V

4228. Az adott körök k_1: $x^2+(y-3)^2=3$ és k_2: $(x-1)^2+y^2=1$. $K_1(0;3)$, $r_1=\sqrt{3}$, $K_2(1;0)$, $r_2=1$. $K_1K_2=\sqrt{10}>1+\sqrt{3}$, a két körnek nincs közös pontja. Legyen $P(x;y)$. Az egyenlő hosszú érintőszakaszokra felírhatjuk a következő egyenletet: $x^2+(y-3)^2-3=$ $=(x-1)^2+y^2-1$. Innen e: $x-3y+3=0$. A P pont a kapott egyenesen fut végig. Vegyük észre, hogy $e\perp K_1K_2$.

4229. Az $ABCD$ téglalap csúcsai: $A(1;-4)$, $B(9;12)$, $C(5;14)$, $D(-3;-2)$. Ugyanis $\overrightarrow{AD}(-4;2)$, elforgatva $-90°$-kal $\mathbf{v}(2;4)$. $\overrightarrow{OB}=4\mathbf{v}+\overrightarrow{OA}$, ahol O az origó. $\overrightarrow{OB}(9;12)$. Az $ABCD$ köré írható kör egyenlete: $(x-3)^2+(y-5)^2=85$. Legyen $y=0$, $d_1=4\sqrt{15}$, legyen $x=0$, $d_2=4\sqrt{19}$. Az $\overrightarrow{AD}$ vektort $+90°$-kal elforgatva AB^*C^*D téglalapot kapunk, $d=4\sqrt{15}$. A kör az x tengelyt nem metszi.

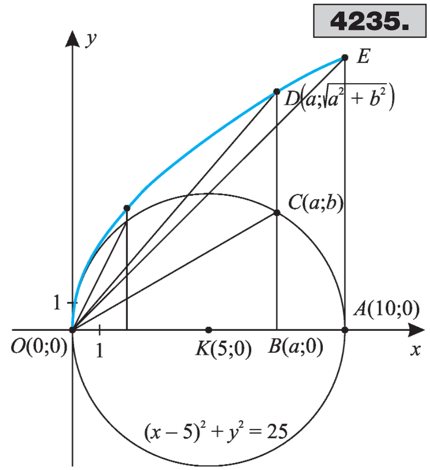
4230. Az adott kör középpontja: $K(0;-2)$, a sugara $r=\sqrt{5}$ egység, $PK=\sqrt{50}$ egység. Az érintőszakasz d hosszára felírhatjuk a következő egyenletet: $d^2=50-5$, $d=3\sqrt{5}$. Az érintési pont koordinátáit az $\left.\begin{array}{r}(x-5)^2+(y-3)^2=45\\ x^2+y^2+4y=1\end{array}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják. $E_1(-1;0)$, $E_2(2;-3)$. $E_1E_2=3\sqrt{2}$. Az érintők egyenletei: e_1: $x-2y+1=0$, e_2: $2x-y-7=0$.

4231. A C csúcsot az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az adott körből. Két megoldás van: $C_1(1;-4)$, $C_2(4;-1)$.

4232. A keresett k kör középpontja rajta van az $x=2$ egyenletű egyenesen és az $E(2;-4)$, $A(10;2)$ pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegesén. Az $x=2$, $4x+3y=21$ egyenletrendszer gyökei $K\left(2;\frac{13}{3}\right)$. k egyenlete: $(x-2)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{625}{9}$, mert $r=\frac{13}{3}+4$.

4233. A P pont koordinátái: $(x;y)$.
Ekkor $(x+4)^2+y^2+(x-8)^2+y^2=80 \Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=16$. A kör minden pontja megfelel.

4234. Határozzuk meg az $y=\lambda(x-4)$ és az $y=-\frac{1}{\lambda}x$ egyenletű egyenesek M metszéspontjának koordinátáit. Rögtön adódik, hogy a $(0;0)$ és a $(4;0)$ koordinátájú pontok nem lehetnek az $\left.\begin{array}{l}(1)\ \ y=\lambda(x-4)\\ (2)\ \ y=-\frac{1}{\lambda}x\end{array}\right\}$ egyenletrendszer gyökei. Ugyanis, ha $y=0$, akkor $\lambda=0$, vagy $x=4$. De $\frac{1}{\lambda}$ miatt $\lambda\neq 0$. Ha $x=4$, akkor $y=0$ és a (2)-es egyenlet szerint $x=0$ adódna, ami ellentmondás. Feltételezve, hogy $\lambda\neq 0$, $x=\frac{4\lambda^2}{\lambda^2+1}$, $y=-\frac{4\lambda}{\lambda^2+1}$. Küszöböljük ki a $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ paramétert. $x^2+y^2=\frac{16(\lambda^2+\lambda)^2}{(\lambda^2+1)^2}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{16\lambda^2}{\lambda^2+1}$. De $\frac{16\lambda^2}{\lambda^2+1}=4x$, tehát $x^2+y^2+4x=0$. A mértani hely olyan kör, amelynek középpontja a $K(-2;0)$ pont és a sugara $r=2$. A $(0;0)$ és a $(4;0)$ pontok nem tartoznak a mértani helyhez.



4235. Jelöléseinket az ábrán láthatjuk. Legyen $0 \leqq b \leqq 5$, akkor $0 \le a \le 10$. A C pont koordinátáira igaz, hogy $(a-5)^2+b^2=25 \Leftrightarrow a^2+b^2-10a=0$. A D pont $(x;y)$ koordinátáira felírhatjuk a következő egyenlőségeket: $x=a$, $y^2=a^2+b^2$. De $a^2+b^2=$ $=10a=10x$, tehát $y^2=10x$, ahol $0 \le x \le 10$ és $0 \le y \le 10$. A mértani hely az $y^2=10x$ egyenletű parabolának az ábrán látható OE íve.

4236. Az érintő egyenlete $y=mx-4$ alakú. Az egyenesnek egy közös pontja van a parabolával, ha az $mx-4=\frac{1}{4}x^2$ egyenlet diszkriminánsa 0. $m=\pm 2$; $y=\pm 2m-4$.

4237. A $P(-4;-1)$ ponton átmenő egyenessereg egyenlete: $y+1=m(x+4) \Rightarrow$ $\Rightarrow x=\dfrac{y+1-4m}{m}$. Az egyenes érintő, ha az $y^2=\dfrac{2(y+1-4m)}{m}$ egyenlet diszkriminánsa 0. Két érintőt kapunk: e_1: $y=\frac{1}{2}x+1$, e_2: $y=-\frac{1}{4}x-2$.

4238. $y_1=(3-a)^2-6(3-a)+10=a^2+1$ és $y_2=(3+a)^2-6(3+a)+10=a^2+1$.

4239. $b=0$, $a=-5$.

4240. Helyettesítsük az $y=ax^2+bx+c$ egyenletben az x és y helyére az adott pontok koordinátáit. A kapott egyenletrendszerből $a=2$, $b=-8$, $c=6$. $y=2(x-2)^2-2$. $F\left(2;-\dfrac{15}{8}\right)$, a vezéregyenes egyenlete: $y=-\dfrac{17}{8}$, mert $p=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{8}$ és a tengelypont: $C(2;-2)$.

4241. Oldjuk meg az $\left.\begin{array}{l} y=x^2+2x \\ \underline{y=mx} \end{array}\right\}$ egyenletrendszert. $x^2+(2-m)x=0$. Egy közös pont van, ha $m=2$. Az $y=2x$ egyenes érinti a parabolát. Ha $m \ne 2$, az egyenes két pontban metszi a parabolát, kivéve az y tengelyt, amely a $(0;0)$ pontban metszi a parabolát. Az $y=-\dfrac{1}{2}x$ egyenesnek a parabolával két közös pontja van. $O(0;0)$, $M\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{4}\right)$, $OM=\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$.

4242. Az $y=mx$ és az $y=4x^2+4$ egyenletekből álló egyenletrendszernek egy megoldása van, ha $m=\pm 8$. Az érintők egyenletei: $y=\pm 8x$. $E_1(-1;8)$, $E_2(1;8)$.

4243. $y=(x+1)^2+c-1$. A tengelypont az $x=-1$ egyenletű egyenesre illeszkedik c értékétől függetlenül. Ha $c=1$, akkor a tengelypont $T(-1;0)$.

4244. A $P(1;1)$ pont koordinátái kielégítik a parabola egyenletét. Innen $b+c=0$, $c=-b$. Az $y=x$ egyenletű egyenes érinti az $y=x^2+bx-b$ parabolát, ha a diszkrimináns $(b-1)^2+4b=0$. $b=-1$, $c=1$.

4245. A parabola az x tengelyt az $A(-3;0)$, $B(3;0)$ pontokban metszi. A kör egyenlete $x^2+(y-4)^2=25$. $C(4;7)$, $D(-4;7)$. Az $ABCD$ trapéz területe: $t=\dfrac{8+6}{2}\cdot 7=49$ területegység.

V

4246. A parabola az x tengelyt a $P_1(1;0)$ és $P_2(3;0)$ pontokban metszi. Az érintő iránytangensét az $f(x)=-x^2+4x-3$ függvény deriváltjával számíthatjuk ki. $f'(x)=-2x+4$. $f'(1)=2$ és $f'(3)=-2$. Az érintők egyenletei: e_1: $y=2x-2$ és e_2: $y=-2x+6$. Az $e_1e_2\sphericalangle=53{,}13°$.

4247. A parabola $P(a;a^2)$ pontjában az érintő iránytangense az $f'(x)=2x$ függvénnyel számítható ki, $m_1=2a$. A PA egyenes iránytangense $m_2=\dfrac{8-a^2}{9-a}$. $\overrightarrow{PA}(9-a;8-a^2)$. A merőlegesség feltétele: $m_1m_2=-1$. $2a\cdot\dfrac{8-a^2}{9-a}=-1 \Leftrightarrow 2a^3-15a-9=0$, $a\neq 9$. Az egyenlet bal oldala szorzattá bontható. $2(a^3-27)-15(a-3)=0 \Leftrightarrow (a-3)(2a^2+6a+3)=0$. Innen $a_1=3$, $a_2=-0,63$, $a_3=-2,36$. A P pontra három megoldás van. $P_1(3;9)$, $P_2(-0,63;0,40)$, $P_3(-2,36;5,57)$.

4248. *I. megoldás.* A $P(2;-4)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete az m iránytangenssel kifejezve: $y=mx-2m-4$. m-et úgy kell meghatározni, hogy az $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{8}x^2 \\ y=mx-2m-4 \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek egy megoldása legyen. A diszkrimináns $D=64m^2-4(16m+32)$. Az egyenes érinti a parabolát, ha $D=0$; $m_1=2$, $m_2=-1$. Két érintő húzható: $y=2x-8$, vagy $y=-x-2$. Az érintési pontok koordinátái: $T_1(8;8)$, $T_2(-4;2)$. *a)* Ekkor $2=\dfrac{-4+8}{2}$ igaz állítás. *b)* $F(0;2)$. $PF=\sqrt{40}$, $T_1F=10$, $T_2F=4$. Valóban $PF=\sqrt{T_1F\cdot T_2F}$.

II. megoldás. Az érintő iránytangensét az $f(x)=\dfrac{1}{8}x^2$, $x\in\mathbf{R}$ függvény derivált függvényével is meghatározhatjuk. $f'(x)=\dfrac{1}{4}x$. A $T(a;a^2)$ pontban $f'(a)=m=\dfrac{a}{4}$. $\overrightarrow{PT}\left(a-2;\dfrac{1}{8}a^2+4\right)$.

A PT érintő iránytangense: $\dfrac{\frac{1}{8}a^2+4}{a-2}=\dfrac{a}{4}$. Innen $a_1=8$, $a_2=-4$. $T_1(8;8)$, $T_2(-4;2)$.

4249. Két érintőt kapunk. $y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}x-\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}-1$. Vegyük észre, hogy $m_1m_2=-1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ az érintők merőlegesek egymásra. P a vezéregyenesen van.

4250. Az $y=3x^2-4$ egyenletű parabolát az $y=2x+b$ egyenletű egyenes két pontban metszi, ha $13+3b>0$. Ekkor a metszéspontok abszcisszái:
$x_1=\dfrac{1+\sqrt{13+3b}}{3}$ és $x_2=\dfrac{1-\sqrt{13+3b}}{3}$. A húr felezőpontjának első koordinátája:
$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{3}=$ állandó. A mértani hely az $x=\dfrac{1}{3}$ egyenletű egyenesnek a parabola belsejébe eső pontjai. Olyan pontok, amelyek második koordinátája $y>3\cdot\dfrac{1}{9}-4$, $y>-\dfrac{11}{3}$.

4251. A $P(u;v)$ ponton átmenő egyenesek paraméteres egyenlete: $y=mx+v-mu$, ahol $m\in\mathbf{R}$ és $u<0$. Az egyenes érinti a parabolát, ha az $\left.\begin{array}{l} y^2=2px \\ y=mx+v-mu \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek

egy megoldása van és $m \neq 0$. Az $y = \dfrac{my^2}{2p} + v - mu$ egyenlet diszkriminánsa 0 kell legyen.
(1) $D = 4p^2 - 4m(2pv - 2pum) = 0$. (1) egyenletből $4p \neq 0$-val egyszerűsítve:
(2) $2um^2 - 2vm + p = 0$ adódik. (2) egyenletnek m-re két valós gyöke van, mert a diszkrimináns $4(v^2 - 2pu) > 0$. 0 akkor lenne, ha az $(u; v)$ pont parabolapont lenne, de a P pont a parabola külső pontja, ezért $v^2 > 2pu$. A $P(u; v)$ pontból húzott érintők pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $m_1 m_2 = -1$. A (2)-es egyenletből $m_1 m_2 = \dfrac{p}{2u}$, $\dfrac{p}{2u} = -1 \Leftrightarrow u = -\dfrac{p}{2}$. A derékszög csúcsának mértani helye a parabola vezéregyenese.

Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
A kiadásért felel: Jókai István vezérigazgató
Raktári szám: 16127/II
Felelős szerkesztő: Szloboda Tiborné
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Műszaki szerkesztő: Wéber Andrea
Grafikai szerkesztő: Villám Péter
Terjedelem: 52,91 (A/5) ív
1. kiadás, 2005
Formakészítés: Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Stúdió