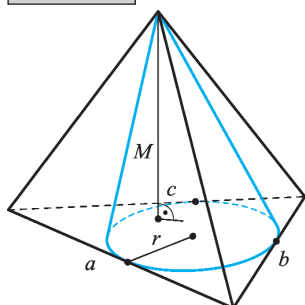
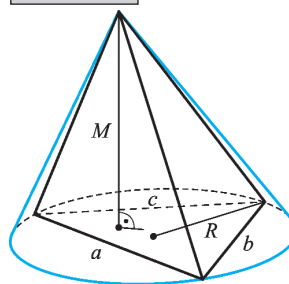


2182/I.



2182/II.



II

2181. Az R sugarú körbe írható szabályos nyolcszög területe: $T_{\text{nyolcszög}} = 8 \frac{R^2 \cdot \sin 45^\circ}{2} = 2\sqrt{2} R^2$. A gúla térfogata: $V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot R^2 \cdot M$. A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} R^2 \pi \cdot M$. A térfogatok különbsége: $\Delta V = \frac{R^2 M}{3} (\pi - 2\sqrt{2}) = 6 (\pi - 2\sqrt{2}) \approx 1,88 \text{ dm}^3$.

2182. 1. eset: a beleírható kúp. A gúla alaplajának területe Heron-képlettel:

$T_{\text{alap}} = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} = 240 \text{ cm}^2$. A gúla alaplajának területe a beírt kör sugarával

és a háromszög oldalaival: $T_{\text{alap}} = rs \Rightarrow r = \frac{T_{\text{alap}}}{s} = 6 \text{ cm}$. A beleírható kúp térfogata: $V_{1. \text{ kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot M = 432\pi \approx 1357 \text{ cm}^3$.

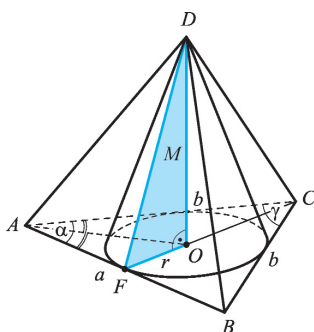
2. eset: a köré írható kúp. A gúla alaplajának területe a körülírt kör sugarával és a háromszög oldalaival: $T_{\text{alap}} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4T_{\text{alap}}} = 17 \text{ cm}$. A köré írható kúp térfogata: $V_{2. \text{ kúp}} = \frac{1}{3} R^2 \pi \cdot M \approx 3468\pi \approx 10895 \text{ cm}^3$.

2183. 1. eset: a köré írható kúp. A szabályos tizenkétszög köré írható kör sugara: $R = \frac{a}{2 \sin 15^\circ} \approx 23,18 \text{ cm}$. A gúla köré írható kúp térfogata: $V_{1. \text{ kúp}} = \frac{1}{3} R^2 \pi \cdot M \approx 3941\pi \approx 12381,16 \text{ cm}^3$.

2. eset: a beleírható kúp. A szabályos tizenkétszög beírható körének sugara: $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 15^\circ} \approx 22,39 \text{ cm}$. A gúla beleírható kúp térfogata: $V_{2. \text{ kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot M \approx 3677\pi \approx 11551,78 \text{ cm}^3$.

2184. A gúla szabályos hatszög alaplajának beírt köre a kúp alapköre. A szabályos hatszög alapú gúla térfogata: $V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot M = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot M$. A kúp alapkörének sugara a hatszög egy középponti háromszögének magassága: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2186.



$$\text{A kúp térfogata: } V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \pi \cdot M = \frac{a^2 \pi}{4} \cdot M.$$

$$\begin{aligned} \text{A hulladék térfogata: } V_{\text{hulladék}} &= V_{\text{gúla}} - V_{\text{kúp}} \cdot \frac{V_{\text{hulladék}}}{V_{\text{gúla}}} \\ &= 1 - \frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gúla}}} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{6 - \pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,093. \end{aligned}$$

2185. A gúla alapéle: $a = R\sqrt{2}$. A gúla fedőéle: $b = r\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} V_{\text{csomaggúla}} &= \frac{m}{3} \left((\sqrt{2}R)^2 + \sqrt{2}R \cdot \sqrt{2}r + (\sqrt{2}r)^2 \right) = \\ &= \frac{2m}{3} (R^2 + Rr + r^2). \end{aligned}$$

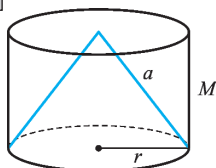
2186. Az ábra szerinti jelölésekkel: $\alpha = 58^\circ$, $\gamma = 180^\circ - 2 \cdot 58^\circ = 64^\circ$. $r = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} 29^\circ$ és $\frac{a}{2} = b \cdot \cos 58^\circ \Rightarrow r = b \cdot \cos 58^\circ \operatorname{tg} 29^\circ$. A gúla alaplapjának területe: $T_{\text{alap}} = \frac{b^2 \cdot \sin 64^\circ}{2}$. A gúla térfogata: $V_{\text{gúla}} = \frac{b^2 \cdot M \cdot \sin 64^\circ}{6}$. A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} b^2 \operatorname{tg}^2 29^\circ \cdot \cos^2 58^\circ \cdot \pi \cdot M$. A két térfogat aránya: $\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gúla}}} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 29^\circ \cdot \cos^2 58^\circ \cdot \pi}{\sin 64^\circ}$. Az adatokat behelyettesítve: $V_{\text{kúp}} \approx \underline{\underline{405,09 \text{ m}^3}}$.

2187. A kúp alapköre a gúla alaplapjának körülírt köre \Rightarrow a négyzet oldala: $a = R\sqrt{2}$. A tengelymetszet háromszögből $M = R\sqrt{3}$. $V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3} (\sqrt{2}R)^2 R\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \approx 31,17 \text{ cm}^3$. Az oldal-

$$\begin{aligned} \text{lap háromszögből } m &= \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{2}} = R\sqrt{\frac{7}{2}}. A_{\text{gúla}} = (\sqrt{2}R)^2 + 4 \cdot \frac{R\sqrt{2} \cdot R \cdot \sqrt{\frac{7}{2}}}{2} = \\ &= 2R^2(1 + \sqrt{7}) \approx \underline{\underline{65,62 \text{ cm}^2}}. \end{aligned}$$

2188. Tekintsük a 2186. ábrát! $a = b$, $r = 7 \text{ cm}$, $M = 6 \text{ cm}$. A kúp alapköre a gúla alap háromszögének beírt köre. A szabályos háromszög beírt körének sugara a magasság harmada. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = 14\sqrt{3} \text{ cm}$. FOD derékszögű háromszögben: $m = \sqrt{85} \text{ cm}$. $t_{ABD} = 7 \cdot \sqrt{255} \approx \underline{\underline{111,78 \text{ cm}^2}}$.

2189.



2189. A feladat feltétele szerint: $2r\pi \cdot M = r\pi a \Rightarrow a = 2M$. Pitagorasz-tételből: $M^2 + r^2 = a^2$.

$$\text{A kettőt összevetve: } M = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

2190. A feltétel szerint: $2r\pi \cdot M = 3r^2\pi \Rightarrow M = \frac{3}{2}r$. Pitagorasz-tétel a KOP derékszögű háromszögre: $R^2 = \frac{M^2}{4} + r^2$. A kettőt összevetve: $r = \frac{4}{5}R$ és $M = \frac{6}{5}R$ adódik. A henger térfogata:

$$V_{\text{henger}} = r^2\pi \cdot M = \frac{16}{25}R^2\pi \cdot \frac{6}{5}R = \frac{96}{125}R^3\pi.$$

2191. Jelölje a henger sugarát r , a gömb sugarát R . A feltétel szerint a henger magassága $2r$.

$$A_{\text{henger}} = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r = \underline{6r^2\pi}. \quad A_{\text{gömb}} = \underline{4R^2\pi} \Rightarrow \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

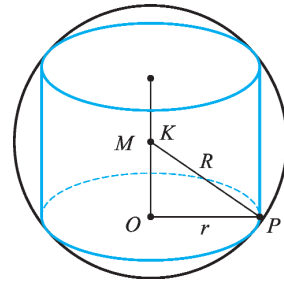
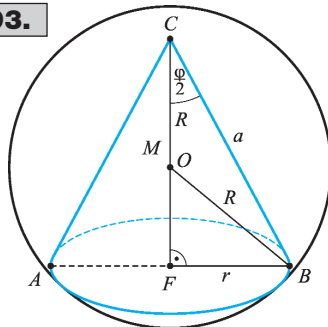
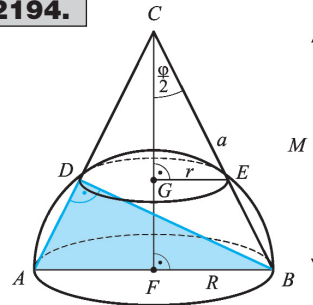
$$V_{\text{henger}} = r^2\pi \cdot 2r = \underline{2r^3\pi}. \quad V_{\text{gömb}} = \frac{4R^3\pi}{3}. \quad \frac{V_{\text{henger}}}{V_{\text{gömb}}} = \frac{2r^3\pi}{4R^3\pi} = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0,3795.$$

2192. Tekintsük a 2190. ábrát. A feltétel szerint: $2r\pi \cdot M = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \pi \Rightarrow r = \frac{1}{4M}$. Pitagorasz-tételből: $R^2 = r^2 + \frac{M^2}{4}$. A kettőt összevetve: $1 = \frac{1}{16M^2} + \frac{M^2}{4} \Rightarrow 4M^4 - 16M^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{két megoldás van: } M_1 = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{2}} \text{ és } M_2 = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{2}}.$$

2193. Tekintsük a gömb és a beírt kúp tengelymetszetét: $\varphi = 56,7^\circ$. A gömb térfogatából a gömb sugara: $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx \underline{3,08 \text{ cm}}$. Az ABC egyenlő szárú háromszögben: $2r = 2R \sin 56,7^\circ \Rightarrow r \approx \underline{2,57 \text{ cm}}$. A CFB derékszögű háromszögben: $\text{tg } 28,35^\circ = \frac{r}{M} \Rightarrow M \approx \underline{4,77 \text{ cm}}$. A kúp térfogata: $V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot M \approx \underline{33,02 \text{ cm}^3}$.

2194. $M = 2R$. Pitagorasz-tétel a $CFB\Delta$ -re: $a^2 = R^2 + 4R^2 \Rightarrow a = R \cdot \sqrt{5}$. $A_{\text{félgömb}} = 2R^2 \cdot \pi$. $T_{\text{palást}} = R \cdot \pi \cdot a = R \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{5} = R^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{5}$. $\frac{A_{\text{félgömb}}}{T_{\text{palást}}} = \frac{2R^2\pi}{R^2\pi\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2190.**2193.****2194.**

2195. Tekintsük a 2194. ábrát. $M = 2R$. A Thalész-tétel miatt $\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow DB$ az ABC egyenlő szárú háromszög szárhoz tartozó magassága. Az $ABC\Delta$ szára az AFC derékszögű háromszögből: $AC = \sqrt{R^2 + 4R^2} = R\sqrt{5}$. Az $ABC\Delta$ területe: $R \cdot 2R = R\sqrt{5} \cdot \frac{BD}{2} \Rightarrow BD = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$. Pitagorasztétel az ABD derékszögű háromszögre: $AD = \sqrt{4R^2 - \frac{16R^2}{5}} = \frac{2R\sqrt{5}}{5} \Rightarrow CD = AC - AD = R\sqrt{5} - \frac{2}{5} \cdot R\sqrt{5} = \frac{3}{5} \cdot R\sqrt{5}$. $DEC\Delta \sim ABC\Delta$, mert szö-

gek egyállású szögek. $\lambda = \frac{CD}{CA} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{\frac{3}{5} \cdot R\sqrt{5}}{R\sqrt{5}} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = \frac{3}{5} \cdot R$.

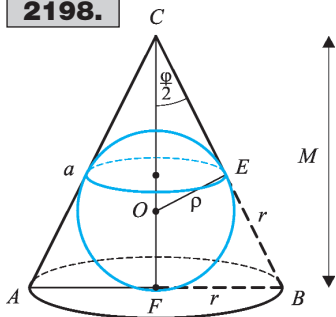
2196. Tekintsük a 2194. ábrát. $M = 2R$ feltételt felhasználva az $AFC\Delta$ -re felírt Pitagorasztételben: $AC = \sqrt{4R^2 + R^2} = R\sqrt{5}$. A Thalész-tétel miatt az $\angle ADB = 90^\circ$. $ABD\Delta \sim ACF\Delta$, mert A -nál levő szögük közös, és mindkettő derékszögű. $\Rightarrow \lambda_1 = AB : AC = AD : AF \Rightarrow \frac{2R}{R\sqrt{5}} =$

$\frac{AD}{R} \Rightarrow AD = \frac{2R\sqrt{5}}{5} \Rightarrow DC = AC - AD = R\sqrt{5} - \frac{2R\sqrt{5}}{5} = \frac{3R\sqrt{5}}{5}$. A gömb által levágott kúp C középpontra vonatkozóan hasonló az eredetihez. A hasonlóság aránya: $\lambda_2 = DC : AC = \frac{3R\sqrt{5}}{5} : R\sqrt{5} = \frac{3}{5}$. A két kúppalást területének aránya: $\frac{t}{T} = \lambda_2^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow t = \frac{9}{25} T$. A gömb belsejében levő palástrész területe: $T - t = T - \frac{9}{25} T = \frac{16}{25} T$. A keresett arány: $t : (T - t) = 9 : 16$.

2197. Tekintsük a 2193. ábrát! $\varphi = 45^\circ$. A gömb felszínéből a sugara: $R = \sqrt{\frac{1000}{4\pi}} \approx \underline{8,92 \text{ cm}}$. $ABC\Delta$ -ből $2r = 2R \sin 45^\circ \Rightarrow r \approx \underline{6,31 \text{ cm}}$. BFC derékszögű háromszögből: $\text{tg } 225^\circ = \frac{r}{M} \Rightarrow M \approx \underline{15,23 \text{ cm}}$. A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot M \approx \underline{634,96 \text{ cm}^2}$.

2198. Tekintsük a kúp és a beírt gömb tengelymetszetét! Pitagorasztétel az AFC derékszögű háromszögre: $a^2 = 3,69^2 + 8^2 \Rightarrow a = \underline{8,81 \text{ dm}}$. Az $ABC\Delta$ területe: $(a + r) \cdot \varrho = r \cdot M \Rightarrow (8,81 + 3,69) \varrho = 3,69 \cdot 8 \Rightarrow \varrho \approx \underline{2,36 \text{ dm}}$. $A_{\text{gömb}} = 4 \cdot \varrho^2 \cdot \pi \approx \underline{70,08 \text{ dm}^2}$.

2198.



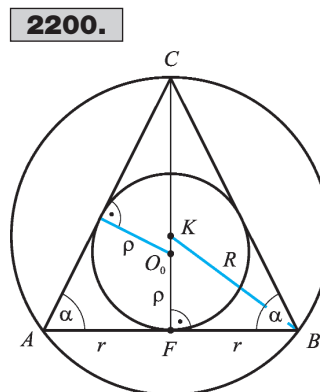
2199. Tekintsük a 2198. ábrát. A feladat feltétele:

$\frac{2}{3} r\pi a = 4\varrho^2 \pi \Rightarrow ra = 6\varrho^2$ (1). A kúp magassága a Pitagorasztételt felhasználva: $M = \sqrt{a^2 - r^2}$. A tengelymetszet területe: $r \cdot M = (a + r) \cdot \varrho \Rightarrow r \cdot \sqrt{a^2 - r^2} = (a + r) \cdot \varrho \Rightarrow a = \frac{r(r^2 + \varrho^2)}{r^2 - \varrho^2}$. a -t (1)-be helyettesítve:

$$r \cdot \frac{r(r^2 + \varrho^2)}{r^2 - \varrho^2} = 6\varrho^2 \Rightarrow 6\varrho^4 - 5r^2\varrho^2 + r^4 = 0 \Rightarrow \varrho_1 = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$\varrho_2 = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Két megoldás van. Az egyik esetben a gömb sugara $\frac{r}{\sqrt{2}}$, az alkotó $3r$, a másikban a sugár $\frac{r}{\sqrt{3}}$ és az alkotó $2r$.

2200. A három test közös tengelymetszete alapján: $r = 2$ m, $\alpha = 54^\circ$. ABC egyenlőszárú háromszögben: $ACB \sphericalangle = 72^\circ$;
 $2r = 2R \cdot \sin 72^\circ \Rightarrow R \approx \underline{2,1 \text{ m}}$. $CFB\Delta$ -ben: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{CF}{r} \Rightarrow$
 $\Rightarrow CF \approx \underline{2,75 \text{ m}}$. $\cos \alpha = \frac{r}{CB} \Rightarrow CB \approx \underline{3,4 \text{ m}}$. Az $ABC\Delta$ területete: $(CB + r) \cdot \varrho = CF \cdot r \Rightarrow \varrho \approx \underline{1,02 \text{ m}}$.



2201. Tekintsük a 2193. ábrát. $R = 12$ cm, $a = 32$ cm. CFB derékszögű háromszögből:
 $\sin \varphi = \frac{r}{a} = \frac{3}{8} \Rightarrow \varphi = 22,02^\circ \Rightarrow 2\varphi = 44,04^\circ$. ABC egyenlő szárú háromszögből:

$$2r = 2R \cdot \sin 44,04^\circ \Rightarrow R = 17,26 \text{ cm}. \quad V_{\text{gömb}} = \frac{4R^3 \pi}{3} \approx 21536,47 \text{ cm}^3 \approx \underline{21,54 \text{ dm}^3}.$$

2202. A 2198. ábra jelöléseivel: A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow ABC\Delta$ szabályos \Rightarrow
 $\Rightarrow \varrho = \frac{M}{3} = \underline{4 \text{ cm}}$. $V_{\text{gömb}} = \frac{4\varrho^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot 4^3 \cdot \pi}{3} \text{ cm}^3 \approx \underline{268,08 \text{ cm}^3}$.

2203. A 2193. ábra jelöléseit használjuk. Feltétel: $r \cdot \pi \cdot a = \sqrt{5} \cdot r^2 \pi \Rightarrow a = \sqrt{5} \cdot r$. OFB derékszögű háromszögben Pitagorasztétel: $R^2 = (M - R)^2 + r^2 \Rightarrow M^2 - 2MR + r^2 = 0$ (1).
 CFB derékszögű háromszögben Pitagorasztétel: $a^2 = M^2 + r^2 \Rightarrow 5r^2 = M^2 + r^2 \Rightarrow r = \frac{M}{2}$.

$$r^2 \rightarrow (1)\text{-be: } M^2 - 2MR + \frac{M^2}{4} = 0 \Rightarrow M = \frac{8}{5} R. \quad r = \frac{4}{5} R. \quad V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi \cdot M = \frac{128}{375} \cdot R^3 \pi.$$

2204. Vizsgáljuk a kúp tengelymetszetét (például a 2193. ábra CFB háromszögében $a = 2r$). Pitagorasztétel a CFB derékszögű háromszögre: $M^2 = 4r^2 - r^2 \Rightarrow M = r \cdot \sqrt{3}$.

$$A_{\text{kúp}} = r^2 \pi + r \cdot \pi \cdot 2r = \underline{3r^2 \pi}, \quad A_{\text{gömb}} = 4r^2 \pi \Rightarrow \frac{A_{\text{kúp}}}{A_{\text{gömb}}} = \frac{3r^2 \pi}{4r^2 \pi} = \frac{3}{4}. \quad V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi \cdot r \cdot \sqrt{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} r^3 \pi, \quad V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3} r^3 \pi \Rightarrow \frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gömb}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} r^3 \pi}{\frac{4}{3} r^3 \pi} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

2205. Pitagorasztétel a 2193. ábra CFB háromszögére: $M^2 = 4r^2 - r^2 \Rightarrow M = r \cdot \sqrt{3}$.

$$A_{\text{kúp}} = r^2 \pi + r \pi \cdot 2r = 3r^2 \pi, \quad A_{\text{gömb}} = 4R^2 \pi. \quad \text{A feltétel szerint } 3r^2 \pi = 4R^2 \pi \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2} r.$$



$$V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot M = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot r \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3 \pi. \quad V_{\text{gömb}} = \frac{4R^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot r^3 \pi}{3 \cdot 8} = \frac{\sqrt{3}}{2} r^3 \pi.$$

$$\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gömb}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} r^3 \pi}{\frac{\sqrt{3}}{2} r^3 \pi} = \frac{2}{3}.$$

2206. Tekintsük a 2198. ábrát $\Rightarrow a = 2r$. A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow ABC\Delta$ szabályos \Rightarrow

$$\Rightarrow \varrho = \frac{M}{3} = \frac{r \sqrt{3}}{3}. \quad A_{\text{kúp}} = r^2 \pi + r\pi \cdot 2r = 3r^2 \pi; \quad A_{\text{gömb}} = 4\varrho^2 \pi = 4 \frac{r^2}{3} \pi. \quad \frac{A_{\text{kúp}}}{A_{\text{gömb}}} = \frac{9}{4}.$$

$$V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot r \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3 \pi. \quad V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3} \varrho^3 \pi = \frac{4 \sqrt{3}}{27} r^3 \pi. \quad \frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gömb}}} = \frac{9}{4}.$$

2207. 1. eset: a gömb köré írt kúp. A 2198. ábra jelöléseit használjuk $\Rightarrow a = 2r$, $M = r \sqrt{3}$.

A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow ABC\Delta$ szabályos $\Rightarrow \varrho = \frac{M}{3} = \frac{r \sqrt{3}}{3}$. $A_{\text{kúp1}} = r^2 \pi + r\pi \cdot 2r = 3r^2 \pi;$

$$A_{\text{gömb}} = 4\varrho^2 \pi = 4 \frac{r^2}{3} \pi. \quad \frac{A_{\text{kúp1}}}{A_{\text{gömb}}} = \frac{9}{4}. \quad V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot r \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3 \pi. \quad V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3} \varrho^3 \pi =$$

$$= \frac{4 \sqrt{3}}{27} r^3 \pi. \quad \frac{V_{\text{kúp1}}}{V_{\text{gömb}}} = \frac{9}{4}.$$

2. eset: a gömbbe írt kúp. A 2193. ábra jelöléseit használjuk $\Rightarrow a = 2r$, $M = r \sqrt{3}$. A kúp egyenlő

oldalú $\Rightarrow ABC\Delta$ szabályos $\Rightarrow R = \frac{2M}{3} = \frac{2r \sqrt{3}}{3}$. $A_{\text{kúp2}} = r^2 \pi + r\pi \cdot 2r = 3r^2 \pi;$

$$A_{\text{gömb}} = 4R^2 \pi = \frac{16}{3} r^2 \pi. \Rightarrow \frac{A_{\text{gömb}}}{A_{\text{kúp2}}} = \frac{16}{9}.$$

$$V_{\text{kúp2}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot r \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3 \pi. \quad V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot \frac{8r^3}{3 \sqrt{3}} \pi =$$

$$= \frac{32 \sqrt{3}}{27} r^3 \pi. \Rightarrow \frac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{kúp2}}} = \frac{32}{9}.$$

$$A_{\text{kúp1}} = \frac{9}{4} A_{\text{gömb}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{9} A_{\text{kúp2}} = 4 A_{\text{kúp2}}. \Rightarrow$$

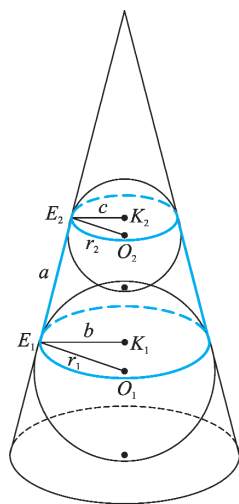
$$\Rightarrow A_{\text{kúp1}} : A_{\text{gömb}} : A_{\text{kúp2}} = 4 : \frac{16}{9} : 1 = \underline{\underline{36 : 16 : 9}}.$$

$$V_{\text{kúp1}} = \frac{9}{4} V_{\text{gömb}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{32}{9} V_{\text{kúp2}} = 8 V_{\text{kúp2}}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{kúp1}} : V_{\text{gömb}} : V_{\text{kúp2}} = 8 : \frac{32}{9} : 1 = \underline{\underline{72 : 32 : 9}}.$$

2208. A csonkakúp palástjának területe: $T_{\text{palást}} = \frac{(2b + 2c)a\pi}{2} =$

$= a\pi(b + c)$. Tekintsük a gömbök és a kúp tengelymetszetét. $FE = FE_1 = FE_2$, mert külső pontból húzott érintőszakaszok. FE



2208/I.

a trapéz középvonalának fele, ezért $FE = \frac{b+c}{2} = \frac{a}{2}$. Pitagorasz tétéle az O_1TO_2 derékszögű háromszögre: $a^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow \Rightarrow a^2 = 4r_1r_2$. $T_{\text{palást}} = a\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot 2 = a^2\pi = 4r_1r_2\pi = \underline{\underline{160\pi \approx 502,65 \text{ cm}^2}}$.

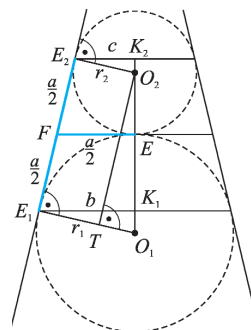
2209. Tekintsük a 2198. ábrát. $OECD \sim BFC\Delta$, mert C -nél levő szögük közös és mindkettő derékszögű $\Rightarrow \lambda = \frac{\varrho}{r} = \frac{M - \varrho}{a} = \frac{a - r}{M} \Rightarrow M = \frac{80}{3} \text{ cm}$ és $a = \frac{100}{3} \text{ cm}$. $A_{\text{kúp}} = r^2\pi + r\pi a \approx \underline{\underline{33,51 \text{ dm}^2}}$.
 $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot M \approx \underline{\underline{11,17 \text{ dm}^3}}$.

2210. Tekintsük a 2198. ábrát. Az $ABC\Delta$ területe: $r \cdot M = (a + r) \cdot \varrho \Rightarrow 72r = (a + r) \cdot 12 \Rightarrow a = 5r$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $a^2 = r^2 + M^2 \Rightarrow 25r^2 = r^2 + 72^2 \Rightarrow r = 6\sqrt{6}$ és $a = 30\sqrt{6}$. $A_{\text{kúp}} = r^2\pi + r\pi a = 1296\pi \approx 4071,5 \text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{40,71 \text{ dm}^2}}$.

2211. Tekintsük a 2198. ábrát. $\frac{A_{\text{kúp}}}{A_{\text{gömb}}} = k \Rightarrow \frac{r^2\pi + r\pi a}{4\varrho^2\pi} = k \Rightarrow r(r + a) = 4k\varrho^2$ (*). Az $ABC\Delta$ területe: $rM = (r + a)\varrho \Rightarrow M = \frac{r + a}{r}\varrho$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $a^2 = M^2 + r^2 \Rightarrow a^2 = \frac{(r + a)^2}{r^2}\varrho^2 + r^2 \Rightarrow a^2r^2 = (r + a)^2\varrho^2 + r^4$. A (*) egyenletből $r \cdot a = 4k \cdot \varrho^2 - r^2$, illetve $r + a = \frac{4k \cdot \varrho^2}{r}$ összefüggéseket a Pitagorasz-tételbe helyettesítve: $8k\varrho^2 \cdot r^4 - 16k^2\varrho^4 \cdot r^2 + 16k^2\varrho^6 = 0$ „ r ”-ben negyedfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai: $r_1 = \varrho \sqrt{k + \sqrt{k(k - 2)}}$ vagy $r_2 = \varrho \sqrt{k - \sqrt{k(k - 2)}}$, ha $k \geq 2$.

2212. Tekintsük a 2198. ábrát. $\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gömb}}} = k \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}r^2\pi \cdot M}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi} = k \Rightarrow M = \frac{4k \cdot \varrho^3}{r^2}$ (*). Az $ABC\Delta$ területe: $rM = (r + a)\varrho \Rightarrow M = \frac{r + a}{r}\varrho$. M -et (*)-ba beírva: $r^2 \cdot \frac{r + a}{r} \cdot \varrho = 4k \cdot \varrho^3 \Rightarrow \Rightarrow a = \frac{4k \cdot \varrho^2 - r^2}{r}$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $a^2 = r^2 + M^2 \Rightarrow \Rightarrow \left(\frac{4k \cdot \varrho^2 - r^2}{r}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{4k \cdot \varrho^3}{r^2}\right)^2$. Ennek egyszerűbb alakra hozásából a $8k\varrho^2 \cdot r^4 - 16k^2\varrho^4 \cdot r^2 + 16k^2\varrho^6 = 0$ „ r ”-ben negyedfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai: $r_1 = \varrho \sqrt{k + \sqrt{k(k - 2)}}$ vagy $r_2 = \varrho \sqrt{k - \sqrt{k(k - 2)}}$, ha $k \geq 2$.

2208/II.



II

2213. A 2194. ábra jelöléseit alkalmazzuk: $\frac{A_{\text{kúp}}}{A_{\text{félgömb}}} = \frac{r^2 \pi + r\pi a}{r^2 \pi + 2r^2 \pi} = \frac{r^2 \pi + r\pi a}{3r^2 \pi} = \frac{1}{3} + \frac{a}{3r}$.

A feltétel szerint $\frac{1}{3} + \frac{a}{3r} = \frac{18}{5} \Rightarrow \frac{r}{a} = \frac{5}{49}$. $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{a} = \frac{5}{49} \Rightarrow \varphi = \underline{\underline{11,72^\circ}}$.

2214. Tekintsük a 2198. ábrát. $\frac{A_{\text{gömb}}}{T_{\text{alap}}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4\rho^2 \pi}{r^2 \pi} = \frac{4}{3} \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{3}}{3} r$. CFB derékszögű

háromszögben $FBC \sphericalangle = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$. OB felezi az $FBC \sphericalangle$ -et $\Rightarrow FBO \sphericalangle = 45^\circ - \frac{\varphi}{4}$. OFB derék-

szögű háromszögben $\text{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{4} \right) = \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \underline{\underline{60^\circ}}$.

2215. Tekintsük a 2198. ábrát. $A_{\text{kúp}} = n \cdot A_{\text{gömb}} \Rightarrow r^2 \pi + r\pi a = n \cdot 4\rho^2 \pi \Rightarrow r^2 + ra = 4n\rho^2$ (*).

Az $ABC\Delta$ területe: $r \cdot M = \rho(r+a) \Rightarrow$ mindkét oldal r -rel való szorzása után $r^2 M = \rho \cdot (r^2 + ra)$.

A (*) összefüggést felhasználva: $r^2 M = \rho \cdot 4n\rho^2 = 4n\rho^3 \Rightarrow \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot M = \frac{4}{3} \rho^3 \pi \cdot n \Rightarrow V_{\text{kúp}} = V_{\text{gömb}} \cdot n$.

2216. A kúpok közös része egy kettős csonkakúp. A két kúp síkszimmetrikus a gömb középpontján átmenő, a kúpok közös tengelyére merőleges síkra. \Rightarrow A közös részt alkotó két csonkakúp közös alapköre ebben a síkban van, középpontja azonos a gömb középpontjával. $ACB \sphericalangle = 90^\circ$ a Thalész-tétel miatt. $BT_2 = AT = k \cdot R$ a feltétel miatt $\Rightarrow AT_2 = TB = 2R - kR = (2-k)R$. Magasságtétel az ACB derékszögű háromszög TC magasságára:

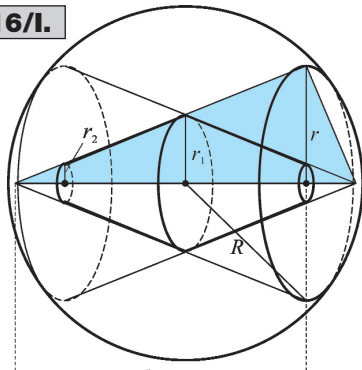
$r = \sqrt{k \cdot R \cdot (2-k) \cdot R} = R \sqrt{k(2-k)}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét

a $CAB \sphericalangle$ r_2 , r_1 és r szelőire: $\frac{r_2}{r} = \frac{AT_2}{AT} = \frac{(2-k)R}{kR} = \frac{2-k}{k} \Rightarrow r_2 = R(2-k) \sqrt{\frac{2-k}{k}}$.

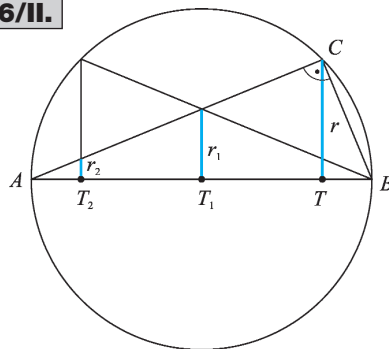
$\frac{r_1}{r} = \frac{AT_1}{AT} = \frac{R}{kR} = \frac{1}{k} \Rightarrow r_1 = R \sqrt{\frac{2-k}{k}}$.

A két kúp közös részének térfogata: $V_{\text{közös}} = 2V_{\text{csonkakúp}} = 2 \frac{(k-1) \cdot R \cdot \pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) =$
 $= 2 \frac{(k-1) \cdot R \cdot \pi}{3} \left(R^2 \frac{2-k}{k} + R^2 (2-k) \frac{2-k}{k} + R^2 (2-k)^2 \frac{2-k}{k} \right) =$

2216/I.



2216/II.



$$= \frac{2(k-1)(2-k)R^3\pi}{3k}(7-5k+k^2). \text{ A közös rész és a gömb}$$

$$\text{térfogatának hányadosa: } \frac{V_{\text{közös}}}{V_{\text{gömb}}} = \frac{(k-1)(2-k)(7-5k+k^2)}{2k}.$$

2217. A gömbök térfogatának aránya a sugarak arányának köbe

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \underline{2r = R}. O_2E_2 \text{ középvonal az } O_1E_1C\Delta\text{-ben:}$$

$$CO_2 = O_2O_1 = r + 2r = 3r \Rightarrow M = FO_1 + O_1O_2 + O_2C =$$

$$= 2r + 3r + 3r = 8r. CO_2E_2\Delta \sim CFB\Delta, \text{ mert mindkettő derékszögű}$$

$$\text{és } C\text{-nél levő szögük közös. } \lambda = \frac{r}{\rho} = \frac{3r}{a} \Rightarrow \underline{a = 3\rho}. \text{ Pitagorasz-}$$

$$\text{tétel az } FBC \text{ derékszögű háromszögre: } 9\rho^2 = \rho^2 + (8r)^2 \Rightarrow \rho = \underline{2\sqrt{2r}} \Rightarrow a = \underline{6\sqrt{2r}}.$$

$$A_{\text{kúp}} = \rho^2\pi + \rho\pi a = \underline{32r^2\pi}. V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3}\rho^2\pi \cdot M = \underline{\frac{64}{3}r^3\pi}.$$

2218. A 2198. ábra jelölései szerint: $r\pi a = 3r^2\pi \Rightarrow \underline{a = 3r}$. Az $ABC\Delta$ területe: $r \cdot M = (a+r) \cdot \rho$.

A feltételt felhasználva: $\underline{M = 4\rho}$.

2219. A két darabot szétszedve és az egyiket a tengelye körül 180° -kal elforgatva összeilleszthetők úgy, hogy együtt egyenes hengert alkossanak. Ennek a hengernek a térfogata megegyezik a könyökcső térfogatával. A henger alapkörének sugara r , magassága $a+b$. A keresett térfogat: $\underline{V = r^2\pi \cdot (a+b)}$.

2220. 1. főkörmetszet: 2220/I. ábra. $OO_1 = OO_2 = R - \rho$;

$$O_1O_2 = 2\rho; O_1OO_2\angle = 45^\circ.$$

$$\sin 22,5^\circ = \frac{\rho}{R - \rho} \Rightarrow \rho = \frac{R \sin 22,5^\circ}{1 + \sin 22,5^\circ}. \text{ A } \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| =$$

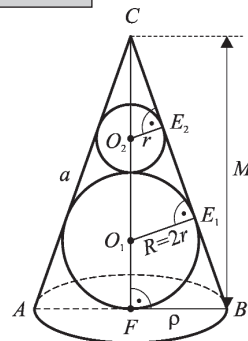
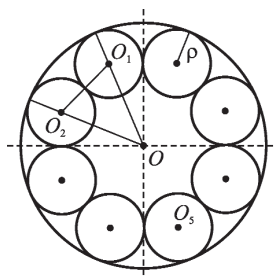
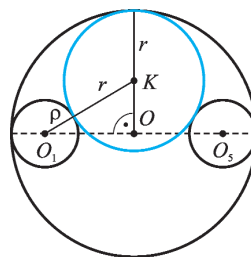
$$= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \text{ összefüggést felhasználva } \sin 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} =$$

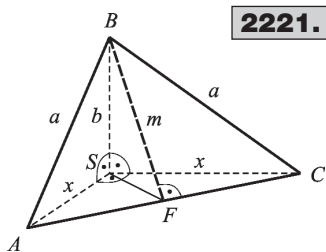
$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow \rho = \frac{R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$

Az 1. főkörmetszetre merőleges a 2. főkörmetszet: 2220/II. ábra. $KO = R - r$; $KO_1 = r + \rho$; $OO_1 = R - \rho$. Pitagorasz-tétel az O_1OK derékszögű háromszögre: $(\rho + r)^2 = (R - \rho)^2 + (R - r)^2 \Rightarrow r = \frac{R(R - \rho)}{R + \rho}$.

A korábban ρ -ra kapott összefüggést felhasználva: $R - \rho =$

$$= \frac{2R}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \text{ és } R + \rho = \frac{2R(1 + \sqrt{2 - \sqrt{2}})}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$

2217.**2220/I.****2220/II.**



2221. Ezeket felhasználva a megfelelő algebrai átalakítások után:

$$r = R \left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \right) \approx 0,57R.$$

2221. Bontsuk fel a tetraédert a beírt gömb középpontjából a csúcsokhoz vezető szakaszokkal négy tetraéderre. Ezeknek a tetraédereknek egy-egy lapja közös az eredeti tetraéderrel, magasságuk pedig a beírt gömb sugara, r . $\Rightarrow V = \frac{A \cdot r}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{3V}{A}$. Pitagorasz-tétel az ASB derékszögű háromszögre: $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Pitagorasz-tétel az ASC derékszögű háromszögre: $AC = y = x\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - b^2)}$.

ACB egyenlő szárú háromszögben BF magasság felezi az AC alapot. Pitagorasz-tétel a BFC derékszögű háromszögre: $a^2 = m^2 + \frac{y^2}{4}$. y -t behelyettesítve és a megfelelő átalakításokat

elvégezve: $m = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. A tetraéder térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot b = \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot (a^2 - b^2)$. A tetra-

éder felszíne: $A = 2 \cdot \frac{xb}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y \cdot m}{2} = b\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{a^2 - b^2}{2} + \frac{\sqrt{2(a^2 - b^2)} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}{2}$.

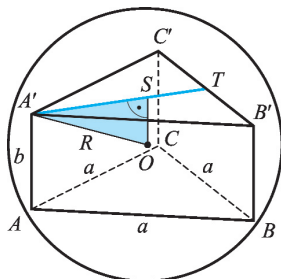
A beírható gömb sugara a felszín és a térfogat összefüggés felhasználásával a megfelelő algebrai átalakítások után: $r = \frac{3V}{A} = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{2b + \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 + b^2}}$.

2222. A kocka köré írható gömb középpontja a testátlók metszéspontja, sugara a testátló fele: $R = a \frac{\sqrt{3}}{2}$. A kocka élfelezéspontjain átmenő gömb középpontja a testátlók met-

széspontja, sugara a lapátló fele: $r = a \frac{\sqrt{2}}{2}$. A kocka beírt gömbjének középpontja a testátlók

metszéspontja, sugara az él fele: $\rho = \frac{a}{2}$; $R : r : \rho = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$.

2223.



2223. $a \cdot b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. A szimmetria miatt

$OS = \frac{1}{2} b$, ahol S az $A'B'C'$ háromszög középpontja. $A'B'C'$ szabályos háromszögben $A'T = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'S = \frac{2}{3} A'T =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. $A'SO$ derékszögű háromszögben $A'O = R$;

$A'S = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $OS = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$. Pitagorasz-tétel az

$$A'SO \text{ derékszögű háromszögben: } \left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2}{64} + \frac{3a^2}{9} = R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{73a^2}{192}. \quad \underline{\underline{\text{A gömb sugara } R = \frac{\sqrt{73}a}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{219}a}{24}}}$$

$$\mathbf{2224.} \quad V = V_{\text{gömb}} - 6V_{\text{gömbcsüveg}}; \quad A = A_{\text{gömb}} - 6P_{\text{gömbcsüveg}} + 6T_{\text{kör}}.$$

Tekintsük az átlós metszetet!

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ és } r = \frac{a}{2} \text{ és } m = R - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4R^3\pi}{3} = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{3} \text{ és}$$

$$V_{\text{gömbcsüveg}} = \frac{\pi}{3} m^2(3R - m) = \frac{a^3\pi(4\sqrt{2} - 5)}{24}.$$

$$\underline{\underline{V_{\text{dobókocka}}}} = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{3} - 6 \cdot \frac{a^3\pi(4\sqrt{2} - 5)}{24} = \frac{a^3\pi(15 - 8\sqrt{2})}{12}.$$

$$A_{\text{gömb}} = 4R^2\pi = 2a^2\pi \text{ és } T_{\text{kör}} = r^2\pi = \frac{a^2\pi}{4} \text{ és}$$

$$P_{\text{gömbcsüveg}} = 2\pi Rm = \frac{a^2\pi(2 - \sqrt{2})}{2}.$$

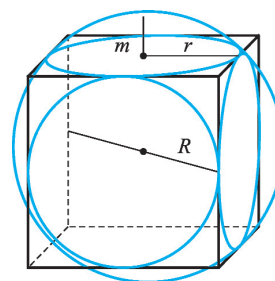
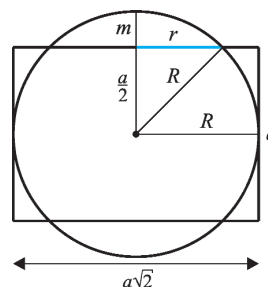
$$\underline{\underline{A_{\text{dobókocka}}}} = 2a^2\pi - 6 \cdot \frac{a^2\pi(2 - \sqrt{2})}{2} + 6 \cdot \frac{a^2\pi}{4} = \frac{a^2\pi(6\sqrt{2} - 5)}{2}.$$

2225. A V térfogatú A felszínű gúla írt gömb sugara $r = \frac{3V}{A}$; az oldallap területe

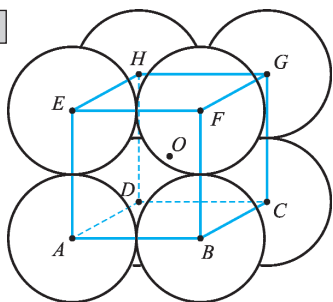
$$T_0 = \frac{a \cdot \sqrt{M^2 + \left(\frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}\right)^2}}{2}, \quad V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3} T_a \cdot M = \frac{1}{3} n \cdot \frac{a \cdot \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}}{2} \cdot M = \frac{nMa^2}{12 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \text{ és}$$

$$A_{\text{gúla}} = T_a + n \cdot T_0 = n \cdot \frac{a \cdot \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}}{2} + n \cdot \frac{a \cdot \sqrt{M^2 + \frac{a^2}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}}}}{2} = \frac{na \left(a + \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \cdot M^2 + a^2} \right)}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}};$$

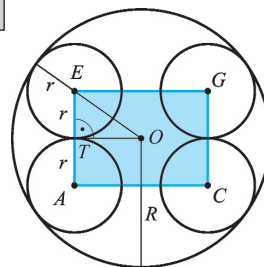
$$r = \frac{3V_{\text{gúla}}}{A_{\text{gúla}}} = \frac{M \cdot a}{a + \sqrt{4M^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} + a^2}}.$$

2224/I.**2224/II.**

2227/I.



2227/II.



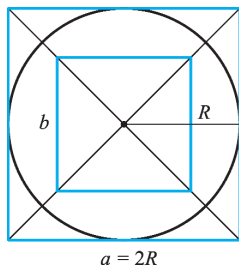
2226. $A_{\text{oktaéder}} = 8 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = 5 \text{ cm} = R. \Rightarrow \underline{A_{\text{gömb}} \approx 314 \text{ cm}^2}$ és $\underline{V_{\text{gömb}} \approx 523,6 \text{ cm}^3}$.

2227. A középpontok egy $2r$ oldalú kocka csúcsai $\Rightarrow AC = 2r\sqrt{2}$. Tekintsük az átlós síkmetszetet! ETO derékszögű háromszögben $ET = r$; $OT = \frac{1}{2} AC = r\sqrt{2}$; $OE = R - r$. Pitagorasz-tétel az ETO derékszögű háromszögre: $r^2 + (r\sqrt{2})^2 = (R - r)^2 \Rightarrow 2r^2 + 2Rr - R^2 = 0 \Rightarrow \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2R \pm 2\sqrt{3}R}{4}$. A másodfokú egyenlet pozitív megoldása a gömb sugara $\underline{r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} R}$.

2228. Legyen a külső kocka éle a , a belső kocka éle b , a gömb sugara R . Tekintsük a négy él felezőpontjára illeszkedő síkmetszetet és az átlós síkmetszetet: $a = 2R$; $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$. A feladat adatai szerint $a - b = d \Rightarrow 2R - \frac{2\sqrt{3}}{3} R = d \Rightarrow \underline{R = \frac{d}{2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}}$

$= \frac{3 + \sqrt{3}}{4} d$; $\underline{a = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} d}$; $\underline{b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{(3 + \sqrt{3})}{4} d = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} d}$.

2228/I.



2228/II.

