Azonosító jel: | | | | | | | | | | | | | | |

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2024. május 7. 9:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. **a)** Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$3+\log_2(x-2)=\log_2(2x+8)$$

Adott az f és a g függvény:
$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2^{x-3}$
$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g(x)=2^{x}-7$

b) A két függvény grafikonját egy számítógépes programmal közös koordináta-rendszerben ábrázoltuk. Határozza meg a két grafikon metszéspontjának koordinátáit!

Legyen a h függvény értelmezési tartománya az egyjegyű pozitív prímszámok halmaza, és legyen $h(x)=2^{x-3}$.

c) Határozza meg a h függvény inverzfüggvényének az értelmezési tartományát!

a)	6 pont	
b)	5 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	14 pont	

2. **a)** Hány olyan hétjegyű szám van a kettes számrendszerben, amelyben legfeljebb két darab 0 számjegy található?

Legyen H az egyjegyű pozitív egész számok halmaza.

b) Hány olyan 4 elemű részhalmaza van H-nak, amelynek az 1 vagy a 2 eleme?

c) A és B legyen a fenti H alaphalmaz két részhalmaza. Adja meg az alábbi (igaz) állítás megfordítását, és adja meg a megfordítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

„Ha $A = \overline{B}$, akkor $A \cap B = \varnothing$.”

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	11 pont	

3. A kockapóker játékot öt szabályos dobókockával játsszák. A játék célja, hogy a játékosok bizonyos számkombinációkat dobjanak ki a kockákkal.

Részletek a játékszabályból:

- ❖ A dobójátékos először mind az öt kockával dob.
- ❖ Ha nem elégedett az első dobás eredményével, akkor ezután felvehet tetszőleges számú kockát a lent lévő öt kockából, és azokkal másodszor is dobhat.

A *Sor* számkombináció esetén az öt kockán öt különböző, egymást követő szám szerepel.
A *Royal* számkombináció esetén mind az öt kockán ugyanaz a szám szerepel.
A *Full House* számkombináció esetén az öt kocka közül három kockán ugyanaz a szám szerepel, a maradék két kockán pedig szintén azonos, de az előzőtől eltérő szám szerepel (pl. 1-1-1-4-4).

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy játékos első dobása *Sor* lesz!

Egy játékos az első dobásával a 3-3-3-4-5 számokat dobta. A 3-asokat lent hagyja, a másik két kockával pedig másodszor is dob.

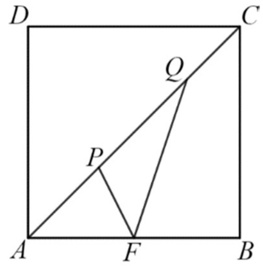
b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a játékos második dobása után kapott számkombináció *Full House* vagy *Royal* lesz!

Egy „cinkelt” (nem szabályos) dobókockával a 6-os dobás valószínűsége p. Ezzel a kockával kétszer dobunk egymás után. Tudjuk, hogy 0,64 annak a valószínűsége, hogy a két dobásból legalább az egyik 6-os.

c) Számítsa ki p értékét!

a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

4. Az ábrán látható $ABCD$ négyzet AC átlóját a P és a Q pont három szakaszra bontja, mégpedig úgy, hogy $AP:PQ:QC = 4:5:3$ teljesül. Jelölje F a négyzet AB oldalának felezőpontját.



a) Határozza meg, hogy az AFQ háromszög területe hányadrésze az $ABCD$ négyzet területének!

A négyzet oldala 24 egység hosszú.

b) Igazolja, hogy az FPQ háromszögben $FP = 4\sqrt{5}$ és $QF = 6\sqrt{10}$.

c) Igazolja, hogy az AFQ háromszög és az FPQ háromszög hasonló!

a)	4 pont	
b)	6 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. **a)** Határozza meg az $a_n = \dfrac{n+4}{n}$ sorozat határértékét!

b) Igazolja, hogy az a_n sorozat szigorúan monoton csökkenő!

c) Határozza meg azokat az n pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $\dfrac{(n+4)!}{n!} = 24(n+1)(n+3)$.

d) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 24(x + 1)(x + 3)$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt korlátos síkidom területét!

a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
d)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Domi két héten keresztül felüléseket végzett reggeli tornaként. A második naptól kezdve minden reggel 5-tel több felülést végzett, mint az előző napon. A két hét alatt összesen 1001 felülést végzett.

a) Hány felülést végzett Domi a legelső napon, és hányat a legutolsón?

Dalma az 5250 méter hosszú margitszigeti futókörön edz. Egyik nap két kört futott: a második körben az átlagsebessége 3,5 km/h-val kisebb volt, mint az első körben. A teljes kétkörös futás átlagsebessége 12 km/h volt. (Az átlagsebesség a megtett út hosszának és az út megtételéhez szükséges időnek a hányadosa.)

b) Határozza meg Dalma átlagsebességét az első, illetve a második körben!

c) Írja a következő mondatban a pontozott vonalakra a megadottak közül a megfelelő szavakat úgy, hogy az állítás igaz legyen: **számtani**, **harmonikus**, **mértani**.

„Két különböző pozitív valós szám …………………….. közepe mindig nagyobb, mint a …………………… közepe, de kisebb, mint a …………………… közepe.”

a)	5 pont	
b)	9 pont	
c)	2 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. A finom homokban az egyes gömb alakú homokszemek sugarát egységesen 0,1 mm-nek tekinthetjük. Egy 2 dl-es poharat teletöltünk finom homokkal. A homok (mivel a gömb alakú homokszemek nem töltik ki teljesen a teret) a pohár űrtartalmának 60%-át tölti ki.

a) Határozza meg, hány homokszem található a 2 dl-es pohárban! Válaszát millióra kerekítve adja meg!

Egy építkezéshez homokot rendelt Szabó úr. A homok megérkezett, és lerakás után a homokkupac jó közelítéssel egy 1,8 méter alkotójú forgáskúpnak tekinthető.

b) Határozza meg a homokkupac térfogatát, ha alapkörének átmérője 3,1 méter!

c) Határozza meg az 1,8 méter alkotójú forgáskúpok közül annak a sugarát és a magasságát, amelynek a térfogata maximális! Mekkora ez a maximális térfogat?

a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. A k_1 kör egyenlete a derékszögű koordináta-rendszerben $x^2 - 4x + y^2 - 12y = 13$.

a) Határozza meg a k_1 kör sugarát és középpontjának koordinátáit!

A k_1 körbe írható *ABCD* húrtrapéz csúcsai *A*(4; 13), *B*(–5; 4), *C*(4; –1) és *D*(9; 4).

b) Határozza meg a húrtrapéz magasságát és szögeit!

A k_2 kör egyenlete a derékszögű koordináta-rendszerben $x^2 + y^2 = 53$.

c) Hány olyan pont található a k_2 körvonalon, amelynek mindkét koordinátája egész szám?

a)	3 pont	
b)	8 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Egy k és egy $2k$ pontú teljes gráfnak összesen 697 éle van.

a) Határozza meg k értékét!

Egy kispályás labdarúgó-bajnokságban hat csapat körmérkőzést játszik egymással: mindegyik csapat játszik mindegyik másikkal egy-egy mérkőzést. A bajnokság megkezdése előtt a szervezők a mérkőzések közül kisorsolnak hármat, és ezeken a mérkőzéseken doppingellenőrzést tartanak.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy lesz olyan csapat, amelyik mindhárom kisorsolt mérkőzésen szerepel!

Egy mérkőzés előtt az öltözőben hatan vannak, akik közül néhányan már kezet fogtak egymással. Mind a hat embertől megkérdeztük, hogy eddig hány másik emberrel fogott kezet. A válaszok között van öt különböző érték.

c) Hány kézfogás történhetett eddig összesen?

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	14		**51**	
	2.	11			
	3.	12			
	4.	14			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző