A kör

A kör egyenlete

3822. *a)* $x^2 + y^2 = 16$; *b)* $4x^2 + 4y^2 = 25$; *c)* $16x^2 + 16y^2 = 3$; *d)* $4x^2 + 4y^2 = 9$.

3823. *a)* $x^2 + y^2 = 16 + 49$; *b)* $x^2 + y^2 = 5$; *c)* $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

3824. *a)* $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$, rendezve $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$; *c)* $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$; *d)* $x^2 + y^2 - 4x - 8{,}25 = 0$;
e) $x^2 + y^2 + 6y - 4 = 0$; *f)* $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 32 = 0$.

3825. *a)* $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$; *b)* $x^2 + y^2 + 6y - 8y = 0$; *c)* $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 3 = 0$; *e)* $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 10\sqrt{2} - 4 = 0$. (A kör középpontjának koordinátái $C(-2; 3)$).

3826. A kör egyenlete: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Legyen $x = -1$. $y_1 = 7, y_2 = -1$. Az ordináták rendre: $3 + \sqrt{21}$ és $3 - \sqrt{21}$ $3 + 2\sqrt{6}$ és $3 - 2\sqrt{6}$; 8 és -2; 8 és -2; $3 + 2\sqrt{6}$ és $3 - 2\sqrt{6}$ $3 + \sqrt{21}$ és $3 - \sqrt{21}$. Az abszcisszák rendre: $y = 1$ esetén $2 + \sqrt{21}$ és $2 - \sqrt{21}$ $y = 0$ esetén $x_1 = 6$, $x_2 = -2$; $y = -5$ esetén nincs megoldás.

3827. *a)* $x^2 - 6x + y^2 + 4 = 0$. *b)* $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$; *c)* $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 7 = 0$;
d) $12x^2 + 12y^2 + 28x - 57y - 39 = 0$.

3828. $x^2 + y^2 = 20$. Belső pont az A, mert $3^2 + 0^2 < 20$. A többi pont a körön kívül van, mert például a B pontra $5^2 + 0^2 > 20$.

3829. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Az A pontra $(-3 + 1)^2 + (-2)^2 = 8 < 25$, tehát A a körön belül van. C, E, F a körön van, B és D a körön kívül van.

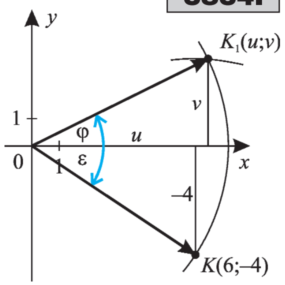
3830. A kör egyenlete: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$. $2x - y = \pm\frac{3}{2}$. Ha $y = 2x + \frac{3}{2}$, akkor a $3^x + 3^{y - \frac{1}{2}} = 4$ egyenletben az y helyére $2x + \frac{3}{2}$-et helyettesítve: $3^x + 3^{2x + 1} = 4$ adódik. Innen $x = 0$. Ekkor $y = \frac{3}{2}$. A $P\left(0; \frac{3}{2}\right)$ külső pont, mert $(0 - 2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 > 4$. Ha $y = 2x - \frac{3}{2}$, akkor $(3^x)^2 + 9 \cdot 3^x - 36 = 0$. Innen $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$. A $Q\left(1; \frac{1}{2}\right)$ pont a kör belső pontja, mert $(1 - 2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 < 4$.

3831. A kör egyenlete: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$. A $\left(2x - y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ egyenletből $2x - y + \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$. Ha $y = 2x + 2$, akkor az egyenletrendszer gyöke $P(0; 2)$, amely a körön kívül van. Ha $y = 2x - 1$, akkor a megoldás $(1; 1)$.

3832. $(x + 3)^2 + y^2 = 9$.

3833. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

3834.



3834. Az egybevágósági transzformációknál a sugár hossza nem változik. *a)* $r = 6$, $K(6; 4)$; *b)* $r = 6$, $K(-6; -4)$; *c)* $r = 6$, $K(-6; 4)$; *d)* Legyen az origó az O pont, a kör középpontja a K pont. Ekkor az OK vektor koordinátái $(6; -4)$. Az eltolt kör K_1 középpontjának koordinátáit az $\overrightarrow{OK} + \mathbf{v}$ vektor koordinátái adják: $K_1(8; -1)$. *e)* $r = 6$, $K(1; -5)$;

f) $\overrightarrow{OK}(6; -4)$, 90°-kal elforgatva $\overrightarrow{OK_1}(6; 4)$, $r = 6$. *g)* $K(-4; -6)$; $r = 6$; *h)* $\varphi + |\varepsilon| = 60°$, $\operatorname{tg}(\varphi + |\varepsilon|) = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}|\varepsilon|}{1 - \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}|\varepsilon|}$.

$\sqrt{3} = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}\operatorname{tg}\varphi}$ egyenletből $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{24 - 13\sqrt{3}}{3}$ (3834. ábra). $\left|\overrightarrow{OK}\right| = \left|\overrightarrow{OK_1}\right| = \sqrt{52}$. Oldjuk meg az $u^2 + v^2 = 52$ és a $\dfrac{v}{u} = \dfrac{24 - 13\sqrt{3}}{3}$ egyenletrendszert: $u = 3 + 2\sqrt{3}$, $v = 3\sqrt{3} - 2$.

A kör egyenlete: $\left(x - 3 - 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(y - 3\sqrt{3} + 2\right)^2 = 36$;

i) $r = 12$, $K(12; -8)$; *j)* $r = 3$, $K(3; -2)$.

3835. *a)* $(x-1)^2 + y^2 = 1$; *b)* $(x+1)^2 + y^2 = 1$; *c)* $x^2 + (y-1)^2 = 1$; *d)* $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

3836. *a)* $K_1(3; 5)$, $K_2(3; -5)$, $r = 5$.
Két megoldás van: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$; $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$; *b)* $(x \pm 5)^2 + (y+6)^2 = 25$; *c)* Négy megoldás van: $(x \pm 5)^2 + (y-5)^2 = 25$ vagy $(x \pm 5)^2 + (y+5)^2 = 25$.

3837. A középpont koordinátái: $K(\pm r; r)$ vagy $K(\pm r; -r)$, a sugár r. Négy megoldás van: $x^2 + y^2 \pm 2rx - 2ry + r^2 = 0$ és $x^2 + y^2 \pm 2rx + 2ry + r^2 = 0$.

3838. *a)* A középpont koordinátái $(a; 2a)$ a sugár $|2a|$.
A kör egyenlete $(x-a)^2 + (x-2a)^2 = 4a^2$; *b)* $K(a; 2a)$, $r = |a|$, $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 4a^2 = 0$; *c)* A kör sugara: $r^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$, Pitagorasz tétele szerint. Egyenlete: $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay = 0$.

3839. *a)* $P(2; 9)$. Mivel a kör mindkét tengelyt érinti, a középpontjának koordinátái: $K(r; r)$ és sugara r. A kör egyenlete: $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$. Ekkor $(2-r)^2 + (9-r)^2 = r^2$. Innen $r_1 = 5$, $r_2 = 17$. Két megoldás van: $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ és $(x-17)^2 + (y-17)^2 = 289$.
b) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ és $(x-15)^2 + (y-15)^2 = 225$; *c)* $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$ és $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$; *d)* $\left(x + 8 + \sqrt{30}\right)^2 + \left(y + 8 + \sqrt{30}\right)^2 = \left(8 + \sqrt{30}\right)^2$ és $\left(x + 8 - \sqrt{30}\right)^2 + \left(y + 8 - \sqrt{30}\right)^2 = \left(8 - \sqrt{30}\right)^2$.

3840. *a)* $K(6; 7)$, $r = \left|\dfrac{5 \cdot 6 - 12 \cdot 7 - 24}{\sqrt{5^2 + 12^2}}\right| = 6$, $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 36$;

b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \dfrac{32}{37}$.

3841. *a)* $P(9; 9)$, $r = 5$, $K(u; 5)$, $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$. Mivel P rajta van a körön, azért $(9-u)^2 + (9-5)^2 = 5^2$. Innen $u_1 = 12$, $u_2 = 6$. Két megoldás van: $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 25$ és $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 25$. *b)* $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 25$ és $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25$.

3842. *a)* Az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $3x - 11y = 2$. Ha $y = 0$, $x = \frac{2}{3}$.
$K\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. $r^2 = AK^2 = \frac{325}{9}$. A kör egyenlete: $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{325}{9}$. *b)* $x^2 + \left(y + \frac{2}{11}\right)^2 = \frac{4745}{121}$.

3843. *a)* $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{85}{9}$; *b)* $x^2 + (y + 8)^2 = 125$.

3844. *a)* $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$. *b)* $(x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 26$; *c)* $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 100$;
d) $\left(x - \frac{85}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{2669}{72}$.

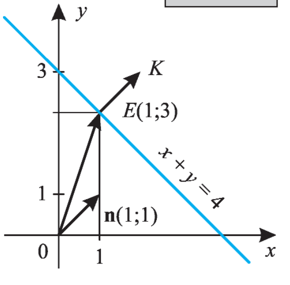
V

3845. *a)* $P_1(4; -1)$, $P_2(-3; -2)$, a kör (u, v) középpontja illeszkedik a P_1P_2 szakasz felezőmerőlegesére, a $7x + y = 2$ egyenletű egyenesre. $r = |v|$. Felírhatjuk a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{aligned} 7u + v &= 2 \\ (4 - u)^2 + (-1 - v)^2 &= v^2 \end{aligned}\right\}$. Két megoldás van: $u_1 = 1$, $v_1 = -5$, $u_2 = 21$, $v_2 = -145$. A körök egyenletei: $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$ és $(x - 21)^2 + (y + 145)^2 = 145^2$. *b)* $\left[x - \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(5 + 2\sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(5 + 2\sqrt{2}\right)^2$ és $\left[x - \left(4 - 2\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(5 - 2\sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(5 - 2\sqrt{2}\right)^2$;
c) $(x - 13)^2 + y^2 = 169$ és $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 25$.

3846. *a)* Az érintési pont koordinátái: $E(4; 1)$. E-ben az $y = x - 3$ egyenletű egyenesre emelt merőleges egyenlete: $y = -x + 5$. A kör középpontja az $y = -x + 5$ egyenletű egyenes és a $P(0; 4)$, $E(4; 1)$ szakaszt felező merőleges egyenes közös pontja. A felezőmerőleges egyenlete $4x - 3y = \frac{1}{2}$. $K\left(\frac{31}{14}; \frac{39}{14}\right)$, $r^2 = KP^2 = \frac{625}{98}$. A kör egyenlete: $\left(x - \frac{31}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{39}{14}\right)^2 = \frac{625}{98}$.
b) $(x - 2{,}5)^2 + (y + 5{,}5)^2 = 112{,}5$.

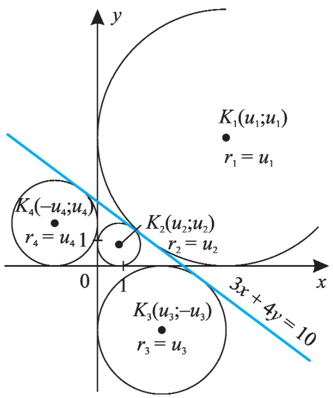
3847. *a)* Az érintési pont koordinátái: $E(1; 3)$, $r = \sqrt{2}$. (3847. ábra). Az $x + y = 4$ egyenletű egyenes normálvektora: $\mathbf{n}(1; 1)$. Az egységvektor: $\mathbf{n}^0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. A kör sugara: $r = \sqrt{2} = \left|\overrightarrow{EK}\right|$. Mivel $\left|\overrightarrow{EK}\right| = \sqrt{2}\mathbf{n}^0$, ezért $\overrightarrow{EK}$ vektor koordinátái: $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = (1; 1)$. A K középpontra $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EK}$, ezért a K pont koordinátái $(1 + 1; 3 + 1)$, $K(2; 4)$. A K-nak E-re vonatkozó tükörképe is megoldás: $K_1(0; 2)$. A körök egyenletei: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2$ és $x^2 + (y - 2)^2 = 2$;
b) $x^2 + (y + 4)^2 = 5$ és $(x + 2)^2 + y^2 = 5$.

3847.



3848. *a)* $P_1(-2; 4)$, $P_2(4; 2)$, $r = \sqrt{20}$. A kör $K(u; v)$ középpontja rajta van a P_1P_2 szakasz felezőmerőlegesén, amelynek egyenlete: $y = 3x$. Másrészt $KP_1 = \sqrt{20}$, azaz $(u + 2)^2 + (v - 4)^2 = 20$ és $v = 3u$. Ebből az egyenletrendszerből $u_2 = 0$, $v_1 = 0$, $u_2 = 2$, $v_2 = 6$ adódik. Két megoldás van: $x^2 + y^2 = 20$ és $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 20$;

3854.



b) $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 25$ és $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 25$;
c) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$ és $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 10$.

3849. Legyen $e_1: y = 2x + 14$ és $e_2: y = 2x - 6$. $e_1 \parallel e_2$ a középpárhuzamos egyenlete: $e: y = 2x + 4$. Az e_2 egyik pontja $Q(3; 0)$. Q pontnak az e_1 egyenestől mért távolsága a keresett kör sugara: $r = 4\sqrt{5}$. A kör K középpontjának $(u; v)$ koordinátáira a következő egyenletrendszert írhatjuk fel, felhasználva az adott $P(3; 4)$ pont koordinátáit: P rajta van a körön, ezért $(3-u)^2 + (4-v)^2 = 20$, másrészt a kör középpontja illeszkedik az e középvonalra, ezért $v = 2u + 4$. Az egyenletrendszerből két megoldást kapunk:
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$ és $(x-2{,}2)^2 + (y-8{,}4)^2 = 20$.

3850. Vegyük észre, hogy az adott egyenesek párhuzamosak. Két megoldás van:
$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ és $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$.

3851. $r = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$. Megoldások: $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 80$ és $(x+4)^2 + (y+8)^2 = 80$.

3852. $K(4; 4)$, $r = \sqrt{32}$. $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 32$.

3853. A háromszög köré írható kör sugara $r = \sqrt{8}$. A $K(1; 4)$ pont a háromszög súlypontja is. A BC oldal A_1 felezőpontja az A és a K pont felhasználásával kiszámítható, mert $AK : KA_1 = 2 : 1$. $A_1(2; 5)$. A BC oldal egyenlete: $x + y = 7$, a háromszög köré írható kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$. A BC oldal és a kör közös pontjai adják a szabályos háromszög csúcspontjait: $B\left(2+\sqrt{3};\ \ 5-\sqrt{3}\right)$, $C\left(2-\sqrt{3};\ \ 5+\sqrt{3}\right)$.

3854. Legyen $u_1 > 0, u_2 > 0, u_3 > 0, u_4 > 0$. Ekkor $r_1 = u_1, r_2 = u_2, r_3 = u_3$ és $r_4 = u_4$. Az egyenes normálegyenlete: $\dfrac{3x + 4y - 10}{5} = 0$, ahol az egységvektor $\mathbf{n}^0\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$. Alkalmazva a távolságképletet, és figyelembe véve, hogy az egységvektor a K_1,K_2,K_3,K_4 pontokat tartalmazó félsíkba mutat-e, vagy sem, a 3854. ábra alapján felírhatjuk a következő egyenleteket:
$$\frac{3u_1 + 4u_1 - 10}{5} = u_1,\ -\frac{3u_2 + 4u_2 - 10}{5} = u_2,\ \frac{3u_3 + 4u_3 - 10}{5} = u_3,\ -\frac{-3u_4 + 4u_4 - 10}{5} = u_4.$$
Innen kapjuk a körök középpontjainak koordinátáit és a körök sugarait. $K_1(5; 5)$, $r_1 = 5$; $K_2\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{5}{6}\right)$, $r_2 = \dfrac{5}{6}$; $K_3(2{,}5; -2{,}5)$, $r_3 = 2{,}5$; $K_4\left(-\dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$ $r_4 = \dfrac{5}{3}$.

3855. $K(2; 5)$, $r = 2$. $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.

3856. A Q pont koordinátái: $(0; y)$. Ekkor $PQ = 3\sqrt{10}$ a következőképpen írható fel: $9^2 + (y-5)^2 = 90$. Innen $y_1 = 2$, $y_2 = 8$. A $Q_1(0; 2)$ és a $P(9; 5)$ pontok meghatározta szakasz felezőmerőlegesére, másrészt az $y = 2$ egyenletű egyenesre illeszkedik a keresett kör középpontja. A $3x + y = 17$, $y = 2$ egyenletrendszerből $K_1(5; 2)$, $r_1 = 5$ adódik. Hasonlóképpen számítható ki a $Q_2(0; 8)$ pontban érintő kör középpontjának koordinátái és a kör sugara. $K_2(5; 8)$, $r_2 = 5$. Megoldások: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ és $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 25$.

3857. A kör középpontja az AB átfogó szakasz felezőpontja: $K_1\left(\frac{5}{2};\ 3\right)$. Az AC oldal egyenlete: $-3x+4y=7$. A BC befogó egyenes egyenlete: $-4x+3y=-26$. A C csúcs koordinátái: $C(5;\ -2)$. A kör egyenlete: $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{125}{4}$.

3858. $(x-3)^2+(y-4)^2=20$.

3859. Az érintő kör középpontja rajta van az $y=x$ egyenletű egyenesen: $K(x;x)$. K-nak az origótól való távolsága: $OK^2=2x^2$. K az $x=1$ egyenletű egyenestől $|x-1|$ távolságra van. Ekkor $2x^2=(x-1)^2$. Innen $x_1=-1+\sqrt{2},\ x_2=-1-\sqrt{2}$. Két megoldás van.
$r_1=1-\left(-1+\sqrt{2}\right)=2-\sqrt{2}$, $r_2=1-\left(-1-\sqrt{2}\right)=2+\sqrt{2}$. A körök egyenletei:
$\left[x-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right]^2=\left(2-\sqrt{2}\right)^2$, $\left[x+1+\sqrt{2}\right]^2+\left[y+1+\sqrt{2}\right]^2=\left(2+\sqrt{2}\right)^2$.

3860. Ábrázoljuk az $y=\frac{5}{2}|x|$ egyenletű egyenest és az $x^2+y^2=9$ egyenletű kört. Két pont felel meg: $P_1(0;\ 1)$, $P_2(0;\ 2)$.

3861. Elegendő a téglalapot az egyik átlójával megfelezni. Megoldás: négyzet, $t=2r^2$.

3862. Az érintési pont: $P(-2;\ 4)$. Az adott egyenes normálvektora: $\mathbf{n}(4;\ -3)$, a normálvektor hossza $|\mathbf{n}|=\sqrt{16+9}=5$. Az egységvektor koordinátái: $\mathbf{n}^0\left(\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$ Ekkor a $\overrightarrow{PK}$ vektor koordinátái: $10\cdot\mathbf{n}^0(8;\ -6)$. $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PK}$ innen $\overrightarrow{OK}(6;\ -2)$. A keresett kör középpontja: $K(6;\ -2)$. Még egy megoldást kapunk, ha K-t a P-re tükrözzük. A körök egyenletei:
$(x-6)^2+(y+2)^2=100$ és $(x+10)^2+(y-10)^2=100$.

3863. *q)*; *s)*; *w)* nem kör egyenlete, *v)* pontkör ($r=0$), a többi kör egyenlete. Vizsgáljuk például a *j)* egyenletét: $x^2+2{,}4x+y^2-3y=2{,}56$. Innen $(x+1{,}2)^2+(y-1{,}5)^2=1{,}2^2+1{,}5^2+2{,}56$. $(x+1{,}2)^2+(y-1{,}5)^2=6{,}25$. $K(-1{,}2;\ 1{,}5)$, $r=2{,}5$; pl.: *c)* $K(0;\ 0)$, $r=\sqrt{20}$; *h)* $K(0;\ 4)$, $r=3$; *k)* $K\left(\frac{5}{2};\ 0\right)$, $r=5$; *l)* $K\left(\frac{3}{4};\ \frac{1}{2}\right)$, $r=4$; *m)* Osszuk el az egyenletet 3-mal. $K\left(\frac{2}{3};\ 1\right)$, $r=\frac{\sqrt{58}}{3}$; *n)* $K\left(\frac{3}{4};\ \frac{5}{4}\right)$, $r=\frac{\sqrt{10}}{4}$; *o)* $K(a;\ 0)$, $r=|a|$; *t)* $K\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)$, $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

3864. *a)* A $K(-2;\ 1)$ középpontú, $r=\sqrt{5}$ sugarú kör külső pontjainak koordinátái.
b) $(x-1)^2+(y+2)^2=-1$. Ilyen pont nem létezik; *c)* $P(3;\ -4)$ pont; *d)* $(x-y)(x+y-2)=0$. Az $x-y=0$ és az $x+y-2=0$ egyenletű egyenesek pontjainak koordinátái.

3865. *a)* $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ és $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ körök egyenletei. $K_1(3;\ -4)$, $r_1=5$, $K_2(-1;\ 1)$, $r_2=1$. K_1K_2 egyenes egyenlete: $5x+4y=-1$. *b)* $17x+8y=11$.

3866. $\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}$. Szükséges és elégséges, hogy $A\neq 0$ és $B^2+C^2>4AD$ legyen. *a)* $A\neq 0$ és $D=0$; *b)* $A\neq 0$ és $C=0$; *c)* $A\neq 0$ és $B=0$; *d)* Szükséges és elégséges, hogy $y = 0$ esetén az $AX^2 + BX + D = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke legyen. $B^2 = 4AD$ és $A \neq 0$; *e)* $A \neq 0$ és $C^2 = 4AD$; *f)* $B^2 = 4AD$, $B = C$, $A \neq 0$.

3867. $K(5; 3)$, $r = 5$ $KP = \sqrt{10}$, $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 24 = 0$.

3868. $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = r^2$. Tegyük fel, hogy a $P_1(x_1; y_1)$, és a $P_2(x_2; y_2)$, rácspontok rajta vannak a fenti körön. Ekkor $\left(x_1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(x_2 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{1}{3}\right)^2$.

V

Innen $x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}(y_1 - y_2) = 2\sqrt{2}(x_1 - x_2)$. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor a bal oldal racionális, a jobb oldal irracionális $\sqrt{2}$ miatt! Tehát $x_1 = x_2$. $y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}(y_1 - y_2) = 0$, innen $(y_1 - y_2)\left(y_1 + y_2 - \frac{2}{3}\right) = 0$. $y_1 = y_2$, vagy $y_1 + y_2 = \frac{2}{3}$. Utóbbi nem lehetséges, mert $y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$. Ellentmondásra jutottunk, ezért igaz a feladat állítása.

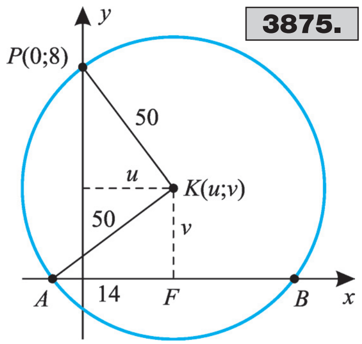
3869. $\left(x - \sqrt{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = r^2$. Legyen $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, rácspontok. Ekkor $x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}(y_1 - y_2) = 2\sqrt{5}(x_1 - x_2)$. Innen adódik, hogy $x_1 = x_2$ és $y_1 = y_2$.

3870. Legyen $Q(0; 1)$. Q rajta van az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körön. Tekintsük a Q ponton átmenő $y = mx + 1$ egyenletű egyeneseket.
Az egyenesnek és a körnek közös pontját az $x^2 + y^2 = 1$,
$y = mx + 1$ egyenletekből álló egyenletrendszer gyöke (i) adja. $x^2 + (mx + 1)^2 = 1$. Innen $(m^2 + 1)x^2 + 2mx = 0$. $x_1 = 0$, $y_4 = 1$, $x_2 = -\frac{2m}{m^2 + 1}$; $y_2 = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1}$. Minden racionális m-re x_2 és y_2 is racionális. A feladat állítása igaz.

3871. *a)* Az x tengely pontjainak második koordinátája 0, az y tengely pontjainak első koordinátája 0. Ha $y = 0$, $M_1(6; 0)$, $M_2(-2; 0)$, ha $x = 0$, $M_3\left(0; 3 + \sqrt{21}\right)$, $M_4\left(0; 3 - \sqrt{21}\right)$; *b)* $M_1(1; 0)$, $M_2(-3; 0)$, $M_3\left(0; \sqrt{3}\right)$ $M_4\left(0; -\sqrt{3}\right)$; *c)* $M_1\left(\sqrt{5}; 0\right)$, $M_2\left(-\sqrt{5}; 0\right)$, $M_3(0; 1)$, $M_4(0; -5)$.

3872. $P_1(2; 0)$, $P_1(-1; 0)$, $Q_1\left(0; \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)$, $Q_2\left(0; \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right)$. Legyen az origó az O pont. Ekkor $OP_1 \cdot OP_2 = -2$, $OQ_1 \cdot OQ_2 = \frac{25 - 33}{4} = -2$. Az origó a kör belső pontja. Az origó a P_1P_2 húrt és a Q_1Q_2 húrt két részre osztja. A részek szorzata egyenlő a 11. évfolyamon igazolt tétel szerint.

3873. A húr végpontjai A és B. $AB = 10$. AB felezőpontja legyen F. Ekkor $AF = 5$, $FK = 5$ és $AK = r$. (K a kör középpontja). AFK derékszögű háromszögben $r^2 = 5^2 + 5^2$, $r = 2\sqrt{5}$, $K\left(5; 2\sqrt{5}\right)$. Két megoldás van, a körök egyenletei $x^2 + y^2 - 10x \pm 10\sqrt{2}y + 25 = 0$.



3874. Két megoldás van: $(x-3)^2+(y\pm 5)^2=25$.

3875. $AB=28$, $r=50$, $K(u;\,v)$, $P(0;\,8)$.
$KF\perp AB$, ezért F pont felezi az AB húrt. $KF=v$. Az AFK derékszögű háromszögben $v^2+14^2=50^2$, innen $v=48$. $KP^2=u^2+(48-8)^2$, $50^2=u^2+40^2$, innen $u=\pm 30$. Két megoldás van: $x^2+y^2\pm 60x-96y+704=0$.

3876. $K(3;\,-3)$, $r=4$, $d=\left|\dfrac{3\cdot 3-4\cdot 3-2}{5}\right|=1$.

3877. $K_1(4;\,2)$, $r_1=3$, $K_2(-2;\,-6)$, $r_2=6$. A keresett kör középpontja $K(1;\,-2)$, az átmérő: $K_1K_2=10$, $r=5$, egyenlete: $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. A tengelypontok: $\left(1\pm\sqrt{21};\,0\right)$ és $\left(0;\,-2\pm 2\sqrt{6}\right)$. A négyszög átlói merőlegesek egymásra és a hosszuk $2\sqrt{21}$ és $4\sqrt{6}$. A négyszög területe: $12\sqrt{14}$ területegység.

3878. A kör átmérője $AB=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$ a sugara $r^2=\dfrac{a^2+b^2-2b+1}{4}$, a középpontja $K\left(\dfrac{a}{2};\,\dfrac{b+1}{2}\right)$, az egyenlete: $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b+1}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2-2b+1}{4}$. Rendezve a kör egyenletét: (1) $x^2+y^2-ax-(b+1)y+b=0$. Az x tengelyt olyan pontban metszi a kör, amelynek második koordinátája: $y=0$. Ekkor (1) szerint (2) $x^2-ax+b=0$. Ha (2) diszkriminánsa $a^2-4b>0$, akkor valóban a kör olyan két pontban metszi, amelyek abszcisszái (2) valós gyökei.

3879. A középpontok koordinátái: $K_1(3;\,9)$, $K_2(-5;\,-7)$. A centrális egyenlete: $y=2x+3$, $\alpha=63{,}43°$.

3880. $K(3;\,1)$, $r=5$. A négyszög csúcsai: $x=0$, $A(0;\,5)$, $C(0;\,-3)$, $y=0$, $B\left(3-\sqrt{24};\,0\right)$, $D\left(3+\sqrt{24};\,0\right)$. $T_1=255$, $T_2=16\sqrt{6}$; $\dfrac{T_2}{T_1}=49{,}9\%$.

3881. $K_1(3;\,2)$, $r_1=4$, $K_2(-1;\,4)$, $r_2=4$. $x^2+y^2+2x-8y+1=0$.

3882. A keresett koncentrikus kör egyenlete: (1) $x^2+y^2-4x+2y+k=0$. (1)-nek az x tengellyel való metszéspontjai: $\left(2+\sqrt{4-k};\,0\right)$ és $\left(2-\sqrt{4-k};\,0\right)$. (1) az y tengelyt a $\left(0;\,1+\sqrt{1-k}\right)$ és a $\left(0;\,1-\sqrt{1-k}\right)$ pontokban metszi. A négyszög átlóinak hossza: $2\sqrt{4-k}$ és $2\sqrt{1-k}$ A négyszög területe: $2\sqrt{4-k}\cdot\sqrt{1-k}=6\sqrt{6}$. Innen $k_1=-5$ és $k_2=10$. A feladatnak a $k_1=-5$ felel meg. Megoldás: $(x-2)^2+(y+1)^2=10$.

3883. A kör középpontja az $x-2y=-3$ és az $y=x$, vagy az $x-2y=-3$ és az $y=-x$, egyenletű egyeneseken van. Megoldás: $(x-3)^2+(y-3)^2=20$ és $(x+1)^2+(y-1)^2=80$.

3884. $A=4$, $B=0$ kell legyen. Ekkor $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{C}{8}\right)^2=16+\dfrac{C^2}{64}$. Innen $C=\pm 24$. Két megoldás van: $(x-1)^2+(y\pm 3)^2=25$.

V

3885. *a)* Meg kell oldani a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{aligned} 1^2+2^2+a+2b&=0\\ (-3)^2+3^2-3a+3b&=0 \end{aligned}\right\}$.

$a=\frac{7}{3}$; $b=\frac{11}{3}$. *b)* $a=\frac{29}{11}$; $b=-\frac{67}{11}$.

3886. *a)* A kör egyenlete $x^2+y^2+ax+by+c=0$ alakú. Ezért $1+1-a+b+c=0$; $16+4+4a+2b+c=0$; $16+16+4a-4b+c=0$ egyenletrendszer gyökei: $a=-4$, $b=2$, $c=-8$. $(x-2)^2+(y+1)^2=13$. A feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy kiszámítjuk az ABC háromszögben az oldalfelező merőlegesek közös pontját, azután a kör sugarát.

b) $(x-2)^2+(y+3)^2=100$; *c)* $(x-5)^2+(y-4)^2=25$; *d)* $(x-3)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$;

e) $(x-4)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{65}{4}$.

3887. A körív olyan kör része, amely áthalad az $A(-40;\ 0)$, $B(40;\ 0)$, $C(0;\ 20)$ pontokon. A kör egyenlete: $x^2+(y+30)^2=50^2$. Ha $x=-30$, $y=10$, ha $x=-20$, $y=15{,}8$; és így tovább, akkor a tartórudak hossza rendre; 10; 15,8; 18,9; 20 méter.

3888. *a)* Először számítsuk ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit: $A(3;\ 5)$, $B(-2;\ 1)$, $C(5;\ -2)$. A kör egyenlete: $\left(x-\frac{183}{86}\right)^2+\left(y-\frac{83}{86}\right)^2=\frac{63\,017}{3698}$; *b)* $A(2;\ -3)$ $B(-2;\ -1)$, $C(6;\ 6)$. $(x-2)^2+(y-2)^2=25$; *c)* $A(-1;\ 2)$, $B\left(\frac{13}{3};\ 2\right)$, $C\left(-\frac{55}{7};\ -\frac{50}{7}\right)$;

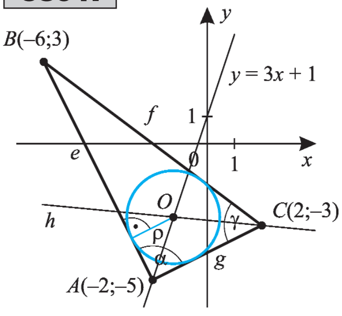
$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y+\frac{50}{7}\right)^2=\frac{40\,000}{441}$.

3889. Az adott egyeneseket jelöljük a következőképpen:
L_1: $x-3y-2=0$; L_2: $7x-y-34=0$; L_3: $x+2y+8=0$. Feltételezve, hogy az egyenesek páronként metszik egymást: (1) $L_1L_2+\lambda L_2L_3+\mu L_3L_1=0$. Ugyanis például az L_1 és L_2 egyenesek metszéspontjának koordinátáira $L_1=0$, $L_3=0$, $L_2L_3=0$ és $L_3L_1=0$. Hasonlóképpen L_2 és L_3, illetve L_3 és L_1 közös pontjai is kielégítik (1) egyenletet. (2) $(x-3y-2)(7x-y-34)+$ $+\lambda(7x-y-34)\cdot(x+2y+8)+\mu(x+2y+8)(x-3y-2)=0$. A (2) másodfokú egyenlet akkor és csakis akkor kör egyenlete, ha az x^2, y^2 együtthatói egyenlők, az xy tag együtthatója 0 és $r^2>0$. Így λ-ra és μ-re felírhatjuk (2) rendezése után a következő egyenletrendszert:
$\left.\begin{aligned} 9\lambda+7\mu&=-4\\ 13\lambda-\mu&=22 \end{aligned}\right\}$. Innen $\lambda=\frac{3}{2}$; $\mu=-\frac{5}{2}$. Helyettesítsük λ és μ értékét (2)-ben a λ és a μ helyére. Ekkor $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ valóban kör egyenlete. *b)* $7x^2+7y^2-19x+11y-6=0$.
Megjegyzés: Ha a λ és μ paraméterekre kapott egyenletek nem függetlenek egymástól, akkor nincs megoldás. Ekkor az adott egyenesek közül kettő párhuzamos.

3890. A metszéspontok koordinátái: $A(2;\ -3{,}5)$, $B(6;\ -0{,}5)$, $C(2{,}5;\ 0)$. A $2x+14y-5=0$ egyenletű egyenes merőleges a $14x-2y-35=0$ egyenletű egyenesre, mert $2\cdot 14-14\cdot 2=0$!
$r=\frac{AB}{2}=5$ egység.

3891. A csúcsok koordinátái: $A(-2; -5)$, $B(-6; 3)$, $C(2; -3)$. A körülírt kör egyenlete: $(x+2)^2 + y^2 = 25$.
Az $A(-2; -5)$ csúcson átmenő belső szögfelező egyenlete: $\dfrac{2x+y+9}{\sqrt{5}} = \dfrac{-x+2y+8}{\sqrt{5}}$, innen (1) $y = 3x + 1$. A C csúcsnál fekvő γ szög szögfelező egyenesének egyenlete: $\dfrac{-x+2y+8}{\sqrt{5}} = -\dfrac{3x+4y+6}{5}$.
Innen (2) $\left(3-\sqrt{5}\right)x + \left(2\sqrt{5}+4\right)y = -6-8\sqrt{5}$. A beírható kör O középpontjának koordinátáit az (1)−(2) egyenletekből álló egyenletrendszer gyökei adják. $x = -\sqrt{5}+1$ és $y = -3\sqrt{5}+4$. A beírható kör sugara a $\dfrac{2x+y+9}{\sqrt{5}} = 0$ normálegyenlet felhasználásával számítható ki. $\varrho = 3\sqrt{5} - 1$.

3891.



3892. A körök középpontjai: $K_1(0; -6)$, $K_2(11; 10)$. A háromszög egyik oldala 6 egység, a hozzá tartozó magasság 11 egység. $t = 33$ területegység, a kerület hossza 40,28 egység.

3893. Az ABC háromszög derékszögű, mert $\overrightarrow{AC}(-9; 3)$, $\overrightarrow{BC}(2; -6)$ és $2\cdot(-9) + 3\cdot(-6) = 0$. $t = 33$ területegység, $r = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{\dfrac{65}{2}}$; $k = \dfrac{65\pi}{2}$ egység.

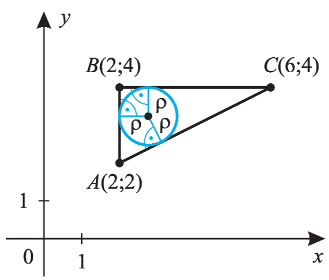
3894. A háromszög derékszögű. $B\sphericalangle = 90°$ (3894. ábra). *a)* 2; 4; $2\sqrt{5}$; *b)* (4; 4); (2; 3); (4; 3); *c)* $S\left(\dfrac{10}{3}; \dfrac{10}{3}\right)$ *d)* $K(4; 3)$; *e)* $M(2; 4)$; *f)* A háromszögbe írható kör sugara:
$\varrho = \dfrac{AB + BC - AC}{2} = 3 - \sqrt{5}$; $O(2+\varrho; 4-\varrho)$, $O\left(5-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}\right)$.

3895. A B pont koordinátái $(b; 0)$, a C pont koordinátái $\left(c; \dfrac{3}{2}c\right)$. Ekkor $\dfrac{3}{2}c : 2 = 6$ és $\dfrac{b+c}{2} = 11$. Innen $B(14; 0)$, $C(8; 12)$. A kör egyenlete: $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 65$.

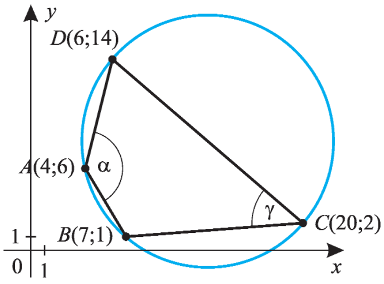
3896. *I. megoldás.* Írjuk fel az ABC háromszög köré írható kör egyenletét és ellenőrizzük, hogy a D pont illeszkedik-e a körre? *II. megoldás.* $\overrightarrow{AB}(1; -7)$, $\overrightarrow{AD}(7; 1)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 7 - 7 = 0$, tehát $AB \perp AD$. $\overrightarrow{BC}(8; 4)$, $\overrightarrow{CD}(-2; 4)$. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = -16 + 16 = 0$, tehát $BC \perp CD$. A négy pont az AD átmérő fölé rajzolt körön van.

3897. *a)* Az $A(1; -4)$, $B(8; 2)$, $C(2; 4)$ pontokon átmenő kör egyenlete: $\left(x - \dfrac{39}{10}\right)^2 + \left(y + \dfrac{3}{10}\right)^2 = \dfrac{2210}{100}$. Legyen $x = 0$. Ekkor $y_1 = 2{,}32$, $y_2 = -2{,}92$. Megoldás: $D(0; -2{,}92)$.
b) $D\left(\dfrac{43+\sqrt{8249}}{16}; 0\right)$ adódik az $\left(x - \dfrac{43}{16}\right)^2 + y^2 = \dfrac{8249}{256}$ egyenletből.

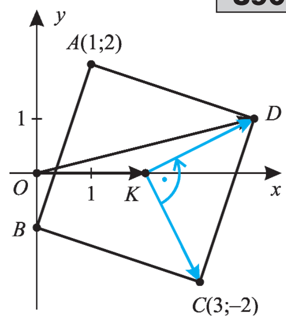
3894.



3898.



3901.



3898. A skaláris szorzat segítségével számítsuk ki az α és a γ szögeket $\overrightarrow{AB}(3;-5)$, $\overrightarrow{AD}(2;8)$. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{34}$, $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{68}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6 - 40 = -34$. Másrészt $-34 = \sqrt{34}\cdot\sqrt{68}\cos\alpha$. Innen $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 135°$. Hasonlóképpen számíthatjuk ki a $\cos\gamma$ értékét. $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma = 45°$. Mivel $\alpha + \gamma = 180°$, azért az $ABCD$ négyszög húrnégyszög.

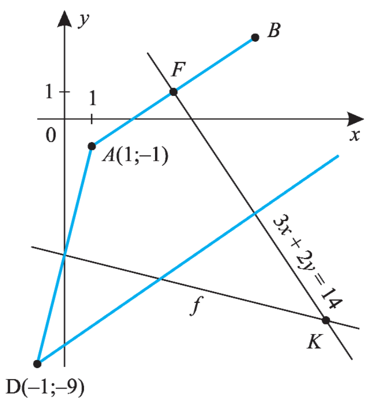
3899. A négyszög ABC pontjain átmenő kör egyenlete: $(x-5)^2 + y^2 = 25$. A $D(1;3)$ pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét!

3900. Az ABD pontokon átmenő kör egyenlete: $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$. A C pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét.

3901. $A(1;2)$, $C(3;-2)$. A négyzet K középpontja az AC szakasz felezőpontja. $K(2;0)$. *(3901. ábra)*. $\overrightarrow{KC}(1;-2)$. Forgassuk el a $\overrightarrow{KC}$ vektort $+90°$-kal. $\overrightarrow{KD}(2;1)$. Ekkor $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD}$, $D(4;1)$, $B(0;-1)$.

3902. A B csúcs koordinátáit úgy számítjuk ki, hogy az $A(1;-1)$ pontot tükrözzük a $3x + 2y = 14$ egyenletű szimmetriatengelyre. AB egyenes egyenlete: $2x - 3y = 5$. Az AB szakasz F felezőpontjának koordinátáit a $\left.\begin{array}{l}3x + 2y = 14\\ 2x - 3y = 5\end{array}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják. $F(4;1)$. $B(7;3)$. A szimmetrikus trapéz köré írható kört egyértelműen meghatározzák az A, B, D pontok. A középpontját a $3x + 2y = 14$ egyenletű egyenes és az AD szakasz f felező merőlegesének közös pontja adja. f egyenlete $x + 4y = -20$. $K(9{,}6;-7{,}4)$, $r^2 = AK^2 = 114{,}92$. A trapéz köré írható kör egyenlete: $(x-9{,}6)^2 + (y+7{,}4)^2 = 114{,}92$.

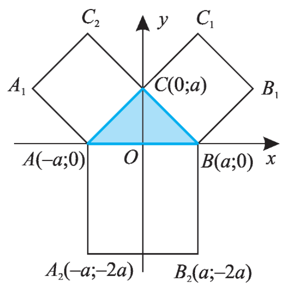
3902.



3903. A téglalap B csúcsának koordinátái: $B(-1;-9)$. Ugyanis $\overrightarrow{AD}(-3;1)$, $3\overrightarrow{AD}(-9;3)$. Elforgatva $+90°$-kal kapjuk az $\overrightarrow{AB}$ vektort. $\overrightarrow{AB}(-3;-9)$. Ekkor $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}(-1;-9)$. A B csúcs koordinátái $(-1;-9)$. A téglalap köré írható kör K középpontja azonos a BD szakasz felező-

pontjával. $K(-1;-4)$, a kör sugara: $r=5$, egyenlete: k: $(x+1)^2+(y+4)^2=25$. A B csúcsot tükrözve az A pontra még egy téglalapot kapunk: $B^*(5;9)$. Az AB^*C^*D téglalap köré írható kör egyenlete:
k_1: $(x-2)^2+(y-5)^2=25$. A k kör a tengelyeket a $(2;0)$, $(-4;0)$, $\left(0;-4+2\sqrt{6}\right)$, $\left(0;-4-2\sqrt{6}\right)$ koordinátájú pontokban metszi. A k_1 kör a tengelyeket a $(2;0)$, $\left(0;5+\sqrt{21}\right)$, $\left(0;5-\sqrt{21}\right)$, koordinátájú pontokban érinti, illetve metszi. A kimetszett húrok hossza:
6; $4\sqrt{6}$; $2\sqrt{21}$ egység.

3904.



3904. A háromszöget helyezzük el az ábrán látható módon a koordináta-rendszerben. Legyen $A(-a;0)$, $B(a;0)$, ekkor $C(0;a)$. Az ABC háromszög így valóban egyenlő szárú és derékszögű háromszög. A $\overrightarrow{CB}(a;-a)+90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{CC_1}(a;a)$. Így az $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}$ az $\overrightarrow{OC_1}$ és a C_1 koordinátái $(a;2a)$. Hasonló meggondolással kapjuk, hogy $B_1(2a;a)$, a szimmetria miatt $A_1(-2a;a)$, $C_2(-a;2a)$. A szóbanforgó csúcsok az origótól $\sqrt{4a^2+a^2}=a\sqrt{5}$ egység távolságra vannak, és így az $x^2+y^2=5a^2$ egyenletű körön vannak.

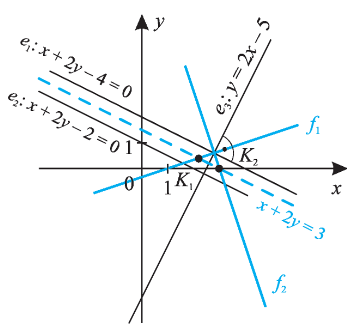
3905. Az egyenesek párhuzamosak. Ebből következik, hogy a kör $(u;v)$ középpontja az $x=5$ egyenletű egyenesre illeszkedik és a sugara $r=3$. A középpont rajta van a $3x-y=6$ egyenletű egyenesen is. Mivel $u=5$, $v=9$. Megoldás: $(x-5)^2+(y-9)^2=9$.

3906. $\left[x-\left(4-2\sqrt{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(4-2\sqrt{2}\right)\right]^2=\left(4-2\sqrt{2}\right)^2.$

3907. Legyen $e_1: x+2y-4=0$, $e_2: x+2y-2=0$ és $e_3: y=2x-5$. $e_1 \parallel e_2$, ezért az érintőkör középpontja rajta van a középpárhuzamoson, amelynek egyenlete $k: x+2y=3$. Másrészt rajta van az e_1 és e_3 egyenesek által bezárt szögek szögfelezőin. f_1 és f_2 egyenleteit az e_1 és e_3 egyenesek normálegyenleteivel, illetve a $d=\left|\dfrac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ távolságképlettel írhatjuk fel.

f_1 egyenlete: $x-3y=1$. Az f_2 egyenlete: $3x+y=9$. A k_1 kör középpontja a $K_1\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{2}{5}\right)$ pont, a sugár $r_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. A k_1 kör egyenlete: $\left(x-\dfrac{11}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{1}{5}$
. A k_2 kör K_2 középpontjának koordinátáit a k és f_2 egyenesek metszéspontja adja. $K_2(3;0)$, $r_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. A k_2 egyenlete:
$(x-3)^2+y^2=\dfrac{1}{5}$.

3907.



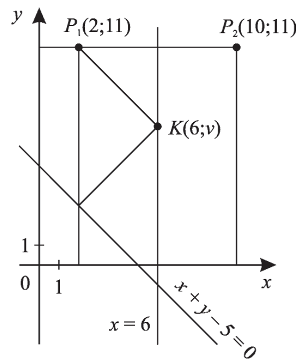
3908. *a)* Legyen $e_1: x-3y=0$, $e_2: 3x+y-2=0$ és $e_3: x+y=3$. A középpont rajta van az e_1 és e_2 egyenesek szögfelezőin, másrészt az e_3 egyenesen. A szögfelezők egyenletei:

$f_1: x+2y=1$, $f_2: 2x-y=1$. A k_1 kör K_1 középpontjának koordinátái kielégítik az f_1 és e_3 egyenleteket. Innen:
$K_1(5;\,-2)$, a sugár $r_1=\dfrac{11}{\sqrt{10}}$ egység. A k_2 kör K_2 középpontjának koordinátáit az f_2 és e_3 egyenletrendszer gyökei adják. $K_2\left(\dfrac{4}{3};\,\dfrac{5}{3}\right)$, a sugár: $r_2=\dfrac{11}{3\sqrt{10}}$. A körök egyenletei:

$$(x-5)^2+(y+2)^2=12{,}1 \text{ és } \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{121}{90}.$$

b) $(x-3)^2+(y-1)^2=4{,}5$ és $\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{19}{4}\right)^2=4{,}5.$

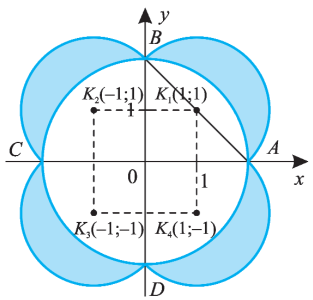
3909.



3909. A k kör K középpontja rajta van az $x=6$ egyenletű egyenesen, másrészt egyenlő távol van az $x+y-5=0$ egyenletű egyenestől és a $P_1(2;\,11)$, illetve $P_2(10;\,11)$ koordinátájú pontoktól. ($KP_1=KP_2$). A $K(6;\,v)$ pontra felírhatjuk a következő egyenletet:

(1) $\sqrt{(6-2)^2+(v-11)^2}=\dfrac{6+v-5}{\sqrt{2}}$. (1) egyenlet gyökei: $v_1=39$, $v_2=7$. Mindkét gyök megoldás. Az egyik kör középpontjának koordinátái: (6; 7), a sugara $\sqrt{32}$ egység, a másik kör középpontja: (6; 39), a sugara $\sqrt{800}$ egység.

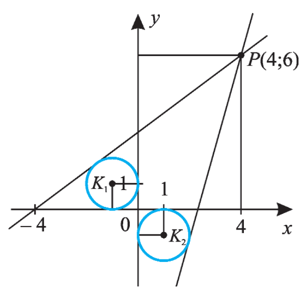
3910.



3910. Legyen $x\geq 0$ és $y\geq 0$. Ekkor a kettős egyenlőtlenség a következőképpen írható:
$4\leq x^2+y^2\leq 2x+2y$. Az $x^2+y^2\geq 4$ egyenlőtlenséget kielégítő $(x;\,y)$ számpárok az origó középpontú 2 egység sugarú körvonal vagy a körön kívül fekvő pontok koordinátái.
Az $x^2+y^2\leq 2x+2y$, illetve az $(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2$ egyenlettel megadott ponthalmaz az első síknegyedben az (1; 1) középpontú, $r=\sqrt{2}$ sugarú körön vagy annak belsejében helyezkedik el. A kettős egyenlőtlenséggel megadott síkidomot az ábrán az I. síknegyedben bevonalkáztuk. Ha $x\leq 0$ és $y\geq 0$, akkor a II. síknegyedbeli holdacskát kapjuk. És így tovább. A négy bevonalkázott holdacska egybevágó. Egyik területe:

$$t=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\pi}{2}-\left(\frac{2^2\pi}{4}-\frac{2\cdot 2}{2}\right)=2. \quad T=4\cdot 2=8 \quad \text{területegység.}$$

3911.



3911. A $P(4;\,6)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete: $y=mx+b$ alakú. $6=4m+b$, ezért $y=mx+6-4m$. Az egyenesek normálegyenlete: $\dfrac{mx-y+6-4m}{\sqrt{m^2+1}}=0$. Az ábra alapján állítjuk, hogy két egységsugarú érintőkör létezhet: $K_1(-1;\,1)$, $r_1=1$, $K_2(1;\,-1)$, $r_2=1$. Ekkor K_1 pontra: (1)

$\left|\frac{-m-1+6-4m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=1$. K_2 pontra: (2) $\left|\frac{m+1+6-4m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=1$. (1) egyenletből $\left(\frac{5-5m}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2=1$.
$m_1=\frac{4}{3}$, $m_2=\frac{3}{4}$. A feladat követelményeinek az $m=\frac{3}{4}$ felel meg. Az egyenes egyenlete: $3x-4y+12=0$. A (2)-es egyenletből kapjuk a második megoldást: $y=3{,}56x-8{,}24$.

3912. Az $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(4;0)$ csúcsokon átmenő kör egyenlete:
k: $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{65}{16}$. A kör $K\left(2;\frac{1}{4}\right)$ középpontja a $D(1;-2)$ ponttól $d=\frac{\sqrt{97}}{4}$ egység távolságra van. A keresett kör R sugarát úgy kapjuk, hogy a k kör sugarát, $\frac{\sqrt{65}}{4}$-et a $\frac{\sqrt{97}}{4}-\frac{\sqrt{65}}{4}$ felével megnöveljük. $R=\frac{\sqrt{65}}{4}+\frac{\sqrt{97}}{8}-\frac{\sqrt{65}}{8}=\frac{\sqrt{65}+\sqrt{97}}{8}$.

3913. Helyezzük el az ABC háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a csúcsok koordinátái a következő számpárok legyenek: $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(c;d)$, ahol $a>0$, $d\neq 0$. Ekkor a $P(x;y)$ pontra $PA^2+PB^2+PC^2=(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2+(x-c)^2+(y-d)^2$. Rendezve: $PA^2+PB^2+PC^2=3\left(x-\frac{c}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{d}{3}\right)^2+2a^2+\frac{8c^2}{9}+\frac{8d^2}{9}\geq 2a^2+\frac{8c^2+8d^2}{9}$.
A négyzetösszeg akkor a legkisebb, ha $x=\frac{c}{3}$, $y=\frac{d}{3}$. Ekkor a P pont az ABC háromszög súlypontja.

3914. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A\left(-\frac{c}{2};0\right)$, $B\left(\frac{c}{2};0\right)C(x;y)$ legyen. $(C>0,\ y\neq 0)$. Ekkor $t=\frac{c|y|}{2}$ és $8t=4c|y|$ (t jelenti az ABC háromszög területét.) Az oldalak négyzetösszegére felírhatjuk a következő egyenletet: (1) $c^2+\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2+\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=4c|y|$. Ha $y>0$, akkor (1)-ből $x^2+(y-c)^2=\frac{c^2}{4}$ adódik, ha $y<0$, akkor $x^2+(y+c)^2=\frac{c^2}{4}$. A mértani hely két kör: $K_1(0;c)$, $r_1=\frac{c}{2}$, $K_2(0;-c)$, $r_2=\frac{c}{2}$. Mindkét kör minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez.

3915. Legyen $P(x;y)$. Ekkor $(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2+x^2+(y-6)^2=k^2$. Innen rendezéssel: $x^2+(y-2)^2=\frac{1}{3}\left(k^2-32\right)$ adódik. Ha $|k|<4\sqrt{2}$, akkor a mértani hely üres halmaz. Ha $|k|=4\sqrt{2}$, akkor a mértani hely egy pont: $P(0;2)$. Ha $|k|>4\sqrt{2}$, akkor a mértani hely kör, amelynek középpontja a $(0;2)$ koordinátájú pont, a sugara $\sqrt{\frac{k^2-32}{3}}$ egység. A kör minden pontja megfelel.

V

3916. A keresett kör középpontja egyrészt rajta van az origó körül rajzolt egységsugarú körön, másrészt az $x+y=5$ egyenletű egyenesre a $P(3; 2)$ pontban emelt merőleges egyenesen. A körök egyenletei: $(x-1)^2+y^2=8$ és $x^2+(y+1)^2=18$.

3917. Legyen a szabályos háromszög oldala a hosszúságú. Ekkor a magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a csúcsok koordinátái a következők legyenek: $B\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{a}{2}; 0\right)$, $A\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. A feladat szerint: $x^2+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2$. Innen rendezéssel az $x^2+\left(y+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$ egyenletet kapjuk. A mértani hely olyan kör, amelynek középpontja a $K\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ pont, a sugara $\frac{a}{\sqrt{2}}$ egység. A kör minden pontja megfelel.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete
Kör érintője

3918. *a)* $P_1(3; 4)$, $P_2(5; 0)$. *b)* $(3; 1)$; *c)* Két közös pont van, ha $r>\frac{|a|}{\sqrt{2}}$; egy közös pont van, ha $r=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$; nincs közös pont, ha $r<\frac{|a|}{\sqrt{2}}$. *d)* $P_1\left(\frac{r}{\sqrt{m^2+1}}; \frac{mr}{\sqrt{m^2+1}}\right)$, $P_2\left(-\frac{r}{\sqrt{m^2+1}}; -\frac{mr}{\sqrt{m^2+1}}\right)$. *e)* Két közös pont van, ha $r>\frac{|b|}{\sqrt{m^2+1}}$ egy közös pont van, ha $r=\frac{|b|}{\sqrt{m^2+1}}$, nincs közös pont, ha $r<\frac{|b|}{\sqrt{m^2+1}}$.

3919. *a)* Két közös pont van. *b)* Két közös pont. *c)* Egy közös ponton van. *d)* Nincs közös pont. $D=-868<0$.

3920. *a)* $(4; 2)$ és $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ *b)* $(0; 0)$ és $\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$;
c) $(1{,}9; 1{,}45)$ és $(0{,}1; 0{,}55)$; *d)* $(3; 1)$ és $(-1; -3)$; *e)* $(5; -6)$

3921. *a)* Két közös pont van: $(5; 4)$ és $\left(\frac{9}{13}; -\frac{32}{13}\right)$. *b)* Egy közös pont van: $(5; -1)$. *c)* Az egyenes egyenlete: $4x+3y=25$. Az egyenesnek és az $x^2+y^2=25$ egyenletű körnek egy közös pontja van: $(4; 3)$. Az egyenes az $x^2+y^2=36$ egyenletű kört két pontban metszi.
$\left(\frac{20+3\sqrt{11}}{5}; \frac{15-4\sqrt{11}}{5}\right)$ és $\left(\frac{20-3\sqrt{11}}{5}; \frac{15+4\sqrt{11}}{5}\right)$.