V. Koordinátageometria

Szakaszt adott arányban osztó pont, súlypont koordinátái

3462. *a)* $x_f=\dfrac{6+12}{2}=9,\ y_f=\dfrac{6+2}{2}=4,\ F(9;\,4);$ *b)* $\left(7;\,\dfrac{11}{2}\right);$ *c)* $\left(-\dfrac{23}{12};\,\dfrac{73}{24}\right);$

d) $\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}};\,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right);$ *e)* $\left(\dfrac{a}{2};\,\dfrac{c}{2}\right).$

3463. $\dfrac{b_1-4}{2}=-1\Rightarrow b_1=2,\ \dfrac{b_2+6}{2}=-1\Rightarrow b_2=-8,\ B(2;\,-8).$

3464. $A_1\left(2;\,\dfrac{7}{2}\right),\ B_1\left(\dfrac{5}{2};\,\dfrac{13}{2}\right),\ C_1\left(\dfrac{3}{2};\,4\right).\ \overrightarrow{BA}(1;\,6)\quad \overrightarrow{A_1B_1}\left(\dfrac{1}{2};\,3\right)\Rightarrow\overrightarrow{BA}=2\cdot\overrightarrow{A_1B_1}\Rightarrow$

$\Rightarrow\overrightarrow{BA}\parallel\overrightarrow{A_1B_1}$. Hasonlóan $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1},\ \overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}.$

3465. *a)*
$$\left.\begin{aligned}\frac{a_1+b_1}{2}&=\ \ 2\\ \frac{b_1+c_1}{2}&=-2\\ \frac{c_1+a_1}{2}&=\ \ 4\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{array}{l}\left.\begin{aligned}a_1+b_1&=\ \ 4\\ b_1+c_1&=-4\\ c_1+a_1&=\ \ 8\end{aligned}\right\}+\\ \hline a_1+b_1+c_1=4\end{array}\quad;\quad \left.\begin{aligned}\frac{a_2+b_2}{2}&=3\\ \frac{b_2+c_2}{2}&=1\\ \frac{c_2+a_2}{2}&=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}a_2&=5,\\ b_2&=1,\\ c_2&=1.\end{aligned}$$

Innen: $a_1=8,\ b_1=-4,\ c_1=0.\ A(8;\,5),\ B(-4;\,1),\ C(0;\,1).$

b) $(-1;\,6),\ (7;\,12),\ (3;\,-2).$

3466. $O_1(10;\,10)$. Ha $O_2(x_2;\,y_2)$, akkor $\dfrac{x_2+0}{2}=1,\ \dfrac{y_2+0}{2}=7\Rightarrow O_2(2;\,14),$

$b_1=\dfrac{10+2}{2}=6,\ b_2=\dfrac{10+14}{2}=12\Rightarrow B(6;\,12)$. OB felezőpontja: $F_1(3;6)$, AC felezőpontja $F_2(3;6)$. $\overrightarrow{OB}(6;\,12),\ \overrightarrow{AC}(4;\,-2),\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Az átlók merőlegesen felezik egymást.

3467. $M(4;3)$ $\overrightarrow{OK}(7;\,0)$, $+90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{OK_1}(0;\,7)$. $\overrightarrow{OL}(3;\,-2)$, $-90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{OL_1}(-2;\,-3)$. $\overrightarrow{K_1L_1}(-2;\,-10)$, $\overrightarrow{OM}(5;\,-1)$, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{K_1L_1}=0\Rightarrow\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{K_1L_1}$.
$\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{26},\ \left|\overrightarrow{K_1L_1}\right|=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$, így $\overrightarrow{K_1L_1}=2\cdot\overrightarrow{OM}$.

3468. $A_1\left(\dfrac{11}{2};\,\dfrac{1}{2}\right),\ \overrightarrow{AA_1}\left(\dfrac{9}{2};\,-\dfrac{3}{2}\right),\ \overrightarrow{BB_1}\left(-6;\,-\dfrac{15}{2}\right),\ \overrightarrow{CC_1}\left(\dfrac{3}{2};\,9\right).$

V

3469. P-n túl meghosszabbítva $P_1(-6; 4)$, O-n túl meghosszabítva $P_2(3; -2)$. Ha $P(a; b)$, akkor $P_1(2a; 2b)$, $P_2(-a; -b)$.

3470. $B_1(6; 12)$, $C_1(16; -4)$.

3471. *a)* $AP : PB = 2 : 5 \Rightarrow p_1 = \dfrac{5\cdot 3 + 2\cdot 10}{7} = 5,\ p_2 = \dfrac{5(-2) + 2\cdot 12}{7} = 2. \Rightarrow P(5;\ 2).$

$AQ:QB = 5:2 \Rightarrow Q(8;.\ 8).$ *b)* $\left(\dfrac{32}{7}; \dfrac{9}{7}\right), \left(\dfrac{31}{7}; \dfrac{12}{7}\right).$

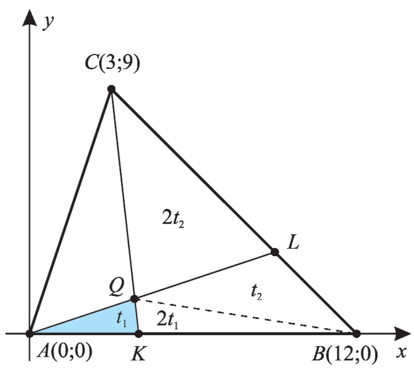
3472. *a)* $(3; 2)$, $(4; 6)$, $(5; 10)$; *b)* $\left(\dfrac{13}{3}; \dfrac{8}{3}\right), \left(\dfrac{17}{3}; \dfrac{1}{3}\right).$

3473. $\overrightarrow{AB}(2; -4)$, $\overrightarrow{AB_1} = \dfrac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AB}(3; -6)$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{OB_1}(7; -3)$, $B_1(7; -3)$.

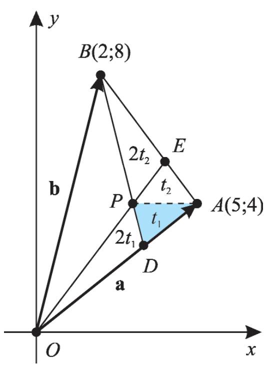
Hasonlóan: $A_1(3; 5)$.

3474. $F_1(2; 4)$, $F_2\left(\dfrac{11}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{F_1F_2}\left(\dfrac{7}{2}; -4\right).$

3475.



3476.



3475. Egyenlő magasságú háromszögek területének aránya megegyezik a közös magassághoz tartozó oldalak arányával. Az ABC háromszög területe legyen t.

$t_{ABL} = \dfrac{1}{3}t,\ t_{BCK} = \dfrac{2}{3}t.$

$$\left.\begin{aligned} 3t_1 + t_2 &= \frac{t}{3} \\ 2t_1 + 3t_2 &= \frac{2t}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_1 = \frac{t}{21},\ t_2 = \frac{4t}{21},\ t_{ABQ} = 3t_1 = \frac{t}{7},$$

$t_{KBQ} = \dfrac{2t}{21}$, $AQ:QL = t_{ABQ}:t_{BLQ} = \dfrac{t}{7}:\dfrac{4t}{21} = 3:4,$

$CQ:QK = t_{BCQ}:t_{KBQ} = \dfrac{4t}{7}:\dfrac{2t}{21} = 12:2 = 6:1.$

3476. Legyen az OAB háromszög területe t.

$t_{AEO} = \dfrac{1}{3}t,\ t_{ABD} = \dfrac{1}{3}t.$

$$\left.\begin{aligned} 3t_1 + t_2 &= \frac{t}{3} \\ t_1 + 3t_2 &= \frac{t}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_1 = t_2 = \frac{t}{12}.\ t_{OAP}:t_{AEP} =$$

$= 3t_1 : t_1 = 3:1.$ $t_{ABQ} = \dfrac{2t}{12}$, $OP:PE = 3:1,$

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{OE}.$ $\overrightarrow{OE} = \dfrac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}$, $\overrightarrow{OP} = \dfrac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{4}$,

$\overrightarrow{OP}(3;\ 4)$, $\left|\overrightarrow{OP}\right| = 5.$

3477. *a)* $S(4;\ 2)$; *b)* $S\left(\frac{4}{3};\ 0\right)$, *c)* $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{3};\ \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, *d)* $\left(\frac{11a+b}{18};\ \frac{11a-b}{18}\right)$.

3478. $S_{ABC}(1;2)$, $S_{DEF}(7;7)$, $\overrightarrow{S_1S_2}(6;\ 5)$. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}(18;\ 15)$, $3\overrightarrow{S_1S_2}(18;\ 15)$.
$\mathbf{s}_1=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, $\mathbf{s}_2=\frac{\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{f}}{3}$, $\overrightarrow{S_1S_2}=\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1$. $3\overrightarrow{S_1S_2}=\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{f}-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$,
$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CP}=\mathbf{d}-\mathbf{a}+\mathbf{e}-\mathbf{b}+\mathbf{f}-\mathbf{c}$.

3479. Az ABC háromszög súlypontja $S_1\left(\frac{14}{3};\ 5;\ 0\right)\Rightarrow S\left(5;\ \frac{19}{4};\ 4\right)$. A BCD háromszög súlypontja $S_2\left(\frac{19}{3};\ \frac{16}{3};\ \frac{16}{3}\right)\Rightarrow S'\left(5;\ \frac{19}{4};\ 4\right)$; $S=S'$.
Általánosan: $\mathbf{s}_1=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, $\mathbf{s}=\frac{3\mathbf{s}_1+\mathbf{d}}{4}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$.

3480. $C(5;\ -15)$.

3481. $H_1(4;0)$, $H_1(8;0)$, $K_1(11;2)$, $K_2(10;4)$, $L_1(5;8)$, $L_2(7;7)$, $M_1(1;3)$, $M_2(2;6)$.
M_1K_1 harmadolópontjai: $\left(\frac{13}{3};\ \frac{8}{3}\right)$, $\left(\frac{23}{3};\ \frac{7}{3}\right)$; M_2K_2 harmadolópontjai: $\left(\frac{14}{3};\ \frac{16}{3}\right)$, $\left(\frac{22}{3};\ \frac{14}{3}\right)$;
H_1L_1 harmadolópontjai: $\left(\frac{13}{3};\ \frac{8}{3}\right)$, $\left(\frac{14}{3};\ \frac{16}{3}\right)$; H_2L_2 harmadolópontjai: $\left(\frac{23}{3};\ \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{22}{3};\ \frac{14}{3}\right)$.

3482. $\overrightarrow{AD}(1;\ 3)$, $\overrightarrow{BC}(1;\ 3)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow ABCD$ paralelogramma. $H\left(\frac{26}{3};\ 2\right)$. $EF\parallel BC$, EG az ABH háromszög középvonala, ezért $EG=\frac{1}{2}BH=\frac{BC}{3}$, így $FG=\frac{2}{3}BC\Rightarrow BHFG$ paralelogramma, ezért M a BF és GH felezőpontja. Ebből következik, hogy M az AH negyedelőpontja. $M\left(\frac{13}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

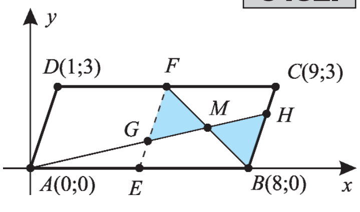
3483. *a)* $\overrightarrow{AB}(3;\ 4)$, $\overrightarrow{DC}(3;\ 4)\Rightarrow AB\#DC$; *b)* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\left(\frac{1}{2};\ 4\right)$; *c)* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}(-6;\ -1)$.

3484. *a)* Az $APQR$ paralelogramma átlói felezi egymást. $A(-2;2)$, $B(2;-2)$, $C(4;4)$.
b) $(5;-5)$, $(7;-3)$, $(3;9)$; *c)* $(8;3)$, $(4;7)$, $(-2;1)$.

3485. $C(-7;\ 15)$, $D(2;\ 9)$.

3486. A rombusz középpontja $K(1;\ 9)$, $\overrightarrow{KD}(4;\ 2)$. $\overrightarrow{KA}$ a $\overrightarrow{KD}$ $+90°$-os elforgatottjának kétszerese: $\overrightarrow{KA}(-4;\ 8)$. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{OA}(-3;\ 17)$.
$A(-3;\ 17)$, $C(5;\ 1)$.

3482.



3487. $K(1;\ 0)$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}(5;\ 4)$, $+90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{KB}(-4;\ 5)$, $B(-3;\ 5)$, $D(5;\ -5)$.

3488. $|AB|=5$, $|AC|=10$, $|BC|=5\sqrt{5}$. Az f_α messe a BC oldalt P-ben, f_β az AC oldalt Q-ban, f_γ az AB oldalt R-ben.

$BP : PC = 5 : 10 = 1 : 2 \Rightarrow P\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}\right)$, $AQ : QC = 5 : 5\sqrt{5} = 1 : \sqrt{5}$.

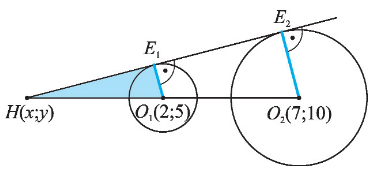
$Q = \left(6 - 2\sqrt{5}; \frac{3\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $AR : RB = 10 : 5\sqrt{5} = 2 : \sqrt{5}$, $R\left(6\sqrt{5} - 8; 8\sqrt{5} - 15\right)$.

3489. Legyen $P(p; 0)$ és $AB : BP = m : n = \lambda$, $\frac{1 \cdot 6 + \lambda \cdot 0}{1 + \lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 5$, tehát $AB : BP = 5 : 1$, $\frac{5p + 2}{6} = 8 \Rightarrow p = \frac{46}{5}$. $P\left(\frac{46}{5}; 0\right)$. Hasonlóan: $R\left(0; \frac{23}{3}\right)$.

V

3490. $|AB| = 10$. A magasság talppontja T. A befogótétel szerint $AO^2 = AT \cdot AB$. $6^2 = 10 \cdot AT$, $AT = \frac{18}{5}$, $BT = \frac{32}{5}$, $AT : BT = \frac{18}{5} : \frac{32}{5} = 9 : 16$, $T = \left(\frac{96}{25}; \frac{72}{25}\right)$.

3491.



3491. $E_1HO_1\triangle \sim E_2HO_2\triangle$,

$HO_1 : HO_2 = 3 : 7 \Rightarrow 7 \cdot \overrightarrow{HO_1} = 3 \cdot \overrightarrow{HO_2}$,

$\overrightarrow{HO_1}(2 - x; 5 - y)$, $\overrightarrow{HO_2}(7 - x; 10 - y)$.

$7(2 - x) = 3(7 - x) \Rightarrow x = -\frac{7}{4}$,

$7(5 - y) = 3(10 - y) \Rightarrow y = \frac{5}{4}$, $H\left(-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

3492. AB, BC, CD, DA felezőpontjai rendre: $F_1\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $F_2\left(\frac{13}{2}; \frac{15}{2}\right)$, $F_3\left(\frac{5}{2}; 16\right)$, $F_4(-2; 9)$, F_1F_3, illetve F_2F_4 felezőpontjai: $K\left(\frac{9}{4}; \frac{33}{4}\right)$, $L\left(\frac{9}{4}; \frac{33}{4}\right)$. $F_1F_2F_3F_4$ paralelogramma.

3493. Legyen az S súlypont az origó, a súlyponton átmenő egyenes az x tengely. $S(0; 0)$, $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$. A feltétel szerint $a_2 + b_2 + c_2 = 0$.
Ebből $a_2 + b_2 = -c_2$, $|a_2 + b_2| = |-c_2|$.

3494. Az ABC háromszög AB oldalát a B csúcs felé hosszabbítjuk meg, és így tovább. A csúcspontokhoz vezető vektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$, legyen $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
A keletkezett háromszög csúcsaihoz vezető vektorok $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$.

$$\left.\begin{array}{ll} \overrightarrow{AB_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}); & \mathbf{b}_1 = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ \overrightarrow{BC_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda(\mathbf{c} - \mathbf{b}); & \mathbf{c}_1 = \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \\ \overrightarrow{CA_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{CA} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{c}); & \mathbf{a}_1 = \mathbf{c} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \end{array}\right\} +$$

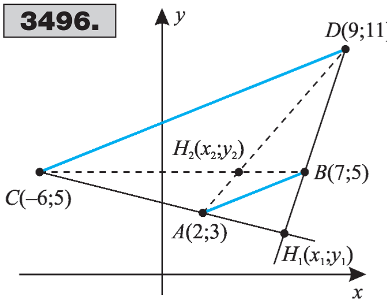
$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $\frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1}{3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} \Rightarrow \mathbf{s}_1 = \mathbf{s} \Rightarrow S = S_1$.

3495. Az olyan háromszögeket kell megkeresni, amelyeknél a súlypont koordinátái különböző eseteket jelölnek az origótól való távolságot tekintve. $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; -1)$, $S(0; 0)$, $|OS| = 0$; $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 0)$, $S\left(0; \frac{1}{3}\right)$, $|OS| = \frac{1}{3}$; $A(-1; -1)$,

$B(0;\,1)$, $C(1;\,0)$, $S\left(0;\,\frac{2}{3}\right)$, $|OS|=\frac{2}{3}$; $A(0;\,0)$, $B(0;\,1)$, $C(1;\,0)$, $S\left(\frac{1}{3};\,\frac{1}{3}\right)$, $|OS|=\frac{\sqrt{2}}{3}$; $A(0;\,0)$, $B(0;\,1)$, $C(1;\,1)$, $S\left(\frac{1}{3};\,\frac{2}{3}\right)$, $|OS|=\frac{\sqrt{5}}{3}$; $A(1;\,0)$, $B(1;\,1)$, $C(0;\,1)$, $S\left(\frac{2}{3};\,\frac{2}{3}\right)$, $|OS|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ha S koordinátáinak előjelét változtatjuk, a távolság változatlan marad, így értéke a felsorolt 6 lehetőség valamelyike lehet.

3496. $\overrightarrow{AB}(5;\,2)$, $\overrightarrow{CD}(15;\,6)$,
$3\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$. $H_1B:H_1D=AB:CD=1:3$,
$3\overrightarrow{H_1B}=\overrightarrow{H_1D}$. $\overrightarrow{H_1B}(7-x_1;\,5-y_1)$,
$\overrightarrow{H_1D}(9-x_1;\,11-y_1)$, $H_1(6;\,2)$.
$ABH_2\triangle\sim CDH_2\triangle$, $AH_2:H_2D=AB:CD=1:3$.
$3\overrightarrow{AH_2}=\overrightarrow{H_2D}$, $\overrightarrow{AH_2}(x_2-2;\,y_2-3)$,
$\overrightarrow{H_2D}(9-x_2;\,11-y_2)\Rightarrow H_2\left(\frac{15}{4};\,5\right)$.

3496.



3497. $\overrightarrow{AB}(3;\,-1)$, $3\cdot\overrightarrow{AB}(9;\,-3)$ $+90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{AD_1}(3;\,9)$, $\overrightarrow{BC_1}(3;\,9)$, $\mathbf{d}_1=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD}$, $\mathbf{c}=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_1}\Rightarrow D_1\left(\frac{9}{2};\,10\right)$, $C_1\left(\frac{15}{2};\,9\right)$, $3\cdot\overrightarrow{AB}$ $-90°$-os elforgatottja: $\overrightarrow{AD_2}=\overrightarrow{BC_2}(-3;\,-9)$, innen $D_2\left(-\frac{3}{2};\,-8\right)$, $C_2\left(\frac{3}{2};\,-9\right)$, $K_1\left(\frac{9}{2};\,5\right)$, $K_2\left(\frac{3}{2};\,-4\right)$.

Megoldható a feladat úgy is, ha $BC=\frac{AB}{3}$.

Két pont távolsága

3498. $|OP_1|=5$, $OP_2=5$, $OP_3=13$, $OP_4=\sqrt{58}$, $OP_5=3$, $OP_6=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $OP_7=3$, $OP_8=\sqrt{2a^2}=|a|\cdot\sqrt{2}$, $OP_9=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$.

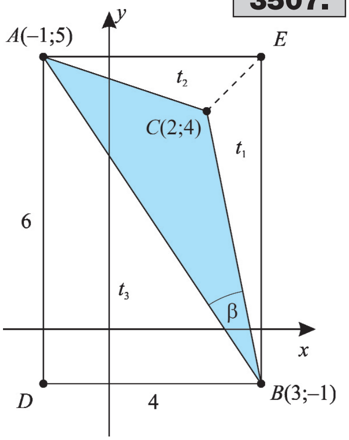
3499. $|\mathbf{a}|=5$; $|\mathbf{b}|=\sqrt{29}$; $|\mathbf{c}|=\sqrt{109}$; $|\mathbf{d}|=\sqrt{85}$.

3500. *a)* $d=5$; *b)* $d=\sqrt{65}$; *c)* $\sqrt{65}$; *d)* $\sqrt{53}$; *e)* $\sqrt{74}$; *f)* $\sqrt{\frac{370}{4}}$; *g)* 1; *h)* $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

3501. *a)* $c=5$, $b=10$, $a=5\sqrt{5}$, $k=5+10+5\sqrt{5}=15+5\sqrt{5}=5\left(3+\sqrt{5}\right)$; *b)* $10\sqrt{2}+13+\sqrt{29}$; *c)* $4\sqrt{5}+12+4\sqrt{2}$; *d)* $|a|+2|b|+\sqrt{a^2+4b^2}$.

V

3507.



3502. *a)* $|CA|=|CB|=\sqrt{10}$, $|AB|=4\sqrt{2}$, $F_{AB}(5;\ 0)$, $m_c=\sqrt{2}$, $t=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=4$ területegység.
b) 6 területegység.

3503. $C(c;0)$, $\sqrt{(c-2)^2+1}=\sqrt{(c-6)^2+25}\Rightarrow c=7$, $C(7;0)$, $|AB|=4\sqrt{2}$, $F_{AB}(4;\ 3)$, $m_c=3\sqrt{2}$, $t=12$ területegység.

3504. *a)* $\overrightarrow{CA}(2;\ -6)$, $\overrightarrow{CB}(9;\ 3)$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$, $|AB|=\sqrt{130}$, $r=\dfrac{AB}{2}$, $t=\dfrac{65\pi}{2}$ területegység.
b) $t=\dfrac{629\pi}{4}$ területegység.

3505. AB felezőpontja: $K(-1;2)$, $\overrightarrow{KA}(3;\ -1)$ $+90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{KC_1}(1;\ 3)\Rightarrow C_1(0;\ 5)$, $\overrightarrow{KA}$ $+90°$-os elforgatottja $(-1;-3)$, $C_2(-2;-1)$.

3506. Legyen $A(12;0)$, $B(0;5)$, $K_{AB}\left(6;\ \dfrac{5}{2}\right)$, $S\left(4;\ \dfrac{5}{3}\right)$, $|SK|=\sqrt{4+\dfrac{25}{36}}=\dfrac{13}{6}$.

3507. $t_{ADBE}=6\cdot4=24$, $t_1=\dfrac{6\cdot1}{2}=3$, $t_2=\dfrac{4\cdot1}{2}=2$, $t_3=\dfrac{6\cdot4}{2}=12$.
$T_{ABC}=24-(12+3+2)=7$ területegység. $\overrightarrow{CA}(-3;\ 1)$, $\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{10}$, $\overrightarrow{CB}(1;\ -5)$, $\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{26}$,
$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-8=\sqrt{10}\cdot\sqrt{26}\cdot\cos\gamma\Rightarrow\gamma=119{,}7°$, $\beta=22{,}3°$, $\alpha=38°$.

3508. *a)* $T=159$ területegység.
$k=\sqrt{305}+\sqrt{386}+\sqrt{26}+\sqrt{157}\approx 57{,}74$ egység.
b) $2\sqrt{2}$ területegység.

3509. *a)* $\overrightarrow{AD}(3;\ 1)$, $\overrightarrow{BC}(3;\ 1)\Rightarrow AD\# BC$ $\overrightarrow{AB}(1;\ -2)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1\neq0$, tehát paralelogramma. *b)* $\overrightarrow{AB}(5;\ 0)$, $\overrightarrow{DC}(3;\ 0)\Rightarrow AB\parallel DC$, $|AD|=|BC|=\sqrt{10}$, tehát szimmetrikus trapéz.
c) $\overrightarrow{AC}(-2;\ -4)$, $\overrightarrow{BD}(4;\ -2)$, $|AC|=|BD|=2\sqrt{5}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, tehát négyzet. *d)* Négyzet.
e) Négyzet.

3510. $C(x;y)$, $|AB|=5$, $|AC|=|BC|=5$, $|AC|^2=|BC|^2=25$,
$$\left.\begin{aligned}(x-4)^2+(y-3)^2&=25\\(x-8)^2+y^2&=25\end{aligned}\right\}\longrightarrow\ C_1\left(\frac{12+3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right),\ C_2\left(\frac{12-3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right).$$

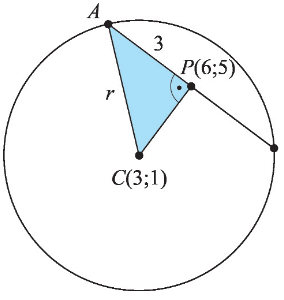
3511. Mivel a kör érinti az x tengelyt, $r=13$. Ha $P(x;y)$ rajta van a körön, $x^2+(y+13)^2=169$, $P_1(11;-6)$ $11^2+(-6+13)^2=121+49\neq169$, ezért P_1 nem illeszkedik a körre. P_2 illeszkedik a körre.

3512. *a)* $CP^2=3^2+4^2=25$, $r^2=CP^2+3^2=34$, $r=\sqrt{34}$; *b)* $r=3\sqrt{3}$.

3513. *a)* $P(x;y)$, $AP=BP\Rightarrow AP^2=BP^2$, $(x-4)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-3)^2$, $7x-y=1$;
b) $x+7y=7$.

3514. A szabályos hatszög középpontja és két szomszédos csúcsa szabályos háromszöget alkot. $\overrightarrow{AB}\left(3;\ 3\sqrt{3}\right)$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha=60°$, $AB=6$. Ezért $K_1(2+6;0)$, $K_1(8;0)$, $K_2\left(5-6;\ 3\sqrt{3}\right)$, $K_2\left(-1;\ 3\sqrt{3}\right)$. A további csúcsok: $\left(11;\ 3\sqrt{3}\right)$ $(14;0)$, $\left(11;\ -3\sqrt{3}\right)$, $\left(5;\ -3\sqrt{3}\right)$, illetve $\left(2;\ 6\sqrt{3}\right)$, $\left(-4;\ 6\sqrt{3}\right)$, $\left(-7;\ 3\sqrt{3}\right)$, $(-4;0)$.

3512.



3515. $PO=PA\ \Rightarrow\ PO^2=PA^2$, $P(x;0)$, $x^2=(x-9)^2+3^2\ \Rightarrow$ $\Rightarrow x=5$, $P(5;0)$.

3516. $P(x;0)$, $AP=BP\Rightarrow AP^2=BP^2$,
$(x-2)^2+1^2=(x-6)^2+5^2\Rightarrow x=7$, $P(7;0)$.

3517. $Q(0;y)$, $PQ=15\Rightarrow 5^2+(y+9)^2=225\Rightarrow Q_1\left(0;\ -9+10\sqrt{2}\right)$, $Q_2\left(0;\ -9-10\sqrt{2}\right)$.

3518. Az érintés miatt a kör középpontja $K(2;r)$, ha a sugara r. Ekkor $KA=r$,
$(2+4)^2+(r-2)^2=r^2\Rightarrow r=10$, $K(2;10)$.

3519. Mivel $P(4;2)$ az első negyedben van, a kör középpontja $K(r;r)$. $PK=r$,
$(r-4)^2+(r-2)^2=r^2\Rightarrow r_1=10$, $r_2=2$, $K_I(10;10)$, $K(2;2)$.

3520. Legyen $P(x;y)$, olyan pont, amelyre $AP\perp BP$. $\overrightarrow{AP}(x+4;\ y-2)$, $\overrightarrow{BP}(x-8;\ y+6)$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x+4)(x-8)+(y-2)(y+6)=0\Rightarrow x^2+y^2-4x+4y-12=0$. Ha $y=0$, akkor $P_1\left(2+4\sqrt{3};\ 0\right)$, $P_2\left(2-4\sqrt{3};\ 0\right)$. Ha $x=0$, akkor $Q_1\left(0;\ -2+4\sqrt{3}\right)$, $Q_2\left(0;\ -2-4\sqrt{3}\right)$.

3521. $P(x;0)$ $AP\perp BP$. $\overrightarrow{AP}(x+1;\ -3)$, $\overrightarrow{BP}(x-7;\ -3)$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x+1)(x-7)+9=0$.
$P_1\left(3+\sqrt{7};\ 0\right)$, $P_2\left(3-\sqrt{7};\ 0\right)$.

3522. $P(x;0)$, $\overrightarrow{PA}(x-6;\ -a)$, $\overrightarrow{PB}(x+2;\ -1)$, $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x-6)(x+2)+a=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-4x+a-12=0$. Egy megoldás van, ha a diszkrimináns 0.
$D=16-4(a-12)=0$, $a=16$. $A(6;16)$, $P(2;0)$.

3523. $B(0;y)$, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. $\overrightarrow{AB}(6;\ y)$, $\overrightarrow{CB}(-1;\ y+1)$, $-6+y(y+1)=0$.
$B_1(0;2)$, $B_2(0;-3)$. A középpontos szimmetriát felhasználva $D_1(-5;-3)$, $D_2(-5;2)$.

3524. $B(0;y)$, $\overrightarrow{AB}(-2;\ y+2)$, $\overrightarrow{CB}(-4;\ y-6)$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=8+(y+2)(y-6)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow B_1\left(0;\ 2+2\sqrt{2}\right)$, $B_2\left(0;\ 2-2\sqrt{2}\right)$. $D_1\left(6;\ 2-2\sqrt{2}\right)$, $D_2\left(6;\ 2+2\sqrt{2}\right)$.

$|AB_1|=2\sqrt{7+4\sqrt{2}}$, $|B_1C|=2\sqrt{10-4\sqrt{2}}$,

$T_1=4\sqrt{7+4\sqrt{2}\left(10-4\sqrt{2}\right)}=4\sqrt{\left(6+\sqrt{2}\right)^2}=4\left(6+\sqrt{2}\right)$,

$|AB_2|=2\sqrt{7-4\sqrt{2}}$, $|B_2C|=2\sqrt{10+4\sqrt{2}}$, $T_2=4\left(6-\sqrt{2}\right)$.

3525. 4 megoldás van, aszerint, hogy az AB oldal a hosszabb, vagy a rövidebb. Ha $BC=$ $=\dfrac{1}{3}AB$, $\overrightarrow{AB}(9;\ 12)$, $\overrightarrow{BC_1}(-4;\ 3)$, $\overrightarrow{BC_2}(4;\ -3)$; $\mathbf{c}_1=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_1}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_2}$; $C_1(3;19)$,

IV

$C_2(11;13)$. K az AC felezőpontja: $K_1\left(\frac{1}{2};\frac{23}{2}\right)$, $K_2\left(\frac{9}{2};\frac{17}{2}\right)$. Ha $\overrightarrow{BC}=3\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC_3}(-36;27)$, $C_3(-29;43)$, $\overrightarrow{BC_4}(36;-27)$, $C_4(43;-11)$. Így $K_3\left(-\frac{31}{2};\frac{47}{2}\right)$, $K_4\left(\frac{41}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

3526. $|AB|=\sqrt{10}$, $|BC|=5$. Legyen $D(x;y)$.

$$\left.\begin{aligned} AD=AB \Rightarrow AD^2=AB^2 \Rightarrow (x-8)^2+(y-5)^2=10\\ CD=BC \Rightarrow CD^2=BC^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=25\end{aligned}\right\}\Rightarrow D(7;2).$$

$AC=\sqrt{45}$, $BD=\sqrt{20}$, $T=15$ területegység.

3527. $\overrightarrow{AC}(9;9)$, $|AC|=9\sqrt{2}$, $T=27=\dfrac{9\sqrt{2}\cdot BD}{2}\Rightarrow BD=3\sqrt{2}$.

Az AC felezőpontja $F\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{FD}$, illetve $\overrightarrow{FB}$ az $\frac{1}{3}$ $\overrightarrow{FD}$, 90°-os elforgatottja.

$\overrightarrow{FC}\left(\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right)$, $\overrightarrow{FD}\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{FB}\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

$\mathbf{d}=\mathbf{f}+\overrightarrow{FD}\Rightarrow D(-1;1)$

$\mathbf{b}=\mathbf{f}+\overrightarrow{FB}\Rightarrow B(2;-2)$.

3528. A rombusz átlói felezik a rombusz szögeit, tehát az ABC háromszög szabályos. $B(x;y)$,

$AC=\sqrt{20}$, $AD=BC=\sqrt{20}$. $\left.\begin{aligned}(x-2)^2+(y-4)^2=20\\ \underline{x^2+y^2=20}\end{aligned}\right\}\Rightarrow B\left(1+2\sqrt{3};\,2-\sqrt{3}\right)$,

$D\left(1-2\sqrt{3};\,2+\sqrt{3}\right)$.

3529. $(\mathbf{a},\mathbf{j})=(\mathbf{b},\mathbf{j})=\varphi$, $|\mathbf{a}|=2\sqrt{5}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{4+b^2}$, $\mathbf{j}(0;1)$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}=2\sqrt{5}\cdot1\cdot\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

$\mathbf{b}\cdot\mathbf{j}=\sqrt{4+b^2}\cdot1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}=b\Rightarrow 5b^2=4+b^2\Rightarrow b=\pm1$. Mivel $b>0$, $B(-2;1)$.

3530. $A(x;y)$, $AB=AC=5\Rightarrow AB^2=AC^2=25$. $\left.\begin{aligned}(x+1)^2+(y+1)^2=25\\ \underline{(x-8)^2+(y-2)^2=25}\end{aligned}\right\}-\Rightarrow A_1(4;-1)$,

$A_2(3;2)$. $BC=3\sqrt{10}$, BC felezőpontja $F\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$, $m=AF=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, $T=7{,}5$ területegység.

3531. *a)* Legyen $K(u;v)$, $AK=BK$, $AK^2=BK^2$, illetve $AK=CK$, $AK^2=CK^2$.
$(u-1)^2+(v-5)^2=(u-8)^2+(v-2)^2$, illetve $(u-1)^2+(v-5)^2=(u+6)^2+(v+2)^2$.

$v=-\dfrac{14}{5}$, $u=\dfrac{9}{5}$, $K\left(\frac{9}{5};-\frac{14}{5}\right)$, $r=\sqrt{\left(\frac{9}{5}-1\right)^2+\left(-\frac{14}{5}-5\right)^2}=\dfrac{\sqrt{1537}}{5}$;

b) $K\left(-\frac{13}{14};-\frac{9}{14}\right)$, $r=\dfrac{\sqrt{2210}}{14}$; *c)* $K(-3;-2)$, $r=5$; *d)* $K(3;4)$, $r=5$; *e)* $K\left(-\frac{49}{20};\frac{1}{5}\right)$, $r=\dfrac{\sqrt{8177}}{20}$.

3532. Az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög hasonló az eredetihez. Köré írt körének sugara fele az eredeti háromszög köré írható körének. $AK = BK,\ AK^2 = BK^2$, illetve $AK = CK,\ AK^2 = CK^2$. $(u+7)^2 + (v+2)^2 = (u+1)^2 + (v-9)^2$, illetve $(u+7)^2 + (v+2)^2 =$
$= (u-5)^2 + (v+3)^2;\quad K\left(-\frac{15}{23}; \frac{77}{46}\right)$. $r^2 = AK^2\left(7 - \frac{15}{23}\right)^2 + \left(\frac{77}{46} + 2\right)^2 = \frac{113\,825}{4 \cdot 23^2}$. $R \approx 7{,}33$,
$R^2 = 4r^2$, $T = R^2\pi = 4 \cdot r^2\pi = 675{,}18$ területegység.

3533. Ilyen háromszög nem létezik.

3534. $P(x;y)$, $PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$, illetve $PC : PD = 2:3$, $\frac{PC^2}{PD^2} = \frac{4}{9}$.
$P_1(1;4)$, $P_2(-6;-3)$.

3535. $S(-1;7)$, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 261 + 45 + 162 = 468$, $AS^2 + BS^2 + CS^2 = 89 + 50 + 17 =$
$= 156$. Mivel $3 \cdot 156 = 468$, ezért az állítás igaz. Az általános megoldáshoz válasszuk a koordináta-rendszert úgy, hogy a súlypont az origóba essen.

3536. Legyen az e egyenes az x tengely, $P(x;0)$, $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$.
A $PA^2 + PB^2 + PC^2 = (x-a_1)^2 + a_2^2 + (x-b_1)^2 + b_2^2 + (x-c_1)^2 + c_2^2 =$
$= 3\left(x - \frac{a_1+b_1+c_1}{3}\right)^2 - \frac{(a_1+b_1+c_1)^2}{3} + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ kifejezés minimális, ha
$x = \frac{a_1+b_1+c_1}{3}$, $P\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; 0\right)$. P a súlypontnak az x tengelyre eső merőleges vetülete.

3537. Legyen $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $P(x;x)$.
$S = x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + x^2 + (y-1)^2 = 4x^2 + 4y^2 - 2x - 2y + 4 =$
$= 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2$. $2 \le S \le 4$, $S_{\min} = 2$, ekkor P a négyzet középpontjában van,
$S_{\max} = 4$, ekkor P a négyzet csúcsaiban van.

Az egyenes egyenletei

3538. *a)* $4x + 3y = 26$; *b)* $2x + y + 2 = 0$; *c)* $-2x + 3y + 8 = 0$;
d) $x + 3y = 0$; *e)* $y = 5$; *f)* $x = -40$; *g)* $x + y = 1$.

3539. *a)* $3 - 2y = 0$; *b)* $\sqrt{3}x - 3y = -2\sqrt{3} - 3$; *c)* $x\sqrt{3} + y = 4\sqrt{3}$; *d)* $x - y = 5$;
e) $x - y = 5$; *f)* $x + y = 8$; *g)* $8x + 20y = 101$; *h)* $x = 4$.

3540. *a)* $3x - 5y = 27 - 30 \Rightarrow 3x - 5y = -3$; *b)* $x - y = -2$; *c)* $x - 3y = 7$;
d) $5x - 4y = 0$; *e)* $9x - 14y = -15$; *f)* $5x + 2y = 6{,}4$; *g)* $x = 0$; *h)* $8x - 3y = -24$;
i) $\mathbf{n}\,(a-b; b-a)$, $(a-b)x + (b-a)y = 0$, ha $a \ne b$, akkor $x - y = 0$; ha $a = b$, akkor $x = a$, vagy $y = b$, vagy $n_1x + n_2y = (n_1 + n_2)a$. *j)* $3\sqrt{2}x + \left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)y = 6 + 2\sqrt{6}.$

3541. $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, $\mathbf{n}(y_2 - y_1; -x_2 + y_1)$,$(y_2 - y_1)x + (-x_2 + x_1)y =$
$= (y_2 - y_1)x_1 + (-x_2 + x_1)y_1$ rendezve, kiemelve: $(x_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$.
Ha $x_1 = x_2$ és $y_2 \ne y_1 \Rightarrow x = x_1$; ha $x_1 \ne x_2$ és $y_2 = y_1 \Rightarrow y = y_1$.