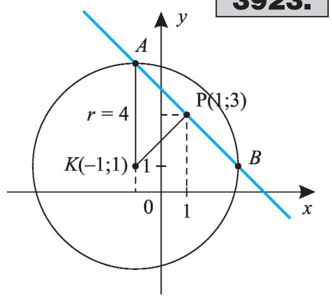
3923.




**3922.** A húr hossza: $\dfrac{54\sqrt{13}}{13}$ egység.

**3923.** A $P(1;\,3)$ ponton átmenő legrövidebb húr merőleges a $KP$ szakaszra, ahol $K$ az adott kör középpontja, feltéve, hogy $P$ a kör belsejében van. $K(-1;\,1)$, a sugár $r = 4$. $KP = \sqrt{8} < 4$, tehát $P$ a körön belül van. Az ábra szerint $AP^2 = KA^2 - KP^2$, a legrövidebb húr hossza: $AB = 4\sqrt{2}$. A húr egyenesének egyenlete: $x + y = 4$.

**3924.** A kör középpontja az $AB$ szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik. Ennek egyenlete $7x + y = 33$. A középpontja: $K(4;\,5)$. A sugár $r = AK = 5$ egység. A kör egyenlete: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$. A $C$ csúcs koordinátáit a kör és az $y - 2x = 7$ egyenletű egyenes közös pontjai adják. $C_1(1;\,9)$, $C_2(-1;\,5)$.

V

**3925.** $x^2 + y^2 + x - 7y = 0$.

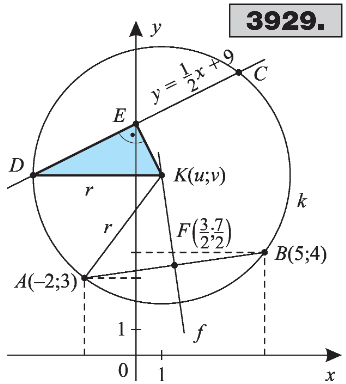
**3926.** Számítsuk ki a $K(3;\,7)$ középpontú, $r = 5$ egység sugarú kör és az $x + 2y = 7$ egyenletű egyenes közös pontjainak koordinátáit. $P_1(-1;\,4)$, $P_2(3;\,2)$.

**3927.** Legyen $A(2;\,5)$, $B(-4;\,-3)$. Ekkor az átfogó egyenes egyenlete $4x - 3y = -7$. Mivel a $T(t;\,2{,}12)$ illeszkedik az átfogóra, azért $4t - 3\cdot 2{,}12 = -7$, innen $t = -0{,}16$. Az $ABC$ derékszögű háromszög köré írható Thalész-kör egyenlete: $K(-1;\,1)$, $r = 5$, $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$. A $T$ ponton átmenő magasságegyenes egyenlete: $3x + 4y = 8$. $C_1(-4;\,5)$, $C_2\left(\dfrac{92}{25};\,-\dfrac{19}{25}\right)$.

**3928.** A kör középpontja az origó, $O(0;\,0)$, az érintési pont az $E(6;\,-8)$ pont. A keresett kör középpontja rajta van az $OE$ egyenesen, és az $E$ ponttól 15 egység távolságra van. $OE$ egyenes egyenlete: $4x + 3y = 0$. $EK = 15$ vagyis $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 225$. $K_1(-3;\,4)$, $K_2(15;\,-20)$, és a sugár $r = 15$. Két megoldás van: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 225$ és $(x - 15)^2 + (y + 20)^2 = 225$.

**3929.** Az ábra szerint $CD = 4\sqrt{5}$. Mivel $KE \perp CD$, ezért $ED = 2\sqrt{5}$. A $CD$ egyenes normálegyenlete: $\dfrac{x - 2y + 18}{\sqrt{5}} = 0$. A $k$ kör $K(u;\,v)$ középpontjának a $CD$ egyenestől mért távolsága: $d = \left|\dfrac{u - 2v + 18}{\sqrt{5}}\right|$. A $k$ kör középpontja rajta van az $AB$ szakasz felezőmerőlegesén, az $f$ egyenesen. $f$ egyenlete: $7x + y = 14$, tehát $7u + v = 14$. A keresett kör $r = AK$ sugarára felírhatjuk a következő egyenletet: $(u + 2)^2 + (v - 3)^2 = r^2$. Másrészt $r^2 = KE^2 + ED^2$, tehát (1) $(u + 2)^2 + (v - 3)^2 = \left|\dfrac{u - 2v + 18}{\sqrt{5}}\right|^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2$. A $k_1$ kör egyenlete: $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 25$, a $k_2$ kör egyenlete $(x - 17)^2 + (y + 105)^2 = 12\,025$.

3929.




**3930.** Az origón átmenő kör egyenlete: $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ alakú. A szögfelező origótól különböző pontja $P(p;\,p)$, ahol $p \neq 0$. Mivel $P$ rajta van a körön, azért $p^2 + p^2 + ap + bp = 0$.

$p \neq 0$-val egyszerűsítve: $2p + a + b = 0$, tehát $a + b = -2p$. A körnek a tengelyekkel való metszéspontjai: $O(0; 0)$ és $A(-a; 0)$, illetve $O(0; 0)$ és $B(-b; 0)$. $OA + OB = -(a + b) = 2p$. Tehát a kérdéses összeg csak a $P$ pont megválasztásától függ.

**3931.** $4x + 3y = 25$.

**3932.** Az adott kör $-5$ abszcisszájú pontjai: $P_1\left(-5; \sqrt{11}\right)$, $P_2\left(-5; -\sqrt{11}\right)$. A $P_1P_2$ pontokban az érintők egyenletei: $e_1$: $-5x + \sqrt{11}\, y = 36$ és $e_2$: $-5x - \sqrt{11}\, y = 36$. Írjuk fel a normálvektorok skaláris szorzatát. $6 \cdot 6 \cos\varphi = 25 - 11$, $\cos\varphi = \dfrac{14}{36}$. $\varphi = 67{,}1°$. Mivel a $\varphi$ nem tompaszög, azért a két érintő hajlásszöge $67{,}1°$.



**3933.** Az érintők metszéspontja $P\left(\dfrac{50}{7}; -\dfrac{50}{7}\right)$. $\varphi = 16{,}26°$.

**3934.** Az érintők egyenletei: $y = 1$, $x = -1$, $y = -1$ és $xx_1 + yy_1 = 1$, ahol $0 < x_1 < 1$. A trapéz csúcsai: $A(-1; -1)$, $B\left(\dfrac{1 + y_1}{x_1}; -1\right)$, $C\left(\dfrac{1 - y_1}{x_1}; +1\right)$, $D(-1; 1)$. A $B$ csúcs koordinátáit az $\left.\begin{aligned} xx_1 + yy_1 &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer, a $C$ csúcs koordinátáit az $\left.\begin{aligned} xx_1 + yy_1 &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják. A trapéz $AC$ átlójának egyenlete: (1) $-2x + \dfrac{x_1 - y_1 - 1}{x_1}\, y = \dfrac{x_1 + y_1 - 1}{x_1}$. A trapéz $BD$ átlójának egyenlete: (2) $2x + \dfrac{x_1 + y_1 + 1}{x_1}\, y = \dfrac{-x_1 + y_1 + 1}{x_1}$. (1) és (2) egyenlet megfelelő oldalait összeadva $y = \dfrac{y_1}{x_1 + 1}$ adódik. $y$ értékét behelyettesítve (1)-ben az $x$ helyére és figyelembe véve, hogy $x_1^2 + y_1^2 = 1$, $x = 0$ adódik. $M\left(0; \dfrac{y_1}{x_1 + 1}\right)$. A nem párhuzamos oldalak érintési pontjai: $P_1(-1; 0)$, $P_2(x_1; y_1)$. A $P_1P_2$ egyenes egyenlete: $-y_1 x + \left(x_1 + 1\right) y_1 = y_1$. Ha $x = 0$, akkor $y = \dfrac{y_1}{x_1 + 1}$, tehát a $P_1P_2$ egyenes átmegy az $M$ ponton.

**3935.** *a)* $P(10; 0)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete $y = mx - 10m$. Az $m$ paramétert úgy kell megválasztani, hogy a körnek és az egyenesnek egy közös pontja legyen. Ez akkor teljesül, ha az $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ y &= mx - 10m \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerből adódó $x^2 + (mx - 10m)^2 = 25$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0. $\left(1 + m^2\right) x^2 - 20m^2 x^2 + 100m^2 - 25 = 0 = 25$ egyenletből a diszkrimináns $D$: $3m^2 = 1$. Tehát $m = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Két megoldás van. Az érintők egyenletei: $x \pm \sqrt{3}\, y = 10$. Az érintési pontok koordinátái: $P_1\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$. Az érintőszakasz hossza: $5\sqrt{3}$ egység. Az érintők hajlásszögét a normálvektorok segítségével számítjuk ki. $\mathbf{n}_1\left(1; \sqrt{3}\right)$, $\mathbf{n}_2\left(1; -\sqrt{3}\right)$, $|\mathbf{n}_1| = |\mathbf{n}_2| = 2$. $4\cos\varphi = 1 - 3$, $\varphi = 120°$. Az egyenes hajlásszöge hegyesszög: $\omega = 180° - 120°$. *b)* $4x - 3y = 25$, $3x - 4y = 25$, $P_1(4; -3)$, $P_2(3; 4)$, 5 egység, $90°$.

*c)* $y=4$, $4x-3y=20$, $P_1(0;\,4)$, $P_2(3{,}2;\,-2{,}4)$, 8 egység, 53,13°. *d)* $x+2y=5$, $2x-y=-5$, $P_1(1;\,2)$, $P_2(-2;\,1)$, $\sqrt{5}$ egység, 90°.

**3936.** Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek befogói a kör sugara és a (8; 0) pontból a körhöz húzott érintőszakasz. Az átfogó hossza 8 egység. Ekkor $\sin\alpha=\frac{4}{8}$, $\alpha=30°$, $2\alpha=60°$.

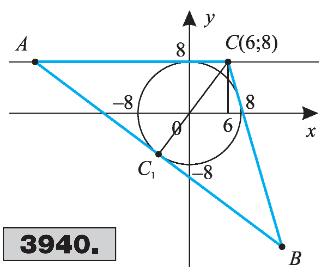
**3937.** Az $A(-12;\,3{,}5)$ pontból az $x^2+y^2=100$ egyenletű körhöz húzott érintők egyenletei $117x+44y=-1250$ és $3x-4y=-50$. A (12; 10) ponton átmenő és az $x^2+y^2=100$ egyenletű kört érintő egyenesek egyenlete $y=0$, $60x-11y=610$. A hiányzó csúcsok koordinátái: $\left(-\frac{10}{3};\,10\right)$, $\left(\frac{10}{3};\,-\frac{410}{11}\right)$.

V

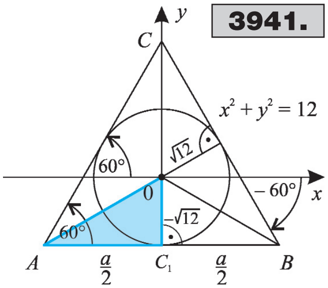
**3938.** *a)* A $K(0;\,0)$ ponton át húzzunk merőleges egyenest a $4x-2y=7$ egyenletű egyenesre. Ennek egyenlete: $x+2y=0$. Ez az egyenes kimetszi a körből a keresett érintők pontjait. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=25\\ x+2y=0\end{array}\right\}$. Innen $5y^2=25$, $y=\pm\sqrt{5}$; $x=\mp2\sqrt{5}$. Az érintési pontok koordinátái: $E_1\left(-2\sqrt{5};\,\sqrt{5}\right)$, $E_2\left(2\sqrt{5};\,-\sqrt{5}\right)$. Az érintők egyenletei: $2x-y=-5\sqrt{5}$ és $2x-y=5\sqrt{5}$.
*b)* $2x-y=5$; $2x-y=-5$. *c)* $5x-12y=169$, $5x-12y=-169$. *d)* Az $y=3x-7$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $x+3y=b$ alakú. A $b$ értékét úgy kell megválasztani, hogy az egyenesnek a körrel pontosan egy közös pontja legyen. A diszkrimináns: $D=36b^2-40\left(b^2-25\right)=0$, ha $b=\pm5\sqrt{10}$.
Az érintők egyenletei: $x+3y=5\sqrt{10}$ és $x+3y=-5\sqrt{10}$.

**3939.** A $P$ pont abszcisszáját a $PQO$ derékszögű háromszög segítségével számíthatjuk ki, ahol $O$ a kör középpontja (az origó). $OQ=12$, $QP=35$, $OP^2=12^2+35^2$, $OP=37$. Az érintési pont koordinátáit az $x^2+y^2=144$ egyenletű kör és az $OP$ átmérő fölé rajzolt Thalész-kör közös pontjai adják. $E_1\left(\frac{144}{37};\,\frac{420}{37}\right)$, $E_2\left(\frac{144}{37};\,-\frac{420}{37}\right)$.
Az érintők egyenletei: $12x+35y=444$ és $12x+35y=-444$.

**3940.** Az alappal szemközti $C(6;\,8)$ csúcson és a beírt kör $O(0;\,0)$ középpontján átmenő egyenes a beírt kört az alap $C_1$ felezőpontjában metszi és merőleges az alap egyenesére. Az $OC$ egyenes egyenlete: $y=\frac{8}{6}x$. A $C_1$ pont koordinátáit az $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=64\\ y=\frac{8}{6}x\end{array}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják: (4,8; 6,4) és (−4,8; −6,4). Mivel a kör a háromszögbe írt kör, azért a $C_1$ koordinátái az ábra szerint (−4,8; −6,4). Az $AB$ alapegyenes egyenlete: $3x+4y=-40$. A $C$ pontból a körhöz húzott egyik száregyenes egyenlete: $y=8$. A csúcs koordinátái: $3x+32=-40$ egyenletből $x=-\frac{72}{3}=-24$. A $B$ csúcs koordinátáit megkapjuk, ha az $A$ pontot tükrözzük a $C_1$ pontra. $B(14{,}4;\,-20{,}8)$.




**3940.**




**3941.** Az $AOC_1$ háromszögben $\operatorname{tg}30° = \dfrac{|OC_1|}{\left|\dfrac{a}{2}\right|}$. Innen $|a| = 12$, a szabályos háromszög oldala 12 egység hosszú. Az $A$ csúcs koordinátái $A\left(-6; -2\sqrt{3}\right)$, $B\left(6; -2\sqrt{3}\right)$, $C\left(0; 4\sqrt{3}\right)$. Az oldalak egyenletei: $y = \sqrt{3}\,x + 4\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}\,x + 4\sqrt{3}$, $y = -2\sqrt{3}$.

V

**3942.** Az adott $k$ kör középpontján át húzzunk merőleges egyenest az adott $e$ egyenesre. Válasszuk ezt az egyenest $x$ tengelynek, az $e$ egyenest $y$ tengelynek. A $K$ kör középpontjának rögzített koordinátái $(u, 0)$, az $y$ tengely változó $P$ pontjának koordinátái $P(0; p)$. A $P$ középpontú kör egyenlete: $x^2 + (y-p)^2 = u^2 + p^2 - r^2$. Innen leolvasható, hogy $p$-től függetlenül a $Q\left(\sqrt{u^2 - r^2}\,; 0\right)$ rajta van mindegyik körön. 2 megoldás van, ha $u^2 > r^2$, 1 megoldás, ha $u^2 = r^2$, nincs megoldás, ha $u^2 < r^2$.

**3943.** *a)* $4x + 3y = 35$. ($K$ a kör középpontja, $P$ a kör adott pontja). *b)* $2x - 3y + 9 = 0$; *c)* $3x - 4y + 39 = 0$ és $3x + 4y - 1 = 0$.

**3944.** Az érintési pontok koordinátái: $E_1(3; 1)$, $E_2(-1; -3)$. Az $e_1$ érintő normálvektora: $\mathbf{n}_1(5; -1)$, $e_2$ normálvektora: $\mathbf{n}_2(-1; 5)$. Az érintők egyenletei: $e_1$: $5x - y = 14$, $e_2$: $x - 5y = 14$. $e_1$ és $e_2$ $Q$ metszéspontjának koordinátái: $Q\left(\dfrac{7}{3}; -\dfrac{7}{3}\right)$.

**3945.** A kör a tengelyeket a $(0; 0)$, $(0; 8)$, $(6; 0)$ pontokban metszi. Ezekben a pontokban a kör érintőinek egyenletei rendre $x + y = -1$, $x - y = -8$, $x + 2y = 6$. A hajlásszögek az érintők és a tengelyek által beárt szöggel egyenlők: 45°, 45° és 26,56°.

**3946.** A pálya egyenletét a $P(2; 1)$ pontban a körhöz húzható érintő egyenlete adja: $3x - 4y - 2 = 0$.

**3947.** A kör középpontjának koordinátái: $K(3; -5)$. A $4x - 3y = 0$ egyenessel párhuzamos körérintők érintési pontjait úgy kapjuk meg, ha a $K$ középponton átmenő, és a $4x = 3y$ egyenesre merőleges egyenesnek és a körnek a közös pontjait határozzuk meg. Az érintési pontok koordinátái: $E_1(11; -11)$, $E_2(-5; 1)$. Az érintők egyenletei: $e_1$: $4x - 3y - 77 = 0$, $e_2$: $4x - 3y + 23 = 0$.

**3948.** Az érintő egyenlete: $y = 3x + b$ alakú. A $b$-t úgy kell meghatározni, hogy az egyenesnek és a körnek egy közös pontja legyen. Ekkor a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = (6b - 46)^2 - 40\left(b^2 - 12b + 45\right)$. $D = 0$, ha $b = -9 \pm \sqrt{2}$. Két érintő létezik. Egyenletük: $y = 3x - 9 \pm \sqrt{2}$.

**3949.** Két érintőt kapunk: $2x + y - 7 = 0$, $2x + y = 3$.

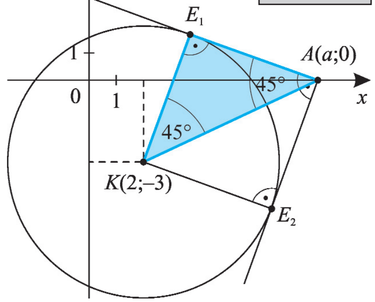
**3950.** *a)* Az érintő egyenlete: $y = mx$ alakú. $m$-et úgy kell meghatározni, hogy az $y = mx$ egyenletű egyenesnek az $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ egyenletű körrel egy közös pontja legyen. Az egyenletrendszer diszkriminánsa: $D = 80m - 84m^2$. $D = 0$, ha $m_1 = 0$, $m_2 = \dfrac{20}{21}$. Két érintőt kapunk. Egyenleteik: $y = 0$ és $20x - 21y = 0$. *b)* $x - 2y + 1 = 0$, $2x - y - 7 = 0$; *c)* $x = 3$, $5x - 12y - 3 = 0$; *d)* $9x + 40y = 258$, $x = 2$.

**3951.** A kör egyenlete: $(x-5)^2+(y+1)^2=16$. A $P_1(0;\,-1)$ pont a kör $K(5;\,-1)$ középpontjától 5 egység távolságra van. A $P_1$ pontból a körhöz húzható érintőszakasz olyan derékszögű háromszögnek a befogója, amelynek átfogója 5 egység, a másik befogó 4 egység. Az érintőszakasz hossza 3. $P_2$ rajta van a körön, $P_3$ belső pont. $P_4$-re $\sqrt{10}$.

**3952.** Két megoldás van. $P_1(-0{,}4;\,8{,}8)$, $P_2(6;\,4)$. Ugyanis a $(-2;\,0)$ ponton átmenő körérintők egyenlete: $-x+2y=2$, $-11x+2y=22$.

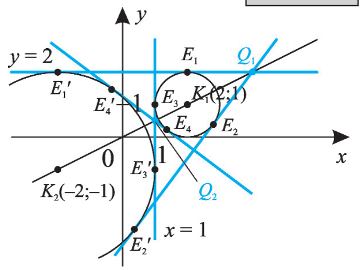
**3953.** Tekintsük az ábrát. A $KA$ felezi az $A$-nál fekvő derékszöget. A $KAE_1$ derékszögű háromszög átfogója $\sqrt{50}$ egység. Így $(a-2)^2+25=50$. Innen $a=2\pm\sqrt{41}$. Két megoldás van. $A_1\left(2+\sqrt{41};\,0\right)$, $A_2\left(2-\sqrt{41};\,0\right)$.

3953.




**3954.** *a)* A közös külső és belső érintők átmennek a körök külső, illetve belső hasonlósági pontjain, a $Q_1$ és a $Q_2$ ponton. A két kör olyan helyzetű, hogy az egyik külső érintő egyenlete: $y=2$. A $Q_1$ pont koordinátáit úgy számítjuk ki, hogy először felírjuk $K_1K_2$ centrális egyenletét $\left(y=\dfrac{1}{2}x\right)$, azután a $Q_1$ pont koordinátái egyszerűen adódnak. $Q_1(4;\,2)$, $Q_2\left(1;\,\dfrac{1}{2}\right)$. Ezután kiszámítjuk a $Q_1$ és a $Q_2$ ponton átmenő, például az $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ egyenletű kör $y=2$ egyenestől különböző érintőjének egyenletét: $4x-3y=10$. A $Q_2$ ponton átmenő másik érintő egyenlete: $3x+4y=5$. *b)* A két kör metszi egymást. Csak külső érintőik vannak. Egyenleteik: $3x+4y=75$ és $3x-4y=75$. *c)* Csak közös külső érintők léteznek. Egyenleteik: $x+y=3\left(1\pm\sqrt{2}\right)$.

3954.




**3955.** A közös érintő egyenlete: $x+2y=12$.

**3956.** A harmadik csúcs rajta van a körön és az $AB$ oldal felezőmerőlegesén. Két megoldás van: $C_1(6;\,8)$, $C_2(-1{,}5;\,-0{,}5)$.

**3957.** Az $A(1;\,1)$ csúccsal szemközti oldal $A_1$ felezőpontjának koordinátái $A_1(4;\,7)$. A szabályos háromszög magassága: $AA_1=3\sqrt{5}$ egység. A szabályos háromszög oldala legyen $a$ hosszúságú. $a=6\sqrt{\dfrac{5}{3}}$. A $BC$ oldal egyenlete: $x+2y=18$. A szabályos háromszög $B(b_1;\,b_2)$ csúcsa rajta van a $BC$ oldal egyenesén, másrészt az $A$ csúcstól $6\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ egység távolságra van. A keresett csúcsok koordinátái: $B\left(4-2\sqrt{3};\,7+\sqrt{3}\right)$, $C\left(4+2\sqrt{3};\,7-\sqrt{3}\right)$.

**3958.** A négyszög csúcsai: $A$, $B$, $C$, $D$. Az $A$ csúcs koordinátáit a $2x+y=0$, $2x-y+4=0$ egyenesek közös pontja adja. $A(-1;\,2)$. Az $AP$ átló egyenlete: $y=2$. $BD$ átló egyenlete: $x=1$.

A $B$ csúcs koordinátáit az $\left.\begin{array}{r} x=1 \\ 2x-y+4=0 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer, a $D$ csúcs koordinátáit az $\left.\begin{array}{r} x=1 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása adja. $B(1; 6)$, $D(1; -2)$. Írjuk fel az $A$, $B$, $D$ pontokon átmenő kör egyenletét: $(x-4)^2+(y-2)^2=25$. A $C$ csúcs koordinátáit a kör és az $AP$ átló egyenleteiből álló egyenletrendszer gyökei adják. $C(2; 9)$.

**3959.** Két megoldás van, mert két érintő húzható. $P_1\left(\frac{3}{5}; \frac{11}{5}\right)$, $P_2\left(-\frac{7}{5}; -\frac{9}{5}\right)$.

**3960.** A $K(5; -10)$ középpontú $r=\sqrt{50}$ egység sugarú kör 10 egység hosszúságú húrjai a középponttól $d=5$ egység távolságra vannak. A húrok felezőpontjai egy $(x-5)^2+(y+10)^2=25$ egyenletű körön vannak. Az origón átmenő $y=mx$ egyenletű egyenesek közül azt az egyenest kell kiválasztani, amely érinti az $(x-5)^2+(y+10)^2=25$ egyenletű kört. Az egyik érintő egyenlete $x=0$ (az $y$ tengely). A másik érintő egyenletét az $\left.\begin{array}{r} y=mx \\ (x-5)^2+(y+10)^2=25 \end{array}\right\}$ egyenletrendszerből adódó diszkriminánsból számíthatjuk ki. $-4m-3=0$, $m=-\frac{3}{4}$. Az $x=0$ egyenletű egyenes az $(x-5)^2+(y+10)^2=50$ egyenletű kört a $P_1(0; -5)$ és a $P_2(0; -15)$ pontokban, az $y=-\frac{3}{4}x$ egyenletű egyenes a kört a $Q_1(4; -3)$ és a $Q_2(12; -9)$ pontokban metszi. $P_1P_2=Q_1Q_2=10$ egység.

**3961.** A kör középpontja rajta van az $y=x$ egyenletű egyenesen, tehát a középpont koordinátái: $u=v$, a sugár $r^2=2u^2$, mert a kör érinti az origóban az $y=-x$ egyenletű egyenest. A középpont $r$ távolságra van az $\frac{x-y+4}{\sqrt{2}}=0$ normálegyenletű egyenestől is. Tehát $\sqrt{2u^2}=\frac{4}{\sqrt{2}}$. Két megoldás van: $(x-2)^2+(y-2)^2=8$, vagy $(x+2)^2+(y+2)^2=8$.

**3962.** $k_1$: $\left[x-\left(4\sqrt{2}-4\right)\right]^2+\left[y-\left(4-4\sqrt{2}\right)\right]^2=32\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ és $k_2$: $\left[x-\left(-4-4\sqrt{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(4+4\sqrt{2}\right)\right]^2=32\left(3+2\sqrt{2}\right)^2$.

**3963.** Meg kell keresni az adott körnek azt a pontját, amelyik legközelebb van az $AB$ egyeneshez. Ezt a pontot a $K(8; 2)$ ponton átmenő, és az $AB$ egyenesre merőleges $e$ egyenes metszi ki a körből. Megoldás $(4; -1)$.

**3964.** A $P(6; 3)$ ponton átmenő $e$ egyenes egyenlete: $y=mx+3-6m$ alakú. $e$ normálegyenlete: $\frac{mx-y+3-6m}{\sqrt{m^2+1}}=0$. $m$-et úgy kell meghatározni, hogy $\left|\frac{-2m+1+3-6m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=4$ legyen. Megoldás: $y=3$ és $4x-3y=15$.

**3965.** $(x-5)^2+(y-7)^2=20$. A ponthalmaz kör, a kör minden pontja hozzátartozik a feltételt kielégítő ponthalmazhoz.

**3966.** Az $ABCD$ paralelogramma $A$ csúcsának koordinátái $(0; 0)$, a $C$ csúcs koordinátái $(p; q)$. Az $AC$ átló felezőpontja: $F\left(\frac{p}{2}; \frac{q}{2}\right)$. $F$ illeszkedik az $x+2y=14$ egyenletű egyenesre, tehát

(1) $\frac{p}{2} + 2 \cdot \frac{q}{2} = 14$. Másrészt $C$ rajta van a körön, ezért (2) $(p-8)^2 + (q-5)^2 = 25$. (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer gyökei adják a $C$ csúcspont koordinátáit. Két megoldás van. $C_1(8; 10)$ és $C_2(12; 8)$. Az $AC_1$ átló felezőpontja: $F_1(4; 5)$. A paralelogramma $B_1$ és $D_1$ csúcsait úgy számíthatjuk ki, hogy felírjuk a $KF_1$ egyenesre merőleges, és az $F_1$ ponton átmenő szelő egyenletét. (Ugyanis $F_1$ felezi a $B_1D_1$ húrt, ezért a $K(8; 5)$ középpontból a húr felezőpontjához húzott szakasz merőleges a húrra.) A szelő kimetszi a körből a $B_1$ és a $D_1$ csúcsokat. A szelő egyenlete: $x = 4$, $B_1$ és $D_1$ koordinátái: $B_1(4; 2)$, $D_1(4; 8)$. Hasonló meggondolással kapjuk a $C_2(12; 8)$ pont felhasználásával a $B_2$, $D_2$ csúcsok koordinátáit. $B_2(8; 0)$, $D_2(4; 8)$. Az $AB_1C_1D_1$ és az $AB_2C_2D_2$ négyszögek valóban paralelogrammák és eleget tesznek a feladat követelményeinek.

**3967.** Két megoldás van. $P_1(15; 3)$, $P_2(8; 10)$.

**3968.** A kör középpontjának koordinátái: $K(u; 2u)$, az érintési pont koordinátái $E(5; 5)$. Az adott egyenes irányvektora: $\mathbf{v}(-3; 4)$, a $\overrightarrow{KE}(5-u;\ 5-2u)$. $\overrightarrow{KE} \perp \mathbf{v}$. $\overrightarrow{KE} \cdot \mathbf{v} = 0$. Innen $u = 1$. A kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

**3969.** 4 olyan kör van, amely megfelel a feladat követelményeinek. Ezek közül legkisebb az $A(0; 0)$, $B\left(\sqrt{3}; 0\right)$, $C(0; 1)$ csúcsokkal kifeszített háromszögbe írt kör. Ennek a $K$ középpontja rajta van az $y = x$ egyenletű egyenesen, tehát $K(u; u)$, $r = u$. Az adott egyenes normálegyenlete: $\frac{x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3}}{2} = 0$. A beírt körre felírhatjuk a következő egyenletet: $\frac{u + \sqrt{3}\,u - \sqrt{3}}{2} = -u$.

A kör egyenlete: $\left(x - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$.

**3970.** Az oldalak egyenletei: $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $x = \frac{9}{2}$. A kerület $9\sqrt{3}$ egység, a terület $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ területegység.

**3971.** Legyenek a téglalap csúcsainak koordinátái: $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(a; 2a)$, $D(0; 2a)$. Az $E$ koordinátái: $\left(a; \frac{a}{2}\right)$. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

**3972.** Az origón átmenő érintő egyenlete $y = mx$. Az egyenes akkor érinti a kört, ha az

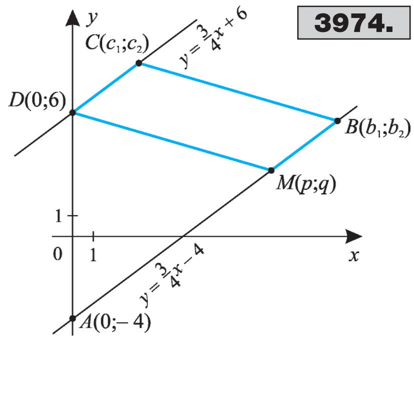
$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 + a &= 0 \\ y &= mx \end{aligned}\right\} \text{ egyenletrendszerből adódó diszkrimináns 0.}$$

$D$: $(48-a)m^2 - 48m + 28 - a = 0$. Két $m$ érték, két érintő van. Ha ezek merőlegesek egymásra, akkor az iránytangenseik szorzata $-1$.

$m_1 \cdot m_2 = \frac{28-a}{48-a} = -1$, a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján, $a = 38$.

**3973.** Az $A(5; -1)$ csúccsal szemközti $BC$ oldal $A_1$ felezőpontja azonos az adott kör $K(1; 2)$ középpontjával. Ebből következik, hogy a $BC$ oldal a kör átmérője. Végtelen sok megoldás van.

**3974.** Tekintsük az ábrát. Az érintőnégyszög egyenlő szárú trapéz, mert két szemközti oldala párhuzamos és a trapéz tengelyesen szimmetrikus. Az alapok összege 20, mert a szárak összege $2 \cdot AD = 20$ egység. A má-



V

sik szár irányvektorát úgy számíthatjuk ki, ha először kiszámítjuk az $M$ pont koordinátáit úgy, hogy $MD = AD = 10$ egység legyen. Az $M(p;\ q)$ pontra $\left.\begin{array}{ll}(1) & q = \frac{3}{4}p - 4 \\ (2) & \sqrt{p^2 + (q-6)^2} = 10\end{array}\right\}$.

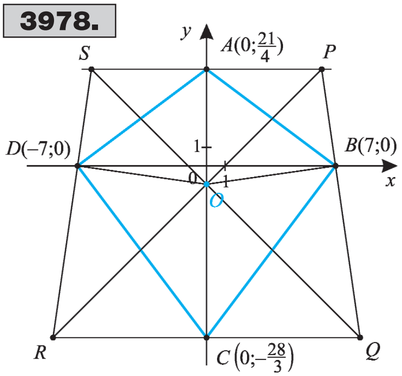
(1)−(2) egyenletrendszerből: $p = \frac{48}{5}$, $q = \frac{16}{5}$. A trapéz $BC$ szára párhuzamos az $MD$ szakasszal. $MD$ egyenes irányvektora $\mathbf{v}\left(\frac{48}{5};\ \frac{14}{5}\right)$, illetve $\mathbf{v}_{MD}(24;\ -7)$. Legyen a $B(b_1;\ b_2)$, a $C(c_1;\ c_2)$. Ekkor $B$ és $C$ koordinátáira felírhatjuk a következő egyenletrendszert: (3) $b_2 = \frac{3}{4}b_1 - 4$; (4) $c_2 = \frac{3}{4}c_1 - 6$; (5) $\sqrt{b_1^2 + (b_2+4)^2} + \sqrt{c_1^2 + (c_2+6)^2} = 20$, mert az érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő és (6) $\frac{b_2 - c_2}{b_1 - c_1} = -\frac{7}{24}$, mert $BC$ egyenes iránytangense egyenlő az $MD$ egyenes iránytangensével. (3)−(6) egyenletrendszer megoldása, mivel $b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$, $b_1 = \frac{64}{5}$; $b_2 = \frac{28}{5}$; $c_1 = \frac{16}{5}$; $c_2 = \frac{42}{5}$.

**3975.** $A$ rajta van a körön, mert a koordinátái kielégítik az adott kör egyenletét. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 169$ egyenletből $K(3;\ 2)$. A $C$ csúcsot úgy kapjuk, hogy az $A$ pontot tükrözzük a $K$ középpontra. $C(-2;\ 14)$. $\overrightarrow{KA}(5;\ -12)$. Elforgatva $\pm 90°$-kal, $B(15;\ 7)$, $D(-9;\ -3)$.

**3976.** $A$ és $B$ valóban a $k$: $(x-1)^2 + y^2 = 26$ kör pontjai. Igazoljuk! A $C$ pont koordinátái $(c_1;\ c_2)$. Ekkor (1) $\frac{(c_1+4)^2 + (c_2+1)^2}{(c_1-6)^2 + (c_2-1)^2} = \frac{9}{4}$ és (2) $(c_1-1)^2 + c_2^2 = 26$. Két megoldás van. $C_1(2;\ 5)$, $C_2\left(\frac{50}{13};\ -\frac{55}{13}\right)$.

**3977.** Az egyenes egyenlete: $y = -2x + 2a$, ahol $a > 0$. Az egyenes érinti az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kört, ha $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Az érintési pont: $E\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

**3978.**




**3978.** Ábrázoljuk a deltoidot. A beírt kör $O$ középpontja az $y$ tengelyre esik, mert az $y$ tengely szimmetriatengely. Másrészt $O$ rajta van az $ABC$ szög szögfelezőjén.

$AB$ egyenes normálegyenlete: $\frac{3x + 4y - 21}{5} = 0$.

A $BC$ egyenes normálegyenlete: $\frac{4x - 3y - 28}{5} = 0$.

A $O(0;\ v)$ középpontra felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\left|\frac{4v - 21}{5}\right| = \left|\frac{-3v - 28}{5}\right|.$$

A deltoidba írható kör középpontjának koordinátái $O(0;\ -1)$.

Az $OB$ egyenesre merőleges, és a $B$ ponton átmenő egyenes egyenlete: $7x + y = 49$. A $P$ pont koordinátái: $7x + \frac{21}{4} = 49$ egyenletből $P\left(\frac{175}{28}; \frac{21}{4}\right)$, illetve $P\left(\frac{25}{4}; \frac{21}{4}\right)$. A $Q$ pont koordinátái: $Q\left(\frac{25}{3}; -\frac{28}{3}\right)$. A $PQRS$ egyenlő szárú trapéz, ezért $R\left(-\frac{25}{3}; -\frac{28}{3}\right)$, $S\left(-\frac{25}{4}; \frac{21}{4}\right)$. A $PR$ átló egyenlete: $x - y = 1$, az $SQ$ átlóegyenlete: $x + y = -1$. Mindkét átló átmegy az $O$ ponton, mert $O$ koordinátái mindkét egyenletet kielégítik.

**3979.** Az origónak az $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ egyenletű egyenesre eső merőleges vetülete legyen $P$. $P$ koordinátái $x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$ ahol $ab \neq 0$. Ekkor $x^2 + y^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ = állandó. A mértani hely origó középpontú kör.

A kör sugarának négyzete $r^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$. A kör tengelypontjai (4 pont) nem tartoznak a mértani helyhez.

## Körök kölcsönös helyzete, közös pontjaik meghatározása

**3980.** *a)* A két körnek egy közös pontja van, érintik egymást a $P(1; 0)$ pontban.
*b)* $P_1\left(\frac{8+5\sqrt{14}}{13}; \frac{\sqrt{14}-1}{13}\right)$, $P_2\left(\frac{8-5\sqrt{14}}{13}; \frac{\sqrt{14}+1}{13}\right)$, *c)* $(-1; 1)$; *d)* $\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

**3981.** $P(3; 4)$ az érintési pont. A keresett kör középpontja rajta van az $y = x$ egyenletű egyenesen, mivel mindkét koordinátatengelyt érinti. Ezért $u = v$ és $r = |u|$. A kör egyenlete: $(x - u)^2 + (y - u)^2 = u^2$. Mivel a $P$ pont illeszkedik a keresett körre, azért $(3 - u)^2 + (4 - u)^2 = u^2$. Innen $u = 7 \pm 2\sqrt{6}$. Megoldás: $\left[x - \left(7 \pm 2\sqrt{6}\right)\right]^2 + \left[y - \left(7 \pm 2\sqrt{6}\right)\right]^2 = \left(7 \pm 2\sqrt{6}\right)^2$.

**3982.** *a)* A körök közös pontjainak koordinátái: $P_1(0;0)$, $P_2(1;1)$. A keresett kör $K(u;v)$ középpontjára $KP_1 = KP_2$ és a sugár $r = \sqrt{5}$. $u^2 + v^2 = 5$ és $(u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 5$. Két megoldás van: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ és $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. *b)* A kör középpontja a $(0; 0)$ és az $(1; 1)$ pontokat összekötő szakasz felezőpontja. Megoldás: $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

**3983.** A körök közös pontjainak koordinátái: $P_1(-2; 1)$, $P_2\left(\frac{8}{5}; \frac{14}{5}\right)$. A keresett kör $K$ középpontja az $x$ tengelyen van, tehát a $K$ koordinátái: $K(u; 0)$, másrészt $KP_1 = KP_2$.
$(u + 2)^2 + 1 = \left(u - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{196}{25}$. Innen $u = \frac{3}{4}$, $r^2 = \frac{137}{16}$. A kör egyenlete: $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{137}{16}$.

**3984.** A két kör közös pontjainak koordinátái: $P_1(2; -1)$, $P_2(1; -2)$. $P_1$, $P_2$ és az adott $P_3(2; -2)$ pontok derékszögű háromszöget feszítenek ki. A kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 4 = 0$.

**3985.** $P_1(1; 2)$, $P_2(5; 4)$.

V