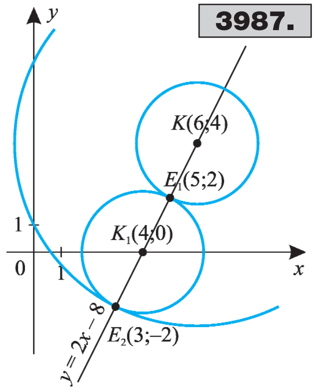
V



3986. A keresett kör középpontja $K(u;\ v)$, a sugara $r = 1$. Az adott kör középpontjának koordinátái: $K_1(4;\ 2)$ és a sugara $r_1 = 1$, az adott pont $P(2;\ 1)$. Ekkor $KP = 1$ és $KK_1 = 2$. (1) $(u-2)^2+(v-1)^2=1$, (2) $(u-4)^2+(v-2)^2=4$. (1)–(2) egyenletrendszer gyökei: $u_1 = 2, v_1 = 2$, $u_2 = 2{,}8$, $v_2 = 0{,}4$. A keresett körre két megoldást kaptunk. $(x-2)^2+(y-2)^2 = 1$ és $(x-2{,}8)^2+(y-0{,}4)^2 = 1$.

3987. Ha két kör kívülről, vagy belülről érinti egymást, akkor az érintési pontok a középpontokon átmenő egyenesekre illeszkednek. A keresett kör középpontjai; $K(6;\ 4)$, az adott kör középpontja $K_1(4;0)$. A centrális egyenes egyenlete: $y = 2x - 8$. Ez az egyenes az adott kört két pontban metszi. $E_1(5;\ 2)$, $E_2(3;\ -2)$. A sugarak hossza $KE_1 = \sqrt{5}$, $KE_2 = \sqrt{45}$ egység. A körök egyenletei: $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 5$ és $(x-6)^2+(y-4)^2 = 45$. Utóbbi kör az adott kört belülről érinti.

3988. Adott kör középpontja $K(-2;\ -2)$, a sugara $r = \sqrt{2}$ egység. A keresett kör középpontja $K(u;\ v)$ a sugara $r = \sqrt{8}$ egység. A K_1 pontnak két feltételt kell kielégítenie. $K_1K = \sqrt{8} + \sqrt{2}$ és $K_1P = \sqrt{8}$.

A keresett kör egyenlete: $(x-1)^2+(y-1)^2 = 8 \vee \left(x+\dfrac{47}{13}\right)^2+\left(v-\dfrac{25}{13}\right)^2 = 8.$

3989. Az adott körök kívülről érintik egymást, mert a középpontjaik távolsága a sugaraik hosszának összegével egyenlő. $K_1(-2;\ -3)$, $r_1 = 10$, $K_2(10;\ 6)$, $r_2 = 5$. $K_1K_2 = 15$. A keresett kör középpontja rajta van a K_1K_2 egyenesen, másrészt az x tengelyre illeszkedik. K_1K_2 egyenlete: $3x - 4y = 6$. A K középpont koordinátái (2; 0), a sugara $r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, az egyenlete $(x-2)^2+y^2 = 25$.

3990. Az adott kör középpontja $K(-1;\ 2)$, a sugara $r = 10$, az adott pontja $P(7;\ 8)$. A keresett kör K_1 középpontjának koordinátái u és v, a sugara $r = |v|$, mert érinti az x tengelyt. K_1 rajta van a KP egyenesen, és $K_1P = r$. A keresett kör egyenlete: $(x-3)^2+(y-5)^2=25$.

3991. A keresett kör K_1 középpontjának koordinátái $K_1(u;\ u)$ és a sugara $r = u$. Felírhatjuk u-ra a következő egyenletet (figyelembevéve, hogy az adott kör középpontja $K(-3;\ -1)$, a sugara $r = 5$: $(u+3)^2+(u+1)^2=(5+u)^2$. Innen $u = 5$. A keresett kör egyenlete:
$(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

3992. Az adott körök középpontjainak koordinátái: $K_1(0;\ 0)$, $K_2(2;\ 4)$, a sugaraik $r_1 = 5$, $r_2 = 4$ egység. A keresett kör középpontja $K(u;\ v)$ a sugara 5 egység; K-ra felírhatjuk a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{ll}(1) & u^2+v^2 = 100\\ (2) & (u-2)^2+(v-4)^2 = 81\end{array}\right\}$. $K'(-6{,}09;\ 7{,}92) \vee K''(9{,}99;\ -0{,}12)$.

3993. Az adott körök sugarai megegyeznek. Ezért elegendő meghatározni a $K_1(2;\ 9)$, $K_2(1;\ 2)$ és a $K_3(9;\ 8)$ középpontokon átmenő k kör egyenletét, azután a k kör sugarát 2 egységgel csökkentve, illetve növelve megkapjuk a keresett körök egyenletét.
$(x-5)^2+(y-5)^2 = 9$ és $(x-5)^2+(y-5)^2 = 49$.

3994. Két egymást metsző kör hajlásszögét a metszéspontban húzott érintők hajlásszögével definiáljuk. Az adott körök metszéspontjai: $P_1(3{,}2;\ 2{,}4)$, $P_2(3{,}2;\ -2{,}4)$. A P_1 pontbeli érintők egyenletei: e_1: $3{,}2x + 2{,}4y = 16$ és e_2: $-1{,}8x + 2{,}4y = 0$. e_1 normálvektora $\mathbf{n}_1(3{,}2;\ 2{,}4)$, e_2 normálvektora $\mathbf{n}_2(-1{,}8;\ 2{,}4)$. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ a hajlásszög 90°. P_2 pontban a hajlásszög szintén 90°, mert P_1 és P_2 a centrális egyenesre szimmetrikus pontok.

3995. A keresett kör egyenlete $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$. Mivel a kör átmegy az $(1; 0)$ és a $(0; 1)$ koordinátájú pontokon, azért $u = v$ Ekkor $(1-u)^2 + u^2 = r^2$, illetve $2u^2 - 2u + 1 = r^2$. Másrészt a metszéspont, a $K(u;\ v)$ pont és az adott kör $K_1(-1;\ 0)$ középpontja egy derékszögű háromszög csúcsai, mivel a két kör merőlegesen metszi egymást. Így alkalmazva Pitagorasz tételét: $(u-1)^2 + u^2 = 1 + r^2$. A két egyenletből: $u = \frac{1}{4}$, $r^2 = \frac{5}{8}$. A keresett kör egyenlete:
$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}.$$

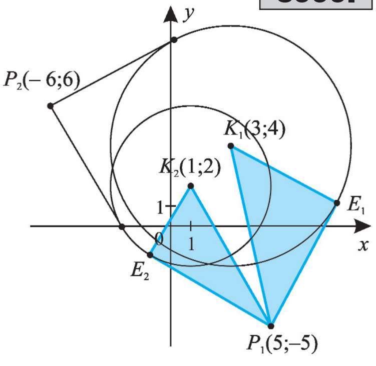
3996. A keresett kör egyenlete: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = 9$. A $P(2;\ 3)$ pont rajta van a körön, ezért $(2-u)^2 + (3-v)^2 = 9$.
Az E metszéspont, a $K(u;\ v)$ pont és az $O(0;\ 0)$ pont derékszögű háromszög csúcsai, mert a keresett kör az adott kört derékszögben metszi. Ezért $u^2 + v^2 = 1 + 9$. A felírt egyenletek megoldásai: $(-1;\ 3)$ és $\left(\frac{41}{13};\ \frac{3}{13}\right)$. Két megoldás van: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ és $\left(x - \frac{41}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{13}\right)^2 = 9$.

3997. A $k_1 - k_2 = 0$ valóban egyenes egyenlete: $16x - 4y + 3 = 0$. A centrális egyenes egyenlete: $x + 4y = 37$. A két egyenes merőleges egymásra, mert $1 \cdot 16 + 4 \cdot (-4) = 0$. A feladat könnyen általánosítható. Legyen a két kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r_1^2$, $(xa)^2 + y^2 = r_2^2$.

3998. *a)* Oldjuk meg az egyenletrendszert: $\left.\begin{aligned} (1)\quad x^2 + y^2 &= 9 \\ (2)\quad 9 - 6x - 8y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{27 \pm 12\sqrt{91}}{50}$,
$y = \frac{9}{8} - \frac{81 \pm 36\sqrt{91}}{200}$. A húr hossza $d = \frac{3\sqrt{91}}{5}$ egység. *b)* $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ egység; *c)* $2\sqrt{2}$ egység; *d)* $\frac{2\sqrt{97}}{97}$ egység; *e)* $10\sqrt{2}$ egység.

3999. A keresett P pont koordinátái: $(x;\ y)$. Az adott körök adatai: $K_1(3;\ 4)$, $r_1 = 6$, $K_2(1;\ 2)$, $r_2 = 4$, az érintési pontok E_1 és E_2. Ekkor a PK_1E_1 háromszög és a PK_2E_2 háromszög derékszögű. (Az átfogók PK_1 és PK_2.) A következő egyenleteket írhatjuk fel, alkalmazva a Pitagorasz tételét: (1) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 36 + 49$, (2) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16 + 49$. (1)-(2) egyenletrendszer gyökei adják a P pont koordinátáit. $P_1(5;\ -5)$, $P_2(-6;\ 6)$.

3999.



4000. A közös húr végpontjainak koordinátáit az $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják. $P_1(3;\ -1)$, $P_2(-1;\ 3)$. A húr egyenlete: $x + y = 2$. A háromszög területe 2 területegység.

4001. Az adott k kör középpontja $K(-1;\ 2)$, a sugara $r = 10$ egység. A keresett k_1 kör középpontja $K_1(u; v)$ a sugara $r = |v|$ mert a kör érinti az x tengelyt. (A sugár merőleges az érintőre). Mivel k_1 érinti a k kört a $P(7;\ 8)$ pontban, azért a K_1 pont rajta van a KP egyenesen. KP egyenlete: $-3x+4y=11$. A k_1 kör egyenlete: $(x-u)^2+(y-v)^2=v^2$. A P pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét, a kör $(u;\, v)$ koordinátái kielégítik a KP egyenletét. Ekkor $\left.\begin{array}{ll}(1) & -3u+4v=11\\ (2) & (7-u)^2+(8-v)^2=v^2\end{array}\right\}$. (1)−(2) egyenletrendszer gyökei: $u_1=3$, $v_1=5$, $u_2=23$, $v_2=20$. A keresett kör egyenlete: (3) $(x-3)^2+(y-5)^2=$ $=25$ vagy (4) $(x-23)^2+(y-20)^2=400$. A (3)-as kör belülről a (4)-es kör kívülről érinti az adott kört a $P(7;\, 8)$ pontban.

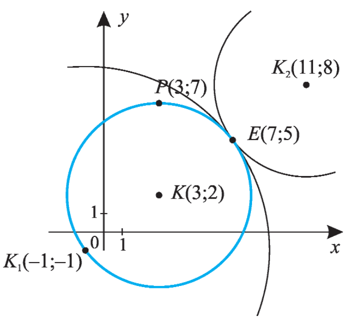
4002. A $K_1(-8;\, 12)$ középpontú és $r_1=10$ egység sugarú kör érinti a $K_2(4;\, -4)$ középpontú és $r_2=10$ egység sugarú kört, mert az $\left.\begin{array}{r}(x+8)^2+(y-12)^2=100\\ (x-4)^2+(y+4)^2=100\end{array}\right\}$ egyenletrendszert egyetlen számpár, az $E(-2;\, 4)$ számpár elégíti ki.

A keresett k kör K középpontjának koordinátái $(u;\, v)$, a sugara $r=|v|$, mert a kör érinti az x tengelyt. Másrészt a K pont rajta van a K_1K_2 egyenesen, amelynek egyenlete $4x+3y=4$. A K kör átmegy az $E(-2;\, 4)$ ponton, ezért E koordinátái kielégítik a k kör egyenletét. Két érintőkör van: $(x+14)^2+(y-20)^2=400$ és $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{20}{9}\right)^2=\frac{400}{81}$.

4003. $(x-20)^2+(y-22)^2=400$ és $(x-5)^2+(y-2)^2=25$.

4004. Készítsünk ábrát. A k_1 kör K_1 középpontjának koordinátái $K_1(-1;\, -1)$ a sugara $r_1=10$ egység. A k_2 kör K_2 középpontjának koordinátái $K_2(11;\, 8)$ a sugara $r_2=5$ egység. $K_1K_2=15$, a két kör érinti egymást. Az E érintési pont koordinátái $E(7;\, 5)$. A k kör $K(u;\, v)$ középpontja rajta van a K_1K_2 egyenesen és a PE szakasz felezőmerőlegesén, mert k érinti a k_1 kört belülről, a k_2 kört kívülről az E pontban, és átmegy a P ponton. u-ra, v-re felírhatjuk a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{ll}(1) & 3u-4v=1\\ (2) & 2u-v=4\end{array}\right\}$. (1) a PE szakasz felezőmerőlegesének egyenlete, (2) a K_1K_2 egyenes egyenlete. Innen $u=3$, $v=2$, a sugár 5 egység. k egyenlete: $(x-3)^2+$ $+(y-2)^2=25$.

4004.

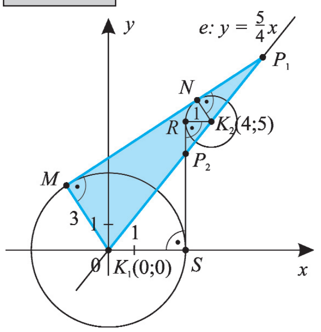


4005. Az $(x+3)^2+(y+1)^2=r^2$ egyenletű kör, amely az adott körrel koncentrikus az x tengelyt az $A\left(-3+\sqrt{r^2-1};\, 0\right)$ és a $C\left(-3-\sqrt{r^2-1};\, 0\right)$, az y tengelyt a $B\left(0;\, -1+\sqrt{r^2-9}\right)$ és a $D\left(0;\, -1-\sqrt{r^2-9}\right)$ pontokban metszi, ahol $r>3$. Az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra és a területe:

$$\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{2\sqrt{r^2-9}\cdot 2\sqrt{r^2-1}}{2}=8\sqrt{15}.\quad \text{Innen}\quad r^2=21.$$

A k kör egyenlete: $(x+3)^2+(y+1)^2=21$.

4006.



4006. Az adott k_1 kör K_1 középpontja az origó, $K_1(0;\, 0)$, a sugara $r_1=3$ egység, a k_2 kör K_2 középpontjának koordi-

nátái $K_2(4;\,5)$, a sugara $r_2 = 1$ egység. $K_1K_2 = \sqrt{41}$ egység. A centrális egyenlete $y = \frac{5}{4}x$.
A két körhöz közös érintő a külső, illetve a belső hasonlósági pontból húzható. A külső hasonlósági P_1 pont koordinátái legyenek $(a;\,b)$. P_1-nek az origótól való távolságát a K_1MP_1 és a K_2NP_1 hasonló derékszögű háromszögek segítségével számíthatjuk ki.
$\frac{K_1P_1}{K_2P_1} = \frac{K_1M}{K_2N} \Rightarrow \frac{\sqrt{41} + K_2P_1}{K_2P_1} = \frac{3}{1}$. Innen $K_2P_1 = \frac{\sqrt{41}}{2}$ és $K_1P_1 = \frac{3\sqrt{41}}{2}$ egység. Ekkor az $(a;\,b)$ koordinátákra a következő egyenletrendszert írhatjuk fel: $b = \frac{5}{4}a$ és
$a^2 + b^2 = \left(\frac{3\sqrt{41}}{2}\right)^2$. Innen $a = 6$, $b = \frac{15}{2}$. A K_1SP_2 és a K_2RP_2 hasonló derékszögű háromszögek segítségével számíthatjuk ki a P_2 belső hasonlósági pont koordinátáit. $P_2\left(3;\,\frac{15}{4}\right)$.

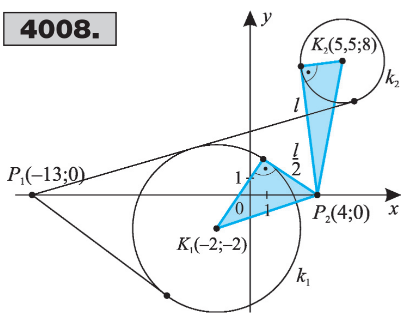
V

4007. Tegyük fel, hogy a $P(a;\,b)$ pontból húzható egyenlő d hosszúságú érintő az adott körökhöz. Ekkor a P pont, a körök $K_1(-3;\,5)$ és $K_2(9;\,2)$ középpontja és az E_1, E_2 érintési pontok a PK_1E_1 és a PK_2E_2 derékszögű háromszögeket feszítik ki. $PE_1 = PE_2 = d$, $K_1E_1 = 3$, $K_2E_2 = 1$. $PK_1^2 = (a+3)^2 + 5^2$, $PK_2^2 = (a-9)^2 + 4$. $d^2 = (a+3)^2 + 5^2 - 3^2$ és $d^2 = (a-9)^2 + 2^2 + 1^2$. Ezekből az egyenletekből $a = \frac{11}{4}$. Az x tengely $\left(\frac{11}{4};\,0\right)$ pontjából húzhatók egyenlő hosszúságú érintők az adott körökhöz. (Az egyenlő érintők $\sqrt{42{,}0625}$ egység hosszúak.)

4008. Jelöljük az x tengely azon P pontjának koordinátáit $(a;\,0)$-val, amelyből a $k_1{:}\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + (y-8)^2 = 6{,}25$ egyenletű körhöz kétszer olyan hosszú érintő húzható, mint a $k_2{:}(x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$ körhöz. A P pont a körök középpontjai és az érintési pontok egy-egy derékszögű háromszöget határoznak meg. Legyen a k_1 körhöz húzott érintő hossza l. Ekkor a következő egyenleteket írhatjuk fel Pitagorász tétele szerint: $l = \sqrt{\left(a - \frac{11}{2}\right)^2 + (0-8)^2 - 6{,}25}$,
$\frac{l}{2} = \sqrt{(a+2)^2 + (0+2)^2 - 25}$. Két megoldás van. $P_1(-13;\,0)$, $P_2(4;\,0)$.

4009. A keresett k kör $K(u;\,v)$ középpontja rajta van az PQ szakasz felezőmerőlegesén az $x + y = 16$ egyenletű egyenesen. Másrészt $KR = KP + 2 = KQ + 2$. Ennek alapján az $(u;\,v)$ koordinátákra a következő egyenleteket írhatjuk fel: (1) $u + v = 16$, (2) $\sqrt{u^2 + v^2} = = \sqrt{u^2 + (v-12)^2} + 2$. $K_1(8{,}3;\,7{,}7)$ és $K_2(12{,}3;\,3{,}7)$. A feladatnak a K_1 felel meg. A K_2 középpontú K_2P sugarú körnek az $R(0;\,0)$ pont belső pontja. A keresett kör sugara $KP \approx 11$ méter. A tó átmérője méter pontossággal 22 méter.

4008.



A parabola

A parabola egyenlete

4010. és **4011.** A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

4012. A parabola egyenlete: $y=\frac{1}{2p}x^2$. Ha a $P_1(x_1;\ y_1)$ pont rajta van a parabolán, akkor $y_1=\frac{1}{2p}x_1^2$. Válasszunk olyan $P(x;\ y)$ pontot, amely a parabola külső pontja. Húzzunk a P ponton át a parabola tengelyével párhuzamos egyenest. Ez egy $P_1(x_1;\ y_1)$ pontban metszi a parabolát. Ekkor $x=x_1$ és $y<y_1$. Ezért $y_1=\frac{1}{2p}x_1^2=\frac{1}{2p}x^2>y$. Hasonlóan igazolható, hogy ha a $P(x;\ y)$ pont a parabola belső pontja, akkor $\frac{1}{2p}x^2<y$.

4013. Az (1; 2) pont belső pont, mert $2>\frac{1}{12}$. A (6; 3) parabolapont, (– 3; 1) belső, a (– 7; 4) külső pont.

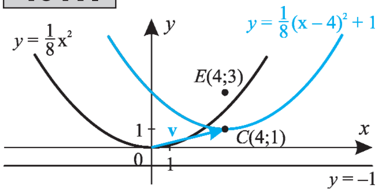
4014. *a)* $y=\frac{1}{2p}x^2$ egyenletbe helyettesítsük be a (12; 6) pontot. Ekkor $6=\frac{1}{2p}144$. Innen $2p=24$. Tehát a parabola egyenlete: $y=\frac{1}{24}x^2$. Ha a parabola tengelye az x tengely, akkor az $y^2=2px$ egyenletből $36=2p\cdot 12$, $y^2=3x$. *b)* $y=\frac{1}{4}x^2$, $y^2=4x$; *c)* $y=\frac{3}{16}x^2$, $y^2=-\frac{9}{4}x$; *d)* $y=-\frac{3}{32}x^2$, $y^2=-\frac{9}{2}x$.

4015. *a)* $y=\frac{1}{16}x^2$; *b)* $y=-\frac{1}{12}x$; *c)* $y=\frac{1}{8}x^2$; *d)* $y=-\frac{1}{32}x$; *e)* $y^2=16x$; *f)* $y^2=-20x$.

4016. *a)* $y^2=-28x$. *b)* $y=\frac{1}{16}x^2$.

4017. *a)* A parabola paramétere $p=4$. Az $y=\frac{1}{8}x^2$ egyenletű parabolát eltoljuk a $\mathbf{v}(4;1)$ vektorral. Az eltolt parabola egyenlete $y=\frac{1}{8}(x-4)^2+1$. Innen $x^2-8x-8y+24=0$. (4017. ábra). *b)* $x^2-4x+12y+4=0$; *c)* $x^2-6x+16y-23=0$; *d)* $y^2-4y-6x+19=0$; *e)* $y^2-6y-6x-6=0$; *f)* $x^2+2x-8y+17=0$; *g)* $y^2-4y-16x+68=0$. *h)* Két megoldás van: $x^2-16y+32=0$ vagy $x^2+16y-160=0$. *i)* Két megoldás van: $y^2-4y-8x+36=0$ vagy $y^2-4y+8x-60=0$.

4017.



4018. *a)* $c=0$. *b)* A $P(2;1)$ pont koordinátái kielégítik a parabola egyenletét: $4a+2b+c-1=0$; *c)* $16a-4b+c=0$; *d)* $9a+3b+c+2=0$.

4019. A parabola tengelypontjának koordinátái: $C(u; 2)$, a paramétere: $p = 3$. Az egyenlete: $y = \frac{1}{6}(x-u)^2 + 2$. Mivel a parabola átmegy a $(0; 8)$ ponton, azért $8 = \frac{1}{6}(-u)^2 + 2$. Innen $u = \pm 6$. Két megoldás van: $y = \frac{1}{6}(x-6)^2 + 2$ vagy $y = \frac{1}{6}(x+6)^2 + 2$.

4020. Két eset lehetséges. A parabola az x tengely pozitív irányában vagy negatív irányában nyílik szét. $2p = 1$, tehát $(y-v)^2 = x-u$ az egyenlete, vagy $(y-v)^2 = -(x-u)$. Figyelembe véve az adott parabolapontok koordinátáit: a következő egyenletrendszereket írhatjuk fel:
(1) $\left.\begin{array}{l}(4-v)^2 = -6-u\\(1-v)^2 = 9-u\end{array}\right\}$ és (2) $\left.\begin{array}{l}(4-v)^2 = -(-6-u)\\(1-v)^2 = -(9-u)\end{array}\right\}$. Az (1)-es egyenletrendszerből $(y-5)^2 = x+7$, a (2)-es egyenletrendszerből $y^2 = -(x-10)$ egyenleteket kapjuk.

V

4021. *a)* A tengelypont koordinátái $(0; v)$, a parabola egyenlete $(y-v)^2 = -2px$. Az adott pontok koordinátái kielégítik a parabola egyenletét: $\left.\begin{array}{r}(-1-v)^2 = 2p\\(1-v)^2 = -8p\end{array}\right\}$. Innen $v_1 = -3$, $p_1 = 2$, $v_2 = -\frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{2}{9}$. Két parabolát kapunk. $(y+3)^2 = -4x$ és $\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}x$.

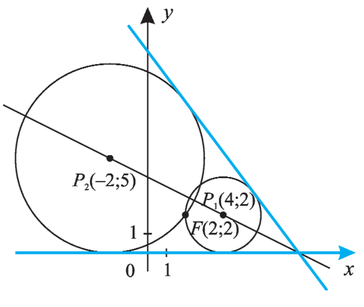
b) $3y = (x-5)^2$ és $(x-1)^2 = \frac{1}{3}y$.

4022. A keresett parabolák egyenletei: $y = (x-6)^2$ vagy $y = \frac{1}{25}(x+6)^2$.

4023. A parabola tengelyesen szimmetrikus. A keresett parabola szimmetriatengelye az $x = 1$ egyenletű egyenes. A parabola átmegy a $(2; 0)$ ponton és ezen pontnak az $x = 1$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképén a $(0; 0)$ ponton is. Felírhatjuk a, b, c-re a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{r}-1 = a+b+c\\0 = 4a+2b+c\\0 = 0\cdot a + 0\cdot b + c\end{array}\right\}$. Innen $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$.

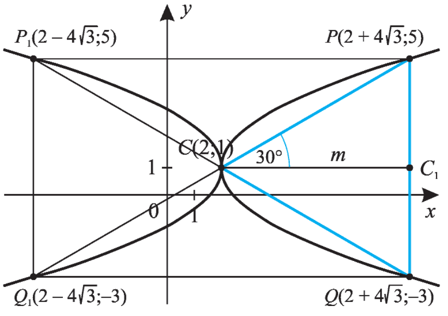
4024. A közös fókuszú parabolák vezéregyeneseit úgy kapjuk meg, hogy a parabola definícióját figyelembe véve a P_1 és P_2 pontok körül P_1F és P_2F sugarú köröket rajzolunk, és meghatározzuk ezen körök közös külső érintőit. Az érintők egyik-egyik parabola vezéregyenesét adják. $P_1F = 2$, $P_2F = 5$, $P_1P_2 < P_1F + P_2F$. A két kör metszi egymást. A centrális egyenlete $x + 2y = 8$. Az egyik külső érintő az x tengely, a másik külső érintő egyenlete: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3}$. Az egyik parabola paramétere 2, a másik parabola paramétere az $F(2; 2)$ pontnak a $4x + 3y - 32 = 0$ egyenletű egyenestől mért távolsága: 3,6 egység.

4024.



4025. Mivel mindkét egyenletben az x^2 együtthatója azonos, a két parabola egybevágó (mindkét parabola felfelé nyílik szét). A csúcspontjaik koordinátái: $C_1\left(2p;\ 2-4p^2\right)$, $C_2\left(-p; -p^2-4\right)$. A $\overrightarrow{C_1C_2}$ vektor koordinátái: $\left(-3p;\ 3p^2-6\right)$.
$$\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right| = \sqrt{(3p)^2 + \left(3p^2-6\right)^2} = 3\sqrt{\left(p^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}}.$$

4030.



Az eltolásvektor hossza akkor a legkisebb, ha $p^2=\frac{3}{2}$, $p=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. $\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right|_{min}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$ egység.

4026. *a)* $x^2-4x-4y=0$; *b)* $y=\frac{2}{9}x^2$;

c) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+5$; *d)* $7x^2-25x+6y+12=0$;

e) $3x^2-33x-4y+76=0$.

4027. A parabola egyenlete: $(y-v)^2=2p(x-u)$ alakú. Itt $v=0$, $u=-5$ és a $P(0;\,6)$ pont a parabolára illeszkedik. A parabola egyenlete $5y^2-36x-180=0$.

4028. $ay^2+b^2x-ab^2=0$.

4029. $bx^2+a^2y-a^2b=0$.

4030. Az ábra szerint a CPQ szabályos háromszög CC_1 magassága $\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ egység. A CP egyenes egyenlete $y-1=\operatorname{tg}30°(x-2)$, illetve $y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$. A P pont abszcisszája $2+4\sqrt{3}$, az ordinátája a CP egyenletből $y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2+4\sqrt{3}-2\right)$, $y=5$. A keresett parabola átmegy a $C(2;\,1)$, $P\left(2+4\sqrt{3};\,5\right)$és a $Q\left(2+4\sqrt{3};\,-3\right)$ pontokon. A parabola egyenlete: $(y-v)^2=2p(x-u)$, ahol $(u;\,v)$ a C csúcspont (tengelypont) koordinátái. $u=2$, $v=1$. Helyettesítsük a parabola egyenletébe a P pont koordinátáit. Ekkor $(5-1)^2=2p\left(2+4\sqrt{3}-2\right)$. Innen $2p=\frac{4\sqrt{3}}{2}$. A CPQ pontokon átmenő parabola egyenlete: $(y-1)^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}(x-2)$. (Szimmetria miatt a Q pont koordinátái is kielégítik a parabola egyenletét.) Még egy megoldást kapunk, ha a CPQ háromszöget az $x=2$ egyenletű egyenesre tükrözzük. A $C(2;\,1)$, $P_1\left(2-4\sqrt{3};\,5\right)$, $Q_1\left(2-4\sqrt{3};\,-3\right)$ csúcspontokon átmenő parabola egyenlete:

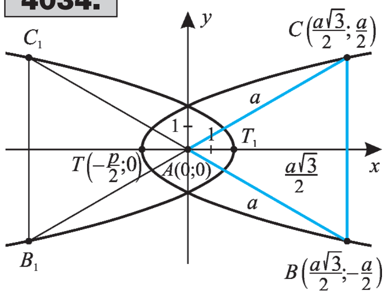
$(y-1)^2=\frac{-4\sqrt{3}}{3}(x-2)$.

4031. Helyezzük el a parabolát a koordináta-rendszerben úgy, hogy a híd tartószerkezetének két végpontja $A(-30;\,0)$, $B(30;\,0)$ és a legmagasabb pontja $C(0;\,15)$ legyen. A parabolaív egyenlete: $y=-\frac{1}{p}x^2+15$. Ekkor $0=-\frac{1}{2p}900+15$, innen $2p=60$. A parabola egyenlete: $y=-\frac{1}{60}x^2+15$, ahol $-30\le x\le 30$. A függőleges tartóvasak hossza méterben rendre: $\frac{55}{12}$; $\frac{25}{3}$; $\frac{45}{4}$; $\frac{40}{3}$; $\frac{175}{12}$; 15, ha az x helyére rendre behelyettesítjük a -25, -20, -15, -10, -5, 0 értékeket. A szimmetria miatt az első öt hosszúság a másik oldalon is érvényes.

V

4032. A parabola átmegy az $A(0;\ 0)$, $B(36;\ 0)$ és a $C(18;\ 12)$ pontokon, a tengelye párhuzamos az y tengellyel, a tengelypontja a C pont. Az egyenlete: (1) $y=-\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$ alakú, ahol $u=18$, $v=12$ és $x=y=0$. Ezeket az adatokat behelyettesítve az (1)-es egyenletbe $2p=27$. A röppálya egyenlete:
$y=-\frac{1}{27}(x-18)^2+12$, ahol $0\le x\le 36$.

4034.



4033. Induljon a vízsugár az $A(-1;\ 0)$ pontból és a $B(1;\ 0)$ pontba érkezzen vissza a talajra. $p=\frac{1}{10}$. A parabolaív egyenlete: $y=-\frac{1}{2p}x^2+v$.

Ekkor $0=-\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)}1+v$. A vízsugár $v=5$ méter magasra emelkedik.

4034. Tekintsük az ábrát. A parabola fókusza az $A(0;0)$ pont és a parabola átmegy a $T\left(-\frac{p}{2};\ 0\right)$ tengelyponton és a háromszög $B\left(\frac{a\sqrt3}{2};\ -\frac{a}{2}\right)$ és $C\left(\frac{a\sqrt3}{2};\ \frac{a}{2}\right)$ csúcsain. Ekkor a parabola egyenlete: $y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$ alakú. Behelyettesítve a B vagy a C csúcs koordinátáit, p-re a következő egyenletet kapjuk: $p^2+\left(a\sqrt3\right)p-\frac{a^2}{4}=0$. Innen, mivel $p>0$, $p=\frac{a\left(2-\sqrt2\right)}{2}$ adódik. A parabola egyenlete: $y^2=a\left(2-\sqrt3\right)\left(x+\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt3}{4}\right)$. Ha a tengelypont $T\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, akkor az egyenlet: $y^2=-a\left(2+\sqrt3\right)\left(x-\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt3}{4}\right)$.

4035. A parabola tengelye az y tengely, az $(r;\ 0)$, $\left(\sqrt{r^2-b^2};\ b\right)$, $\left(-\sqrt{r^2-b^2};\ b\right)$ $(-r;\ 0)$ pontok rajta vannak a parabolán. Egyenlete: $y=-\frac{1}{2p}x^2+v$ alakú. Legyen $y=0$, $x=r$, ekkor $r^2=2pv$. A $\left(\sqrt{r^2-b^2};\ b\right)$ pont is illeszkedik a parabolára. Ezért $b=-\frac{1}{2p}\left(r^2-b^2\right)+v$. Az

$$\left.\begin{aligned} r^2&=2pv\\ 2pb&=b^2-r^2+2pv\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből $2p=b$ és $v=\frac{r^2}{b}$. A parabola egyenlete:
$y=-\frac{x^2}{b}+\frac{r^2}{b}$, illetve $x^2+by-r^2=0$.

4036. *a)* $p=12$, $F(0;\ 6)$, $y+6=0$; *b)* $p=4$, $F(0;\ -2)$, $y-2=0$; *c)* $p=3$, $F\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$, $y+\frac{3}{2}=0$; *d)* $p=\frac{1}{2}$, $F\left(0;\ -\frac{1}{4}\right)$, $y-\frac{1}{4}=0$; *e)* $p=2$, $F(0;\ -1)$, $y-1=0$; *f)* $p=4$,

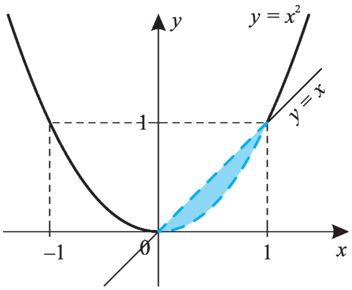
$F(-6; 7)$, $y-3=0$; *g)* $p=2$, $F(-1; 2)$, $y-4=0$; *h)* $p=6$, $F(0; 2)$, $x+6=0$; *i)* $p=2$, $F(0; -7)$, $y+9=0$; *j)* Az egyenlet $y^2=-6\left(x-\frac{2}{3}\right)$ alakban is felírható. Innen $2p=6$, $\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$, $F\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}; 0\right)$, $F\left(-\frac{5}{6}; 0\right)$, $x=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$, $x=\frac{13}{6}$. *k)* $p=3$, $F\left(0; \frac{7}{2}\right)$, $y-\frac{1}{2}=0$; *l)* $p=\frac{1}{2}$, $F\left(0; \frac{7}{4}\right)$, $y-\frac{9}{4}=0$. *m)* A parabola egyenlete: $y=\frac{1}{4}\left(x^2+4x+4\right)+1$, $y=\frac{1}{4}(x+2)^2+1$ alakban is felírható. Hasonlítsuk össze a parabola egyenletét az $y=\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$ egyenlettel. $2p=4$, $u=-2$, $v=1$. A tengelypont koordinátái $C(-2; 1)$, $F(-2; 2)$, a vezéregyenes egyenlete: $y=0$. *n)* $y=-\frac{1}{6}\left(x^2-12x+36\right)-1$, $y=-\frac{1}{6}(x-6)^2-1$. $p=3$, $F\left(6; -\frac{5}{2}\right)$, $y=-1+\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. *o)* $(y-1)^2=10(x+2)$ egyenletből $p=5$, $F\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $x+\frac{9}{2}=0$. *p)* $p=1$, $F\left(4; -\frac{9}{2}\right)$, $y+\frac{11}{2}=0$; *q)* $p=4$, $F(4; 4)$, $y-8=0$; *r)* $p=\frac{3}{200}$; $F\left(\frac{3}{400}; 0\right)$, $x+\frac{3}{400}=0$; *s)* $(y-5)^2=-2\left(x-\frac{49}{2}\right)$ egyenletből $p=1$, $F(-25; 5)$, $y+24=0$; *t)* $p=\frac{1}{10}$; $F\left(8; -\frac{1}{20}\right)$, $y-\frac{1}{20}=0$; *u)* $p=5$; $F\left(-\frac{5}{20}; 0\right)$, $y+5=0$.

4037. $y=x$, ha $x^2=4(x-1)$. Megoldás: $P(2; 2)$.

4038. Az egyenlőtlenség átalakítható: $y>\frac{1}{2}(x-5)^2+9$. Az egyenlőtlenséget a parabola belső (a fókuszt tartalmazó tartomány) pontjainak koordinátái elégítik ki.

4039. A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0. Tehát $y=x^2$ vagy $x=\pm 1$, vagy $(y-2)(y-3)=0$-ból $y=2$ vagy $y=3$. A ponthalmaz a normál parabola az $x=1$, $x=-1$, $y=2$, $y=3$, egyenletű egyenesek pontjainak uniója. Ezen halmaz pontjainak koordinátái és csakis ezek elégítik ki az adott egyenlőtlenséget.

4041.



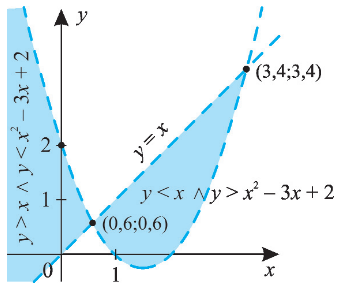
4040. Az egyenlettel ekvivalens az $\left(x^2-y\right)^2=1$, illetve az $x^2-y=\pm 1$ egyenlet. Innen $y=x^2-1$ vagy $y=x^2+1$. Az adott egyenlet az $y=x^2-1$ és az $y=x^2+1$ egyenletű parabolák pontjainak koordinátái elégítik ki.

4041. A megoldást az ábrán látható zárt síktartomány belső pontjainak koordinátái adják.

4042. $(y-x)\left(y-x^2+3x-2\right)<0$, ha *a)* $y<x$ és $y>\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$; *b)* $y>x$ és $y<\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

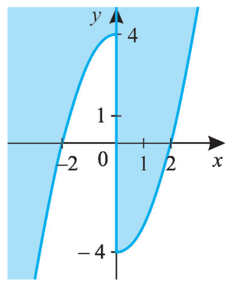
Az $y = x$, egyenes és az $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ parabola közös pontjainak koordinátái: $x_1 = y_1 = 2\sqrt{2} \approx 3{,}4$ $x_2 = y_2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}6$. Az *a)* – *b)* feltételeket kielégítő pontok halmazát az ábrán vázoltuk.

4042.



4043. Ha $x \geq 0$, akkor $x^3 - 4x - xy \leq 0$, illetve $x\left(x^2 - 4 - y\right) \leq 0$. Ez az egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, ha $y \geq x^2 - 4$. Ha pedig $x < 0$, akkor $y \geq -x^2 + 4$. A ponthalmazt az ábrán vázoltuk.

4043.



4044. Legyen a $Q(x;y)$ pont az $y = x^2$ egyenletű parabola pontja és a $Q_1(x_1;y_1)$ a Q pontnak a $P(1;\ 1)$ pontra vonatkozó tükörképe. Ekkor $\frac{x + x_1}{2} = 1$, $\frac{y + y_1}{2} = 1$. Innen $x = 2 - x_1$, $y = 2 - y_1$. $y = x^2$, tehát $2 - y_1 = \left(2 - x_1\right)^2$.
$y_1 = -x_1^2 + 4x_1 - 2$. Az $y = x^2$ egyenletű parabola tükörképe az $y = -x^2 + 4x - 2$; $y = -(x - 2)^2 + 2$ egyenletű parabola.

4045. Legyen a $Q(x;y)$ pont az $y = -2x^2 + 4x - 2$ egyenletű parabola pontja a $Q_1(x_1;y_1)$ a Q pont tükörképe. Ekkor $x = 4 - x_1$ és $y = 2 - y_1$. Helyettesítve az adott parabola egyenletébe, és rendezve az egyenletet: $y_1 = 2\left(x_1 - 5\right)^2 - 2$. Az $y = -2(x + 1)^2 + 2$ egyenletű parabolát tükrözve a $P(2;\ 1)$ pontra a tükörkép parabola, amelynek egyenlete:
$y = 2(x - 5)^2 - 2$.

4046. Ismeretes, hogy ha a $P(x;y)$ pontot az $y = x$ egyenletű egyenesre tükrözzük, akkor a P pont a $Q(x;y)$ pontba megy át. *a)* Az $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ egyenletű parabola az $x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 3$ egyenletű görbébe megy át, amely egyenlet a következőképpen is írható: (1) $(y - 4)^2 = 2(x + 5)$. (1) olyan parabola egyenlete, amelynek tengelye párhuzamos az x tengellyel, a tengelypontja $C(-5;\ 4)$, a paramétere 1, a fókuszának koordinátái: $F\left(-\frac{9}{2};\ 4\right)$.
b) $C(-3;\ -2)$, $F(-2;\ -2)$.

4047. A parabola pontjai a következők: $P_1(4\sqrt{2};\ 4)$, $P_2(-4\sqrt{2};\ 4)$, $P_3(4\sqrt{6};\ 12)$, $P_4(-4\sqrt{6};\ 12)$. A lehetséges 4 húr közül 2-2 egyenlő hosszúságú. $P_1P_3 = 8\sqrt{3 - \sqrt{3}}$, $P_1P_4 = 8\sqrt{3 + \sqrt{3}}$.

4048. $P(6;\ 6)$, $F\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$, $PF = \frac{15}{2}$.

4049. $P(6\sqrt{2};\ 6)$, $F(0;\ 3)$, $PF = 9$.

V