2229. Egy r sugarú gömb köré írt kocka éle $2r$, az r sugarú gömbbe írt kocka éle $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$.

$$\underline{\underline{V_2 - V_1}} = (2r)^3 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^3 = \underline{\underline{\frac{8\left(9-\sqrt{3}\right)}{9}r^3}}.$$

2230. Egy r sugarú gömb köré írt kocka éle $2r$, az r sugarú gömbbe írt kocka éle $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$.

$$\underline{\underline{A_2 - A_1}} = 6\,(2r)^2 - 6\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 = \underline{\underline{16r^2}}.$$

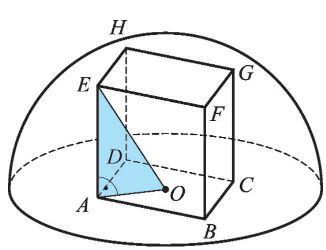
2231. Legyen a külső kocka éle a, a belső kocka éle b, a gömb sugara R. Tekintsük a négy él felezőpontjára illeszkedő síkmetszetet és az átlós síkmetszetet. A 2228/I. ábra és a 2228/II. ábra jelöléseit használjuk: $a = 2R$ és $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$. A 2229. feladat alapján a két kocka térfogatának különbsége: $V = V_2 - V_1 = \frac{8\left(9-\sqrt{3}\right)}{9}R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{9V}{8\left(9-\sqrt{3}\right)}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V\left(9+\sqrt{3}\right)}{26}}}}$;

$$a = \sqrt[3]{\frac{3V\left(9+\sqrt{3}\right)}{26}};\ b = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{\frac{3V\left(9+\sqrt{3}\right)}{26}} = \sqrt[3]{\frac{\left(3\sqrt{3}+1\right)V}{26}}.$$

2232. Legyen a gömb sugara R, a beírt kocka éle b, a körülírt kocka éle k. Tekintsük az átlós metszetet, ami b és $b\sqrt{2}$ oldalú, $2R$ átlójú téglalap, valamint a négy él felezőpontjára illeszkedő síkmetszetet, ami $k = 2R$ oldalú négyzet. A beírt kocka testátlója az adott gömb egyik átmérője: $2R = b\sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow A_{\text{beírt kocka}} = 6 \cdot \frac{4R^2}{3} = 8R^2$. A körülírt kocka éle egyenlő az adott gömb átmérőjével: $2R = k \Rightarrow A_{\text{körülírt kocka}} = 6 \cdot 4R^2 = 24R^2$. A feltétel szerint $A_{\text{körülírt kocka}} - A_{\text{beírt kocka}} = F \Rightarrow 16R^2 = F \Rightarrow R = \underline{\underline{\frac{\sqrt{F}}{4}}} \Rightarrow b = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3F}}{6}}}$ és $k = \underline{\underline{\frac{\sqrt{F}}{2}}}$.

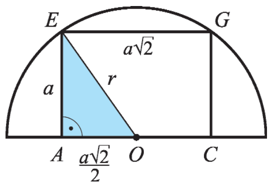
2233. Legyen a kocka éle a, a beírt gömb sugara r, a körülírt gömb sugara R. A beírt gömb sugara a kocka élének fele: $r = \frac{a}{2}$. A körülírt gömb sugara a kocka testátlójának fele: $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A feltétel szerint: $R - r = d \Rightarrow a = \left(\sqrt{3}+1\right)d$. A kocka felszíne: $A = 6 \cdot a^2 = \underline{\underline{12\left(2+\sqrt{3}\right)d^2}}$. A kocka térfogata: $V = a^3 = \underline{\underline{2\left(3\sqrt{3}+5\right)d^3}}$.

2234/I.



2234. Legyen a félgömbbe írt kocka éle a. Az átlós metszetet tekintve a félgömb sugara az EAO derékszögű háromszög átfogója. Pitagorasz-tétel szerint: $a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow$

2234/II.



$\Rightarrow \underline{\underline{a}} = r\sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{r\sqrt{6}}{3}}}$. A beírt kocka felszíne: $A = 6a^2 = 6\cdot\frac{r^2\cdot 6}{9} = \underline{\underline{4r^2}}$. A beírt kocka térfogata: $V = a^3 = \frac{r^3\cdot 6\cdot\sqrt{6}}{27} = \frac{2\sqrt{6}}{9}r^3$.

2235. 2234/I. és 2234/II. ábra jelöléseivel: A félgömb sugara az ábrából kiemelt derékszögű háromszög átfogója. Pitagorasz-tétel a fenti háromszögre: $r^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow r = a\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r$. A kocka térfogata: $V = a^3 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,r^3 \Rightarrow r = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{V}}}$.

2236. A téglatest élei: $a = x$, $b = 2x$, $c = 3x$. A téglatest testátlója a köré írt gömb átmérője: $4r^2 = a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + 4x^2 + 9x^2 \Rightarrow x = r\cdot\sqrt{\frac{2}{7}} = r\cdot\frac{\sqrt{14}}{7}$. A téglatest élei: $\underline{\underline{a = \frac{\sqrt{14}}{7}r}}$, $\underline{\underline{b = \frac{2\sqrt{14}}{7}r}}$, $\underline{\underline{c = \frac{3\sqrt{14}}{7}r}}$.

2237. A téglatest élei: a, b, c. Az oldallapok területei: $t_1 = ab$, $t_2 = bc$, $t_3 = ac$. A feltételek szerint: $bc = 2ab$ és $ac = 3ab \Rightarrow c = 2a = 3b \Rightarrow a = \frac{3}{2}b$. A téglatest testátlója a köré írt gömb átmérője: $(2r)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 4r^2 = \frac{9}{4}b^2 + b^2 + 9b^2 \Rightarrow 4r^2 = \frac{49}{4}b^2 \Rightarrow \underline{\underline{b = \frac{4}{7}r}}$; $\underline{\underline{a = \frac{6}{7}r}}$; $\underline{\underline{c = \frac{12}{7}r}}$.

2238. Legyen a négyzetes oszlop alapéle a, oldaléle b. $s = 8a + 4b \Rightarrow b = \frac{s - 8a}{4}$. A négyzetes oszlop testátlója a köré írt gömb átmérője: $4r^2 = a^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 + \frac{(s - 8a)^2}{16} \Rightarrow$ $\Rightarrow 96a^2 - 16as + s^2 - 64r^2 = 0$. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = 64\cdot(384r^2 - 2s^2)$.
1. eset: nincs megoldás, ha $384r^2 - 2s^2 < 0$, azaz $8\cdot\sqrt{3} < s$.
2. eset: egy megoldás van, ha $s = 8\cdot\sqrt{3}\,r$, ekkor $\underline{\underline{a = b = \frac{s}{12}}}$, a négyzetes oszlop egy kocka.
3. eset: két megoldás van, ha $s < 8\cdot\sqrt{3}$. Ekkor $\underline{\underline{a_{1,2}}} = \frac{16s \pm 8\cdot\sqrt{384r^2 - 2s^2}}{192} = \frac{2s \pm \sqrt{384r^2 - 2s^2}}{24}$ és $\underline{\underline{b_{1,2}}} = \frac{s \mp \sqrt{384r^2 - 2s^2}}{12}$.

2239. Legyenek a téglatest egy csúcsba futó élei a, b és c. A feltétel szerint $4a + 4b + 4c = s$. A téglatest testátlója a köré írt gömb átmérője: $4r^2 = a^2 + b^2 + c^2$. $4r^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = \left(\frac{s}{4}\right)^2 - 2(ab + bc + ac) \Rightarrow 2(ab + bc + ac) = \left(\frac{s}{4}\right)^2 - 4r^2$. A téglatest felszíne: $A = 2ab + 2bc + 2ac = \frac{s^2}{16} - 4r^2 = \underline{\underline{\frac{s^2 - 64r^2}{16}}}$. Nincs ilyen téglatest, ha $s \le 8r$.

2240. Legyenek a téglatest egy csúcsba futó élei a, b és c; a köré írt gömb sugara pedig R. A feltétel szerint $4a + 4b + 4c = 4(a + b + c) = s$ és $2ab + 2bc + 2ac = F$. $\frac{s^2}{16} = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = a^2 + b^2 + c^2 + F$. A gömb átmérője a téglatest testátlója: $(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. A fentieket egybevetve $(2R)^2 = \frac{s^2}{16} - F \Rightarrow R = \underline{\underline{\frac{\sqrt{s^2 - 16F}}{8}}}$. Nincs ilyen téglatest, ha $s \le 4\sqrt{F}$.

2241. Az 1837. feladatban, valamint az 1838. feladatban bizonyítottuk:
Az a élű szabályos tetraéder köré írható gömb sugara $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; az a' élű szabályos tetraéderbe írt gömb sugara $\frac{a'\sqrt{6}}{12}$. A fentieket felhasználva: az R sugarú gömb köré írt szabályos tetraéder éle $a' = \frac{12R}{\sqrt{6}}$. Az R sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle $a = \frac{4R}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}a'$. Bármely két szabályos tetraéder hasonló, a térfogatarány kiszámítható a $V : V' = (a : a')^3$ arány alapján. $V : V' = \left(\frac{1}{3}a' : a'\right)^3 = (1 : 3)^3$. Egy gömbbe és a gömb köré írt szabályos tetraéderek $\underline{\underline{\text{térfogatának aránya } 1 : 27}}$.

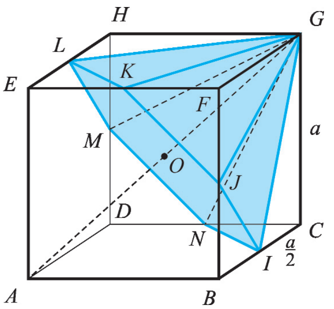
2242. Legyen a gömb sugara R, az oktaéder éle a, a tetraéder éle b. A szabályos oktaéder két átellenes csúcsának távolsága a köré írt gömb átmérője. Tekintsük az oktaéder négy oldalélére illeszkedő síkmetszetét, ami négyzet: $(2R)^2 = 2a^2 \Rightarrow a = R\sqrt{2}$. Az oktaéder térfogata két egybevágó szabályos négyoldalú gúla térfogatának összege: $V = 2 \cdot \frac{a^2 R}{3} = \frac{4}{3}R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4}}$.
A b élű szabályos tetraéder köré írt gömb sugara az 1837. feladat alapján: $R = \frac{\sqrt{6}\,b}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow b = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$ a tetraéder éle . A b élű szabályos tetraéder magassága $\frac{b\sqrt{6}}{3}$, térfogata:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}b^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}R\right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3 \Rightarrow \underline{\underline{V_t}} = \frac{8\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{3V}{4} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{9}}}V.$$

2243. Felhasználjuk az 1837. feladat és az 1838. feladat eredményeit: az R sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle $a = \frac{4}{\sqrt{6}}R$. Az a élű szabályos tetraéderbe írt gömb sugara $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a = \frac{1}{3}R$. Bármely két gömb hasonló, ezért: $A_R : A_r = (R : r)^2 = \underline{\underline{9 : 1}}$.

2244. Legyen az r sugarú gömbbe írt kocka éle a, ebbe a kockába írt gömb sugara ϱ, a ϱ sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle pedig b. Az r sugarú gömbbe írt kocka testátlója a gömb átmérője. $\Rightarrow 2r = a\sqrt{3}$. Az a élű kockába írt gömb sugara a kocka élének fele. $\Rightarrow \varrho = \frac{a}{2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

2246.



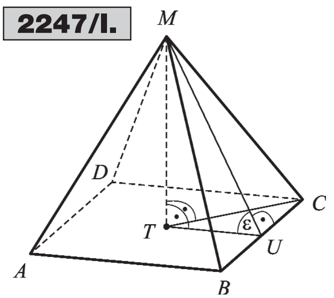
A ϱ sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle (l. 1837. feladat) $b=\frac{4\varrho}{\sqrt{6}}=\frac{4r}{3\sqrt{2}}$. A b élű szabályos tetraéder felszíne és térfogata: $A=\sqrt{3}\cdot b^2 \Rightarrow \underline{\underline{A}}=\underline{\underline{\frac{8\sqrt{3}}{9}}}r^2$ és $V=\frac{\sqrt{2}}{12}b^3 \Rightarrow \underline{\underline{V}}=\underline{\underline{\frac{8}{81}}}r^3$.

2245. Legyen az a élű kocka köré írt gömb sugara r, e köré a gömb köré írt szabályos tetraéder éle b, a tetraéder köré írt gömb sugara R, végül az R sugarú gömb köré írt szabályos oktaéder éle c. Az r sugarú gömbbe írt kocka testátlója a gömb átmérője. $\Rightarrow 2r=a\sqrt{3}$. Az a élű kocka köré írt gömb sugara feleakkora, mint a kocka testátlója. $\Rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Az r sugarú gömb köré írt szabályos tetraéder éle (l. 1838. feladat): $b=\frac{12}{\sqrt{6}}r$. A b élű szabályos tetraéder köré írt gömb sugara (l. 1837. feladat): $R=\frac{\sqrt{6}}{4}b$. Az R sugarú gömb köré írt szabályos oktaéder éle (l. 1917. feladat): $c=\sqrt{6}R$. A c élű szabályos oktaéder térfogata (l. 2242. feladat): $V=\frac{\sqrt{2}}{3}c^3$. $\Rightarrow V=\underline{\underline{\frac{243}{2}}}a^3$.

2246. Felhasználjuk az 1691. feladat, az 1695. feladat és az 1692. feladat eredményeit. Az ábra jelöléseivel: I; J; K; L; M és N élfelező pontok egy síkban vannak. Síkjuk merőlegesen felezi a testátlót; $IJKLMN$ szabályos hatszög; $GI=GJ=\ldots=GN=AI=AJ=\ldots=AN$. Az $IJKLMNG$ test olyan szabályos hatszög alapú szabályos gúla, aminek a magassága $GO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, alapéle $IJ=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, oldaléle $GI=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ és oldallapjainak magassága $\frac{3a}{2\sqrt{2}}$. A keresett gömb, amely érinti a kocka három lapját és a metsző síkot, éppen a szabályos hatszög alapú gúlába beírható (ϱ sugarú) gömb, hiszen a gúla alaplapját és három oldallapját érinti.

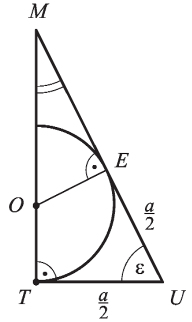
$V_{\text{gúla}}=\frac{A_{\text{gúla}}\cdot\varrho}{3} \Rightarrow \varrho=\frac{3V_{\text{gúla}}}{A_{\text{gúla}}}$. $V_{\text{gúla}}=\frac{1}{3}\cdot T_a\cdot m=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot T_{IJO}\cdot GO=\frac{3}{8}a^3$. $A_{\text{gúla}}=T_a+6T_{IJG}=$ $=\frac{3\sqrt{3}+9}{4}a^2$. $\Rightarrow \underline{\underline{\varrho}}=\underline{\underline{\frac{3-\sqrt{3}}{4}}}a$.

2247/I.

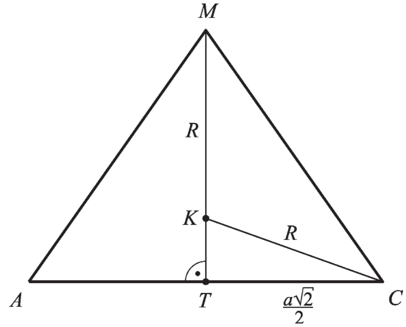


2247. Legyen a gúla alapéle a, magassága m, köré írt gömbjének sugara R, beírt gömbjének sugara r, az oldallap és az alaplap hajlásszöge ε. Tekintsük a gúlának az alapél felezőmerőleges síkjával vett metszetét (2247/II. ábra). $\frac{2m}{a}=\operatorname{tg}\varepsilon$. Pitagorasz-tétel az MTU derékszögű háromszögben: $MU^2=m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$. $MOE\triangle \sim MUT\triangle$, mert szögeik páronként

2247/II.



2247/III.



egyenlők. $\Rightarrow \dfrac{m-r}{r} = \dfrac{MU}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{r = \dfrac{ma}{\sqrt{4m^2 + a^2} + a}}}$. Tekintsük az oldalélt tartalmazó tengelymetszetet (2247/III. ábra). Pitagorasz-tétel a KTC derékszögű háromszögben: $KT^2 = R^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$ és $m = R + KT \Rightarrow m - R = \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{R = \dfrac{m}{2} + \dfrac{a^2}{4m}}}$. A feladat feltételei szerint: $R = 3r \Rightarrow \dfrac{m}{2} + \dfrac{a^2}{4m} = \dfrac{3ma}{\sqrt{4m^2 + a^2} + a} \Rightarrow \dfrac{10\dfrac{m^2}{a^2} - 1}{2\dfrac{m^2}{a^2} + 1} = \sqrt{4\dfrac{m^2}{a^2} + 1}$. Ebből $\dfrac{2m}{a} = \operatorname{tg} \varepsilon = x$ (ahol $x > 0$, mert $0 < \varepsilon < 90°$, hiszen két sík hajlásszöge) jelölést felhasználva: $\dfrac{5x^2 - 2}{x^2 + 2} = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow 0 = x^6 - 20x^4 + 28x^2 = x^2\left(x^4 - 20x^2 + 28\right)$. Az egyenlet pozitív megoldásai: $x_1 = \sqrt{10 + 6\sqrt{2}} = \operatorname{tg} \varepsilon_1$ és $x_2 = \sqrt{10 - 6\sqrt{2}} = \operatorname{tg} \varepsilon_2 \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon_1 \approx 76{,}91°}}$, illetve $\underline{\underline{\varepsilon_2 \approx 50{,}91°}}$.

2248. Felhasználjuk, hogy az R sugarú gömbbe írt egyenlő oldalú henger átmérője: $a = \dfrac{2R}{\sqrt{2}}$; az R sugarú gömbbe írt egyenlő oldalú kúp alkotója: $b = \sqrt{3}R$.

a) $A_{henger} = 2\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \pi + 2\left(\dfrac{a}{2}\right)\pi a = 3\pi R^2$. $A_{gömb} = 4\pi R^2$. $A_{kúp} = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \pi + \left(\dfrac{b}{2}\right)\pi b = \dfrac{9\pi}{4} R^2$.

$\underline{\underline{A_{henger}}} = 3\pi R^2 = \sqrt{4\pi R^2 \cdot \dfrac{9\pi}{4} R^2} = \underline{\underline{\sqrt{A_{gömb} \cdot A_{kúp}}}} \Rightarrow$ A henger felszíne mértani közepe a gömb és a kúp felszínének. *b)* $V_{henger} = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \pi a = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} R^3$. $V_{gömb} = \dfrac{4\pi}{3} R^3$. $V_{kúp} = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \pi \cdot \left(\dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24} b^3 = \frac{3\pi}{8} R^3$. $\underline{\underline{V_{\text{henger}}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} R^3 = \sqrt{\frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{3\pi}{8} R^3} = \underline{\underline{\sqrt{V_{\text{gömb}} \cdot V_{\text{kúp}}}}} \Rightarrow$ A henger térfogata mértani közepe a gömb és a kúp térfogatának.

2249. Felhasználjuk, hogy az R sugarú gömb köré írt egyenlő oldalú henger átmérője: $a = 2R$; az R sugarú gömb köré írt egyenlő oldalú kúp alkotója: $b = 2 \cdot \sqrt{3}R$.

a) $A_{\text{henger}} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + 2\left(\frac{a}{2}\right)\pi a = 6\pi R^2$. $A_{\text{gömb}} = 4\pi R^2$. $A_{\text{kúp}} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi + \left(\frac{b}{2}\right)\pi b = 9\pi R^2$.

$\underline{\underline{A_{\text{henger}}}} = 6\pi R^2 = \sqrt{4\pi R^2 \cdot 9\pi R^2} = \underline{\underline{\sqrt{A_{\text{gömb}} \cdot A_{\text{kúp}}}}} \Rightarrow$ A henger felszíne mértani közepe a gömb és a kúp felszínének.

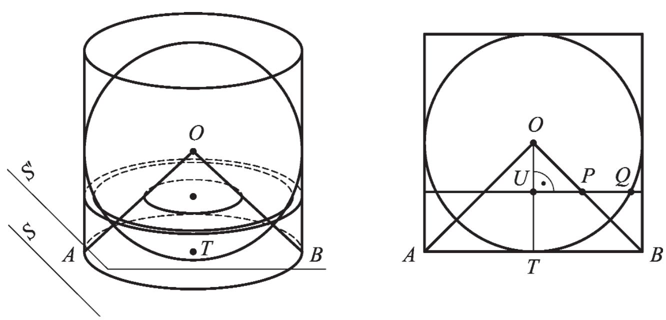
b) $V_{\text{henger}} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi a = 2\pi R^3$. $V_{\text{gömb}} = \frac{4\pi}{3} R^3$. $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = 3\pi R^3$. $\underline{\underline{V_{\text{henger}}}} = 2\pi R^3 =$

$= \sqrt{\frac{4\pi}{3} R^3 \cdot 3\pi R^3} = \underline{\underline{\sqrt{V_{\text{gömb}} \cdot V_{\text{kúp}}}}} \Rightarrow$ A henger térfogata mértani közepe a gömb és a kúp térfogatának.

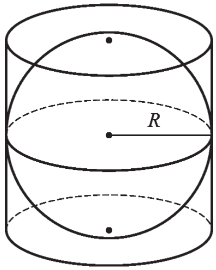
2250. Legyen a metsző sík d távolságra az O középponttól. Legyen a gömb sugara R, ekkor a henger átmérője $2R$. Tekintsük a henger egyik tengelymetszetét. $OT = TB = R$, mert $ABO\triangle$ egyenlő szárú derékszögű háromszög. $OUP\triangle \sim OTB\triangle \Rightarrow OU = UP = d$, azaz a kúp síkmetszet körének sugara d. Pitagorasz-tétel az OUQ derékszögű háromszögben: $UQ^2 + d^2 = R^2 \Rightarrow$ A gömb síkmetszet körének sugara $\sqrt{R^2 - d^2}$. A henger síkmetszet körének sugara R. A síkmetszetek területe: $T_{\text{kúp}} = d^2\pi$, $T_{\text{gömb}} = \left(\sqrt{R^2 - d^2}\right)^2 \pi = \left(R^2 - d^2\right)\pi$, $T_{\text{henger}} = R^2\pi$. Tehát fennáll a $T_{\text{kúp}} + T_{\text{gömb}} = T_{\text{henger}}$ egyenlőség.

2251. A gömb köré írt poliéder minden lapjára olyan gúlát állítunk, amelynek az alaplappal szemközti csúcsa a gömb középpontja. Ezek a gúlák egyszeresen és hézagmentesen kitöltik a poliédert, így térfogatösszegük egyenlő a poliéder térfogatával. Legyen a gúlák alapterülete t_i, magassága r. $V_{\text{poliéder}} = \frac{1}{3} t_1 r + \frac{1}{3} t_2 r + \ldots + \frac{1}{3} t_n r = \frac{1}{3} r \cdot \left(t_1 + t_2 + \ldots + t_n\right) = \frac{1}{3} r \cdot A_{\text{poliéder}}$, hiszen

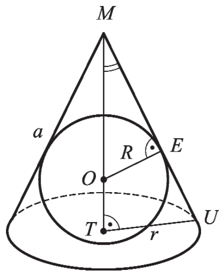
2250.



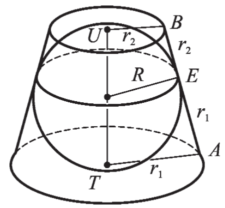
2252/I.



2252/II.



2252/III.



a gúlák alaplapjainak területösszege éppen a poliéder felszíne. $V_{\text{poliéder}} = \dfrac{1}{3} r \cdot A_{\text{poliéder}} \Rightarrow$ A felszín és a térfogat aránya adott r sugarú gömb esetén állandó: $\underline{\underline{\dfrac{A_{\text{poliéder}}}{V_{\text{poliéder}}} = \dfrac{3}{r}}}$.

2252. Adott R sugarú gömb köré egyféle egyenes körhenger írható: $A_{\text{henger}} = 2R^2\pi + 2R\pi \cdot 2R = 6R^2\pi$. $V_{\text{henger}} = R^2\pi \cdot 2R = 2R^3\pi$. $A_{\text{henger}} : V_{\text{henger}} = 6R^2\pi : 2R^3\pi = \underline{\underline{3 : R}}$. Adott R sugarú gömb köré írt egyenes körkúpok esetén: $MOE\triangle \sim MUT\triangle$, mert szögeik egyenlők $\Rightarrow \dfrac{MO}{OE} = \dfrac{MU}{TU} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{MT - R}{R} = \frac{MU}{r} \Rightarrow \frac{m - R}{R} = \frac{a}{r} \Leftrightarrow \frac{a + r}{mr} = \frac{1}{R}. \qquad A_{\text{kúp}} = r^2\pi + r\pi a. \qquad V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot m.$$

$A_{\text{kúp}} : V_{\text{kúp}} = (r^2\pi + r\pi a) : \left(\dfrac{1}{3} r^2 \pi m\right) = (r + a) : \left(\dfrac{1}{3} rm\right) = \underline{\underline{3 : R}}$. Adott R sugarú gömb köré írt egyenes csonkakúpok esetén: a csonkakúp alkotója $a = r_1 + r_2$, magassága $m = 2R$.

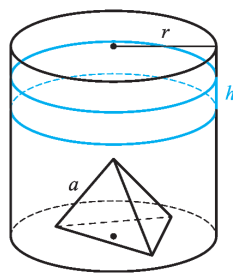
$$A_{\text{csonkakúp}} = \pi\left[r_1^2 + a\left(r_1 + r_2\right) + r_2^2\right] = 2\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right).$$

$$V_{\text{csonkakúp}} = \frac{1}{3}\pi m\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) = \frac{2\pi R}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right).$$

$$\underline{\underline{\frac{A_{\text{csonkakúp}}}{V_{\text{csonkakúp}}}}} = \frac{2\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}{\frac{2\pi R}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)} = \underline{\underline{3 : R}}.$$

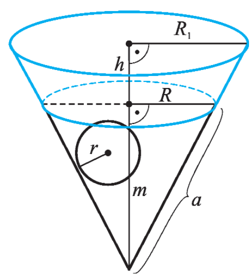
Mindegyik esetben $A : V = 3 : R$.

2253.



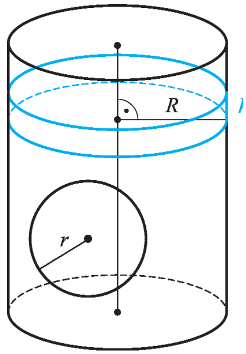
2253. *a)* $V_t = \dfrac{\sqrt{2}}{12} a^3 = r^2\pi h \Rightarrow h = \dfrac{125\sqrt{2}}{12 \cdot 16 \cdot \pi} \approx \underline{\underline{0{,}29\ \text{cm}}}$. *b)* 2 dm átmérőjű hengerben 8 dm magasságig víz van. $\Rightarrow$ Belefér a gömb a vízbe, ezért $V_{\text{víz}} = 1^2 \cdot \pi \cdot h = \dfrac{9}{16}\pi = V_{\text{gömb}} \Rightarrow h = \dfrac{9}{16} = 0{,}56$. A vízszint $\underline{\underline{0{,}56\ \text{dm}}}$-t emelkedik és $\underline{\underline{8{,}56\ \text{dm}}}$ magasan fog állni.

2254.

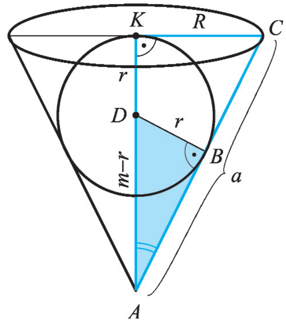


2254. Egyenlő oldalú kúp: $a = 2R \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{3}}{3} m$. Hasonlóság miatt: $R_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(m + h)$. A gömb térfogata egyenlő a két kúp térfogatának

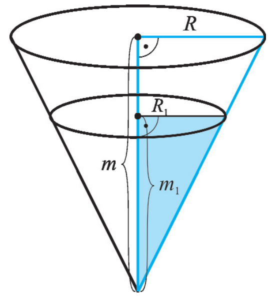
2255.



2256.



2257.



különbségével: $\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{1}{3}R_1^2\cdot(m+h)\pi-\frac{1}{3}R^2m\pi\Rightarrow 4r^3=\frac{1}{3}(m+h)^3-\frac{1}{3}m^3\Rightarrow 12r^3+m^3=$ $=(m+h)^3\Rightarrow h=\underline{\underline{\sqrt[3]{12r^3+m^3}-m}}$.

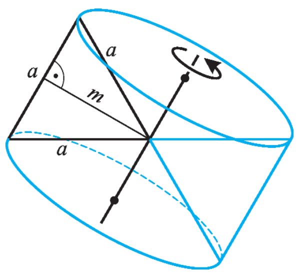
2255. $\frac{4}{3}r^3\pi=R^2\pi h\Rightarrow r^3=\frac{3}{4}R^2h\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{75}{4}}\Rightarrow 2r\approx\underline{\underline{5{,}3\text{ cm}}}$.

2256. Egyenlő oldalú kúp: $a=2R\Rightarrow m=\sqrt{3}R$. $AKC\triangle\sim ABD\triangle\Rightarrow KC:AC=DB:DA\Rightarrow$ $\Rightarrow m-r=2r\Rightarrow m=3r$, azaz $\sqrt{3}\cdot R=3r\Rightarrow R=\sqrt{3}r$. A szükséges víz térfogata: $V=V_k-V_g=$ $=\frac{1}{3}R^2\pi m-\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{5}{3}r^3\pi\Rightarrow V\approx\underline{\underline{41{,}89\text{ cm}^3}}$.

2257. A 2256. ábra jelöléseit használva az egyenlő oldalú kúpra: $a=2R\Rightarrow m=\sqrt{3}R$. $AKC\triangle\sim ABD\triangle\Rightarrow KC:AC=DB:DA\Rightarrow m-r=2r\Rightarrow m=3r$, azaz $\sqrt{3}R=3r\Rightarrow R=\sqrt{3}r$. A beleöntött víz térfogata: $V=V_k-V_g=\frac{1}{3}R^2\pi m-\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{5}{3}r^3\pi$. Hasonlóság miatt: $R:m=$ $=R_1:m_1\Rightarrow R_1=\frac{\sqrt{3}}{3}m_1$. $V=\frac{1}{3}R_1^2\cdot\pi m_1=\frac{5}{3}r^3\pi\Rightarrow m_1=\underline{\underline{r\cdot\sqrt[3]{15}}}$.

Síkidomok forgatásával nyert testek

2259.



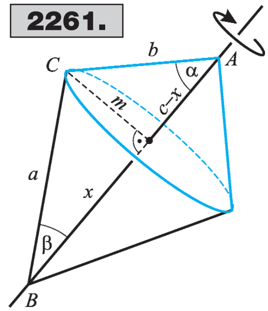
2258. A keletkezett test két darab $m=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$ sugarú, $\frac{a}{2}$ magasságú kúpból áll. $V=2V_k=\underline{\underline{\frac{a^3\pi}{4}}}$. $A=2t_p=\sqrt{3}a^2\pi$.

2259. $m=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$. A keletkezett testet megkapjuk, ha egy hengerből kiveszünk két kúpot.

$V=V_h-2V_k=\frac{1}{2}\cdot a^3\pi\Rightarrow V\approx\underline{\underline{6434\text{ cm}^3}}$.

$A=2\cdot t_{kp}+t_{hp}=2\sqrt{3}a^2\pi\Rightarrow A\approx\underline{\underline{2786\text{ cm}^2}}$.

2261.



2260. Legyen a háromszög alaphoz tartozó magassága m_1, a szárhoz tartozó magassága m_2. A háromszög hegyesszögű. Az alap körül forgatva két egybevágó, közös alapkörű kúp keletkezik. Sugaruk m_1, alkotójuk 25 cm, magasságuk 15 cm. A szár körül forgatva két közös alapkörű kúp adódik. Sugaruk m_2, magasságuk x cm, illetve $(25 - x)$ cm, alkotójuk 25 cm, illetve 30 cm.

$am_1 = bm_2$. $V_1 = 2\frac{1}{3}m_1^2 \cdot \pi\frac{a}{2} = \frac{1}{3}m_1^2 \cdot \pi \cdot a$ és $V_2 = \frac{1}{3}m_2^2 \cdot \pi x + \frac{1}{3}m_2^2 \cdot \pi(b - x) = \frac{1}{3}m_2^2 \cdot \pi b = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{b}m_1^2 \cdot \pi \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{a} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$.

$A_1 = 2m_1 b\pi$ és $A_2 = m_2 b\pi + m_2 a\pi = m_2(a + b)\pi = \frac{a}{b}m_1(a + b)\pi \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{2b^2}{a(a + b)} = \underline{\underline{\frac{25}{33}}}$.

2261. A háromszög hegyesszögű ⇒ a keletkezett két kúp az alapkör síkjának két oldalán van. $m = b \cdot \sin\alpha$. $V = \frac{1}{3}m^2 \cdot \pi x + \frac{1}{3}m^2 \cdot \pi(c - x) = \frac{1}{3} \cdot (b \cdot \sin\alpha)^2 \cdot \pi c \Rightarrow V \approx \underline{\underline{188{,}3\,\text{dm}^3}}$.

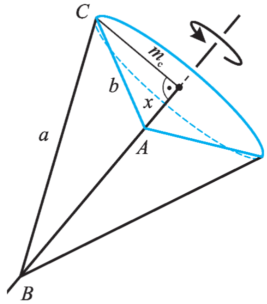
$A = ma\pi + mb\pi = m(a + b)\pi$ és koszinusztételből a-t kiszámolhatjuk: $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow A \approx \underline{\underline{218{,}3\,\text{dm}^2}}$.

2262. Tekintsük a 2261. ábrát. A háromszög tompaszögű, így leghosszabb oldala körül forgatva a keletkezett két kúp az alapkör síkjának két oldalán van. Az $ABC\triangle$ területe: $\frac{1}{2}mc = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \Rightarrow m \approx 22{,}47$ cm. $V = \frac{1}{3}m^2 \cdot \pi x + \frac{1}{3} \cdot m^2 \cdot \pi(c - x) = \frac{1}{3} \cdot m^2 \cdot \pi c \Rightarrow$ $\Rightarrow V \approx \underline{\underline{32{,}25\,\text{dm}^3}}$. $A = mb\pi + ma\pi = m(a + b)\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{53{,}65\,\text{dm}^2}}$.

2263. Tekintsük a 2261. ábrát. Két forgáskúp keletkezik, a közös alapkör síkjának két oldalán. $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = 5{,}69$ dm. $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c \cdot m \Rightarrow m \approx 2{,}11$ dm. $V = \frac{1}{3}m^2 \cdot \pi x + \frac{1}{3}m^2 \cdot \pi(c - x) = \frac{1}{3} \cdot m^2 \cdot \pi c \Rightarrow V \approx \underline{\underline{26{,}56\,\text{dm}^3}}$. $A = mb\pi + ma\pi = m(a + b)\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{49{,}78\,\text{dm}^2}}$.

2264. Két egybevágó, közös alapkörű kúp adódik. Sugaruk b, magasságuk $\frac{a}{2}$, alkotójuk: $c = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. $V = 2 \cdot \frac{1}{3}b^2\pi \cdot \frac{a}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}ab^2\pi}}$ és $A = 2bc\pi = \underline{\underline{b\sqrt{4b^2 + a^2} \cdot \pi}}$.

2265.

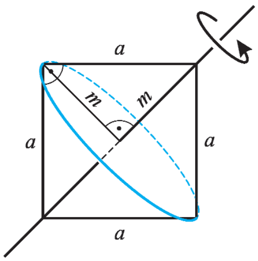


2265. Három eset lehetséges: **I.** α, β hegyesszög $\Rightarrow V_c = \frac{1}{3}m_c^2\pi c$, ahogy azt a 2261. ábra alapján a 2261. feladatban kiszámoltuk. **II.** α tompaszög: 2265. ábra $\Rightarrow V_c = \frac{1}{3}m_c^2\pi(c + x) - \frac{1}{3}m_c^2\pi x = \frac{1}{3}m_c^2\pi c$.

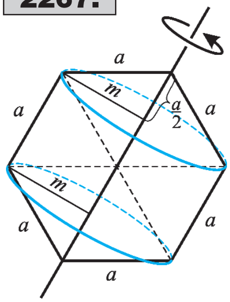
III. α derékszög $V_c = \frac{1}{3}m_c^2\pi c$. $2t = m_a \cdot a = m_b \cdot b = m_c \cdot c. \Rightarrow$ $\Rightarrow V_a = \frac{1}{3}m_a^2\pi a = \frac{1}{3} \cdot m_a \cdot 2t \cdot \pi$ és $V_b = \frac{1}{3} \cdot m_b \cdot 2t \cdot \pi$ és $V_c = \frac{1}{3} \cdot m_c \cdot 2t \cdot \pi \Rightarrow V_a : V_b : V_c = \underline{\underline{m_a : m_b : m_c}}$.

II

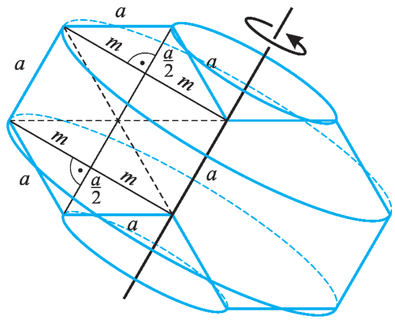
2266.



2267.



2268.



2266. $m=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$ $V=2\cdot\frac{1}{3}\cdot m^2\pi m = =\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot a^3\pi}}.$ $A=2t_p=2ma\pi=\underline{\underline{\sqrt{2}a^2\pi}}.$

2267. $m=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$ $V=2V_k+V_h=2\cdot\frac{1}{3}m^2\pi\cdot\frac{a}{2}+m^2\pi a=\underline{\underline{a^3\pi}}\Rightarrow V\approx\underline{\underline{3141{,}6\ \text{cm}^3}}.$
$A=2t_{kp}+t_{hp}=2ma\pi+2ma\pi=2\sqrt{3}a^2\pi\Rightarrow A\approx\underline{\underline{1088{,}3\ \text{cm}^2}}.$

2268. $m=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$ $V=V_h+2V_{csk}-2V_k=(2m)^2\pi a+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\left[(2m)^2+m^2+2m\cdot m\right]\pi-$
$-2\cdot\frac{1}{3}\cdot m^2\pi\cdot\frac{a}{2}=\underline{\underline{\frac{9}{2}}}a^3\pi.$ $A=t_{hp}+2t_{cskp}+2t_{kp}=2(2m)\pi a+2\cdot 3ma\pi+2ma\pi=\underline{\underline{6\sqrt{3}a^2\pi}}.$

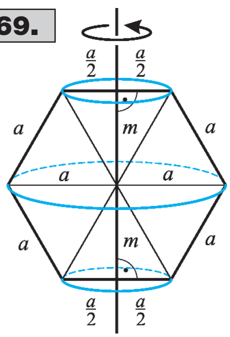
2269. $m=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$ $V=2V_{csk}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+a\cdot\frac{a}{2}\right]m\pi=\underline{\underline{\frac{7\sqrt{3}}{12}}}a^3\pi.$

$A=2t_{cskp}+2t_f=2\cdot\left(a+\frac{a}{2}\right)\cdot a\pi+2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=\underline{\underline{\frac{7}{2}}}a^2\pi.$

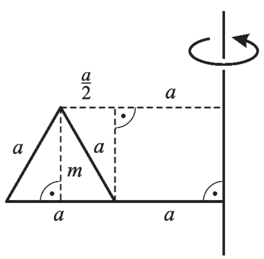
2270. $V=\frac{1}{3}\cdot\left[(2a)^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2+2a\cdot\frac{3}{2}a\right]\cdot m\pi-\frac{1}{3}\cdot\left[\left(\frac{3a}{2}\right)^2+a^2+\frac{3}{2}a\cdot a\right]\cdot m\pi=\underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3\pi}}.$

2271. $b_2=0{,}5b\Rightarrow b_1+b_3=0{,}5b.$ $AE=EB$ és $CF=FB\Rightarrow EF\parallel AC$ és $2EF=AC\Rightarrow ABC\triangle\sim$ $\sim EBF\triangle$ és a hasonlóság aránya $2\Rightarrow PB=2QB\Rightarrow PQ=QB=m.$ $AEFC$ forgatásából:

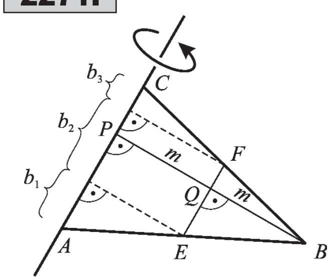
2269.



2270.

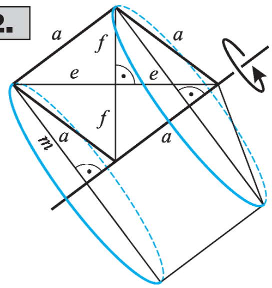


2271.

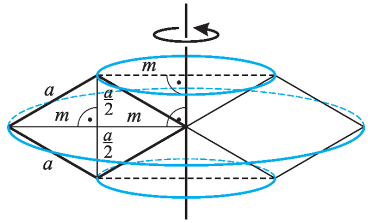


II

2272.



2273.



$V_1 = \frac{1}{3}m^2\pi b_3 + m^2\pi b_2 + \frac{1}{3}m^2\pi b_1 = \frac{1}{3}m^2\pi \cdot \frac{b}{2} + m^2\pi \cdot \frac{b}{2} = \frac{2}{3}m^2\pi b.$ $EBF\triangle$ forgatásából:
$V_2 = \frac{1}{3}(2m)^2 b\pi - V_1 = \frac{4}{3}m^2 b\pi - \frac{2}{3}m^2 b\pi = \frac{2}{3}m^2 b\pi \Rightarrow \underline{\underline{V_1 : V_2 = 1 : 1}}.$

2272. $a^2 = f^2 + e^2 \Rightarrow f = 15$ cm; $t_{\text{rombusz}} = 2f \cdot e = a \cdot m \Rightarrow m = 24$ cm. A keletkezett test térfogata megegyezik egy m sugarú és a magasságú henger térfogatával: $V = m^2\pi a \Rightarrow V \approx \underline{\underline{45{,}24\ \text{dm}^3}}$.
$A = t_{hp} + 2t_{kp} = 2m\pi a + 2ma\pi = 4ma\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{75{,}4\ \text{dm}^2}}$.

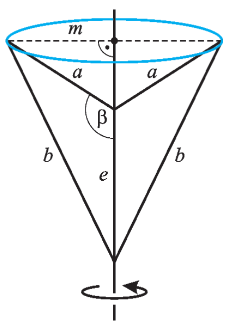
2273. $V = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left\{(2m)^2 + m^2 + 2m \cdot m\right\} \cdot \frac{a}{2} \cdot \pi - \frac{1}{3} m^2 \pi \cdot \frac{a}{2}\right] = \underline{\underline{\frac{3}{2} a^3 \pi}}.$ $A = 2t_{tcskp} + 2t_{kp} =$
$= 2 \cdot (2m + m) \cdot a\pi + 2ma\pi = \underline{\underline{4\sqrt{3}a^2\pi}}.$

2274. $V_a = m_a^2\pi a$ és $V_b = m_b^2\pi b.$ $\frac{V_a}{V_b} = \frac{m_a^2\pi a}{m_b^2\pi b} = \frac{m_a^2 a}{m_b^2 b} = \frac{t \cdot m_a}{t \cdot m_b} = \frac{m_a}{m_b} = \frac{\frac{t}{a}}{\frac{t}{b}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}}}.$

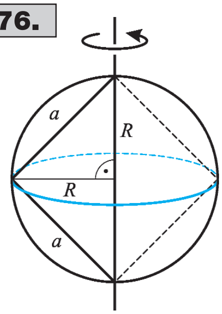
2275. Az adatok egy konkáv deltoidot adnak meg, mert $54^2 + 61^2 = 6637 < 7569 = 87^2 \Rightarrow \beta$ tompaszög. $\frac{1}{2}me = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)} \Rightarrow m \approx 60{,}4$ cm. $V = \frac{1}{3}m^2\pi(e + x) - \frac{1}{3}m^2\pi x =$
$= \frac{1}{3}m^2\pi e \Rightarrow V \approx \underline{\underline{206{,}3\ \text{dm}^3}}$. $A = mb\pi + ma\pi = m(a+b)\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{280{,}8\ \text{dm}^2}}$.

2276. $a = \sqrt{2}R.$ $V_g = \frac{4}{3}R^3\pi$ és $V = 2 \cdot \frac{1}{3}R^2\pi \cdot R = \frac{2}{3}R^3\pi$ $\underline{\underline{\frac{V}{V_g} = \frac{1}{2}}}$. $A_g = 4R^2\pi$ és $A = 2 \cdot Ra\pi =$
$= 2\sqrt{2}R^2\pi \Rightarrow \frac{A}{A_g} = \frac{2\sqrt{2}R^2\pi}{4R^2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

2275.

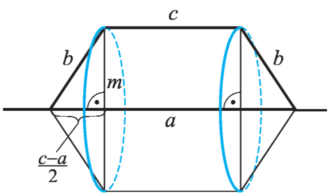


2276.

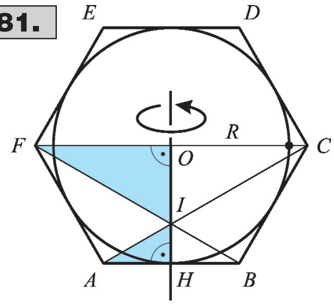


II

2277.



2281.



2277. $m = 24\,\text{cm}$. $V = V_h + 2V_k \approx \underline{\underline{48{,}26\,\text{cm}^3}}$. $A = t_{hp} + 2t_{kp} \approx \underline{\underline{69{,}37\,\text{cm}^2}}$.

2278. A keletkezett test egy forgáshenger és egy forgáskúp a közös körlapjuk két oldalán. $V \approx \underline{\underline{142{,}5\,\text{dm}^3}}$. $A \approx \underline{\underline{152{,}7\,\text{dm}^2}}$.

2279. A körülírt kör sugara $\frac{2}{3}$-a a háromszög magasságának. $\frac{V_g}{V_k} = \underline{\underline{\frac{32}{9}}}$.

2280. A beírt kör sugara $\frac{1}{3}$-a a háromszög magasságának. $\frac{V_g}{V_k} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$.

2281. $ABC\sphericalangle = 120° \Rightarrow IAH\sphericalangle = 30° \Rightarrow 2 \cdot IH = AI$ és $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AI$. $FOI\triangle \cong COI\triangle \sim$ $\sim AHI\triangle$ $(\lambda = 2) \Rightarrow 2IO = FI$ és $FO = \frac{\sqrt{3}}{2}FI$. $FO = AB = 2AH \Rightarrow 2IH = IO \Rightarrow IH = \frac{1}{3}R$ és $IO = \frac{2}{3}R \Rightarrow AI = \frac{2}{3}R$; $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}R = \frac{\sqrt{3}}{3}R$; $FI = \frac{4}{3}R$; $FO = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

$$V_{FOI} = \frac{1}{3}FO^2\cdot\pi\cdot IO = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2\cdot\pi\cdot\frac{2}{3}R = \underline{\underline{\frac{8}{27}R^3\pi}} \quad \text{és} \quad V_{AIH} = \frac{1}{8}V_{FOI} = \underline{\underline{\frac{1}{27}R^3\pi}};$$

$$A_{FOI} = FO\cdot(FO + FI)\cdot\pi = \frac{2\sqrt{3}}{3}R\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R + \frac{4}{3}R\right)\cdot\pi = \underline{\underline{\frac{12 + 8\sqrt{3}}{9}R^2\pi}};\; A_{AIH} = \frac{1}{4}A_{FOI} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3 + 2\sqrt{3}}{9}R^2\pi}}.$$