 2\cdot\pi$. Alakítsuk szorzattá!
$2\cdot\sin x\cdot(\cos x+1)-(\cos x+1)=0$. Folytassuk!

3269. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$; $x_2=\frac{\pi}{6}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=\frac{5\cdot\pi}{6}+m\cdot 2\cdot\pi$. Először használjuk fel, hogy $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, majd rendezzük nullára az egyenletet, ezután alakítsuk szorzattá!
$2\cdot\sin x\cdot(\cos x-\sin x)-(\cos x-\sin x)=0$. Folytassuk!

3270. $x_1=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$; $x_2=\frac{2\cdot\pi}{3}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=-\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\cdot\pi$; $x_4=\frac{4\cdot\pi}{3}+n\cdot 2\cdot\pi$; $x_5=\frac{\pi}{6}+p\cdot 2\cdot\pi$; $x_6=\frac{5\cdot\pi}{6}+q\cdot 2\cdot\pi$; $x_7=-\frac{\pi}{6}+u\cdot 2\cdot\pi$;

$x_8 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + v \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd alakítsuk át például a $\cos^2 x$-et úgy, hogy kicseréljük $1 - \sin^2 x$-re. $16^{\sin^2 x} + 16^{1 - \sin^2 x} = 10$, ebből $16^{\sin^2 x} + \frac{16}{16^{\sin^2 x}} = 10$. Vezessünk be új ismeretlent, legyen $y = 16^{\sin^2 x}$! Ezt helyettesítsük be az egyenletbe, majd szorozzunk a nevezővel, y-ra kapunk egy másodfokú egyenletet, ezt oldjuk meg, majd számítsuk ki x-et!

3271. *a)* $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, majd a rendezés után osszuk az egyenletet $\cos 2x$-szel. Mutassuk meg, hogy $\cos 2x$ nem lehet nulla! *b)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Használjuk fel, hogy $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Ezután hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3272. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióját és szorozzunk a nevezőkkel! Alkalmazzuk visszafelé a kétszeres szögekre vonatkozó megfelelő képleteket! Ezután alakítsuk át az egyenletet úgy, hogy csak a $\cos 2x$ legyen benne szögfüggvény! Kaptunk erre egy másodfokú egyenletet, ezt oldjuk meg.

3273. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd végezzük el a négyzetre emelést! Alakítsuk át a szinuszt koszinuszra! Kaptunk $\cos x$-re egy olyan negyedfokú egyenletet, amelyet másodfokú egyenletre vezethetünk vissza.

3274. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Emeljük négyzetre a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot! Ebből fejezzük ki $(\sin^4 x + \cos^4 x)$-et és helyettesítsük be a feladat egyenletébe! Majd használjuk fel visszafelé $\sin 2x$ képletét! *b)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 3 \cdot \pi$; $x_2 = \pi + l \cdot 3 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 3 \cdot \pi$; $x_4 = 2 \cdot \pi + n \cdot 3 \cdot \pi$. Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatban, csak itt a $\sin^2\frac{x}{3} + \cos^2\frac{x}{3} = 1$ azonosságot emeljük négyzetre. *c)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Az egyenlet bal oldalát alakítsuk szorzattá, felhasználva, hogy $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Ezután használjuk fel még, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3275. *a)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$. Hasonlóan kezdhetjük el, mint a 3274. *a)* feladatot. *b)* $x_1 \approx 0{,}4107 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}1601 + l \cdot \pi$. Hasonlóan kezdhetjük el, mint a 3274. *a)* feladatot. Kapunk $\sin 2x$ -re egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg.

3276. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Használjuk fel a tangens és a kotangens definícióját, majd szorozzunk a nevezőkkel! Használjuk fel visszafelé $\sin 2x$ képletét, ezenkívül a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot! Egy második megoldásnál fejezzünk ki a $\operatorname{ctg} 2x$ -et $\operatorname{tg} x$-szel!

3277. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$. Fejezzük ki $\operatorname{tg} 2x$ -et $\operatorname{tg} x$-szel! Majd alakítsuk szorzattá az egyenletet!