ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

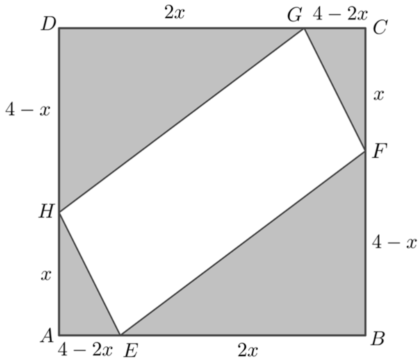
1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

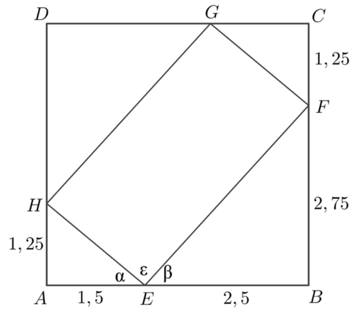
I.

1. a)		
(A paralelogramma területét megkapjuk, ha az $ABCD$ négyzet területéből levonjuk a négy derékszögű háromszög területét.)  $BF = DH = 4 - x$ és $AE = CG = 4 - 2x$.	1 pont	
$T(x) = 16 - 2\cdot\dfrac{x(4-2x)}{2} - 2\cdot\dfrac{2x(4-x)}{2}$	1 pont	
$T(x) = 16 - 4x + 2x^2 - 8x + 2x^2$	1 pont	
Összevonás után: $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$, ami a bizonyítandó állítás volt.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. b) első megoldás		
$T(x) = 4(x^2 - 3x + 4) = 4(x - 1{,}5)^2 + 7$	2 pont	
A másodfokú tag együtthatója pozitív, ezért a T-nek minimuma van az $x = 1{,}5$ helyen (ami a $0 < x < 2$ feltételnek megfelel).	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha megállapítja, hogy a $4x^2 - 12x + 16$ *kifejezésnek minimuma van (mert a főegyüttható pozitív), és akkor minimális, ha* $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{12}{8} = 1{,}5$ *(ami a* $0 < x < 2$ *feltételnek megfelel).*

1. b) második megoldás		
T-nek ott lehet minimuma, ahol az első deriváltja 0.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T'(x) = 8x - 12 = 0$	1 pont	
$x = 1{,}5$ (ami a $0 < x < 2$ feltételnek megfelel).	1 pont	
$T''(1{,}5) = 8 > 0$ miatt itt valóban minimuma van T-nek.	1 pont	*A T' negatívból pozitívba megy át $x = 1{,}5$-nél, ezért T-nek itt minimuma van.*
Összesen:	**4 pont**	

1. c) első megoldás		
Az ábra jelöléseit használjuk. (Mivel $x = 1{,}25$, ezért) $HA = 1{,}25$ és $AE = 4 - 2 \cdot 1{,}25 = 1{,}5$, $BE = 2{,}5$ és $BF = 4 - 1{,}25 = 2{,}75$.	1 pont	
A HAE derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1{,}25}{1{,}5} = \frac{5}{6}$ ($\approx 0{,}833$).	1 pont	
Az FBE derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg}\beta = \frac{2{,}75}{2{,}5} = 1{,}1$.	1 pont	
$\alpha \approx 39{,}8°$ és $\beta \approx 47{,}7°$.	1 pont	*Addíciós képlet szerint:* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{5}{6}+\frac{11}{10}}{1-\frac{5}{6}\cdot\frac{11}{10}} =$ $= 23{,}2$.
$\alpha + \beta \approx 87{,}5°$, ezért $\varepsilon \approx 92{,}5°$.	1 pont	
(A paralelogramma szemközti szögei egyenlők, szomszédos szögei pedig kiegészítő szögek, ezért) a paralelogramma szögei: 87,5°, 92,5°, 87,5°, 92,5°.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. c) második megoldás		
Az a) feladat szerint a paralelogramma területe (m^2-ben) $T(1{,}25) = 4 \cdot 1{,}25^2 - 12 \cdot 1{,}25 + 16 = 7{,}25$.	1 pont	
Az ábra jelöléseit használva: $HA = 1{,}25$ és $AE = 4 - 2 \cdot 1{,}25 = 1{,}5$, $BE = 2{,}5$ és $BF = 4 - 1{,}25 = 2{,}75$.	1 pont	
$HE = \sqrt{1{,}25^2 + 1{,}5^2}$ ($\approx 1{,}953$) $EF = \sqrt{2{,}75^2 + 2{,}5^2}$ ($\approx 3{,}717$)	1 pont	$HE = \frac{\sqrt{61}}{4}$, $EF = \frac{\sqrt{221}}{4}$
A paralelogramma egyik szögét jelölje φ. A paralelogramma területe: $T = \frac{\sqrt{61}}{4} \cdot \frac{\sqrt{221}}{4} \cdot \sin\varphi$, amiből $\sin\varphi = \frac{7{,}25 \cdot 16}{\sqrt{61 \cdot 221}}$ ($\approx 0{,}9991$).	1 pont	
Ebből $\varphi \approx 87{,}5°$ vagy $\varphi \approx 180° - 87{,}5° = 92{,}5°$.	1 pont	
A paralelogramma szögei: 87,5°, 92,5°, 87,5°, 92,5°.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. a)		
Jelölje a mértani sorozat hányadosát q. $q^5\left(=\frac{384}{12}\right)=32$,	1 pont	
innen pedig $q = 2$.	1 pont	
A sorozat első hat tagja tehát $\frac{3}{2}$, 3, 6, 12, 24 és 48,	1 pont	
ezek átlaga 15,75.	1 pont	
Az ettől mért átlagos abszolút eltérés: $\frac{\lvert 1,5-15,75\rvert+\lvert 3-15,75\rvert+...+\lvert 48-15,75\rvert}{6}=$	1 pont	
= 13,5.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. b)		
A 12 háromféleképpen állítható elő 1-nél nagyobb számjegyek szorzataként: $12 = 6\cdot 2 = 4\cdot 3 = 3\cdot 2\cdot 2$.	1 pont	
A számjegyek összege akkor lesz 12, ha ezen számjegyek mellett még megfelelő számú 1-es számjegyet tartalmaz a szám. (Tetszőleges számú 1-es hozzávételével a számjegyek szorzata továbbra is 12 marad.)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Olyan szám, amely 1 db 6-ost, 1 db 2-est, valamint (12 – 6 – 2 =) 4 db 1-est tartalmaz, $6\cdot 5$ (= 30) db van. (A 6-ost hat helyre tehetjük, a 2-est a fennmaradó öt hely bármelyikére.)	1 pont	$\frac{6!}{4!}$ (= 30)
Olyan szám, amely 1 db 4-est, 1 db 3-ast, valamint (12 – 4 – 3 =) 5 db 1-est tartalmaz, $7\cdot 6$ (= 42) db van;	1 pont	$\frac{7!}{5!}$ (= 42)
olyan pedig, amely 2 db 2-est, 1 db 3-ast, valamint ($12 - 2\cdot 2 - 3$ =) 5 db 1-est tartalmaz, $\binom{8}{2}\cdot 6$ (= 168) db van.	2 pont	$\frac{8!}{2!\cdot 5!}$ (= 168)
Összesen tehát 30 + 42 + 168 = 240 olyan szám van, amely a feltételeknek megfelel.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. a)		
$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=324$	1 pont	
$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x}$, így $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=324$, azaz $\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=324$.	2 pont	
$\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=729$	1 pont	
($729=9^3$ és az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $x=-3$.	1 pont	$x=\log_{\frac{1}{9}}729=-3$
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

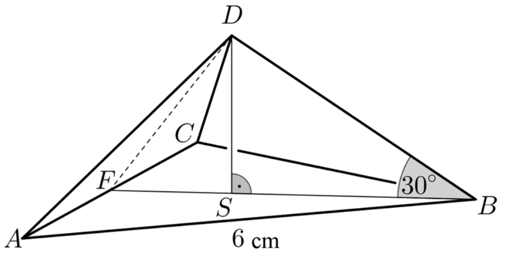
3. b) **első megoldás**		
(Négyzetre emelve:) $6x-24=2x-7+1-2\sqrt{2x-7}$	1 pont	
$2\sqrt{2x-7}=18-4x$	1 pont	
(Kettővel osztva, négyzetre emelve és rendezve:) $2x-7=81-36x+4x^2$, azaz $4x^2-38x+88=0$.	1 pont	
A másodfokú egyenlet egyik gyöke $x = 4$, és ez kielégíti az eredeti egyenletet (mindkét oldal értéke 0).	2 pont	
A másik gyök $x = 5{,}5$. Behelyettesítéssel látható, hogy ez nem megoldása az eredeti egyenletnek (a bal oldal értéke 3, a jobb oldal értéke 1).	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) második megoldás		
Értelmezési tartomány: $x \geq 4$. Ezen a halmazon mindkét oldal nemnegatív, így a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.	1 pont	
$6x-24=2x-7+1-2\sqrt{2x-7}$	1 pont	
$2\sqrt{2x-7}=18-4x$	1 pont	
A bal oldal nemnegatív, ezért szükséges, hogy a jobb oldal is nemnegatív legyen, tehát $x \leq 4{,}5$. A kapott egyenlet mindkét oldala nemnegatív a [4; 4,5] halmazon, ezért itt (2-vel osztás után) a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.	1 pont	
$2x-7=81-36x+4x^2$, azaz $4x^2-38x+88=0$.	1 pont	
A másodfokú egyenlet gyökei $x = 4$ és $x = 5{,}5$.	1 pont	
Az 5,5 nem eleme a [4; 4,5] halmaznak, a 4 viszont igen, és mivel ezen a halmazon ekvivalens átalakításokat végeztünk, ez egyben az egyenlet egyetlen megoldása.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) harmadik megoldás		
Értelmezési tartomány: $x \geq 4$.	1 pont	
$\sqrt{6x-24}+1=\sqrt{2x-7}$ Négyzetre emelve: $6x-24+2\sqrt{6x-24}+1=2x-7$.	1 pont	
$\sqrt{6x-24}=8-2x$	1 pont	$\sqrt{6(x-4)}=2(4-x)$
(Behelyettesítéssel látható, hogy) $x = 4$ megoldása az egyenletnek és az eredeti egyenletnek is.	1 pont*	
(Az értelmezési tartományon) a $\sqrt{6x-24}=8-2x$ egyenlet bal oldala szigorúan monoton növekedő, a jobb oldala pedig szigorúan monoton csökkenő,	2 pont*	*Ha $x > 4$, akkor az egyenlet bal oldala pozitív, jobb oldala pedig negatív,*
ezért más megoldása nincs az egyenletnek.	1 pont*	*ezért 4-nél nagyobb szám nem lehet gyöke az egyenletnek.*
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelzett pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az egyenlet bal oldalán nemnegatív szám áll, ezért a jobb oldalon is ennek kell teljesülnie:	1 pont	
$8 - 2x \geq 0$, vagyis $x \leq 4$.	1 pont	
Ezt az értelmezési tartománnyal összevetve adódik, hogy csak $x = 4$ lehet megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Behelyettesítéssel látható, hogy a 4 valóban megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	

4. a)		
 Az ábra jelöléseit használjuk. A gúla ABC alaplapjának középpontja (súlypontja) S. DS merőleges az alaplapra, a feltétel szerint pedig $SBD\angle = 30°$.	1 pont	
BS az ABC szabályos háromszög magasságának (súlyvonalának) kétharmada: $BS = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 2\sqrt{3}$ ($\approx$ 3,46) (cm).	2 pont	
A gúla testmagassága $DS = BS \cdot \mathrm{tg}30° = 2$ (cm).	1 pont	
Az ABC háromszög területe: $T = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ ($\approx$ 15,59) (cm^2).	1 pont	
A gúla térfogata: $V = \frac{T \cdot DS}{3} = 6\sqrt{3}$ ($\approx$ 10,4) cm^3.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. b)		
Ha az 1-es, a 2-es és a 3-as dobás valószínűsége p, akkor a 4-es dobás valószínűsége $5p$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$p + p + p + 5p = 8p = 1$, ezért $p = \frac{1}{8}$.	1 pont	
(A dobott számok összege akkor lehet 6, ha az egyik tetraéderrel 2-t, a másikkal pedig 4-et, vagy ha mindkettővel 3-at dob a bűvész.) Annak a valószínűsége, hogy az egyik tetraéderrel 2-t, a másikkal pedig 4-et dob a bűvész, $2 \cdot p \cdot 5p = 10p^2 = \frac{10}{64}$,	1 pont	
annak a valószínűsége pedig, hogy mindkét tetraéderrel 3-at dob, $p \cdot p = p^2 = \frac{1}{64}$.	1 pont	
A kérdezett valószínűség ezek összege: $\frac{11}{64}$ ($\approx$ 0,172).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

II.

5. a)		
(A szakaszok hosszát cm-ben mérve) $2a + c = 18$ miatt $c = 18 - 2\cdot 7 = 4$.	1 pont	
$a + 2b + c = 33$ miatt $b = \frac{33-7-4}{2} = 11$.	1 pont	
A téglatest térfogata: $abc = 7\cdot 11\cdot 4 = 308$ cm^3.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. b) első megoldás		
(A térfogatot az egyik él hosszának segítségével fejezzük ki.) A $\left.\begin{array}{r} 2a+c=18 \\ a+2b+c=33 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer első egyenletéből: $c = 18 - 2a$.	1 pont	
A második egyenletbe helyettesítve: $2b = 33 - a - c = 33 - a - (18 - 2a) = a + 15$, ezért $b = \frac{a}{2} + 7,5$.	1 pont	
$V = abc = a\left(\frac{a}{2}+7,5\right)(18-2a)$ $(0 < a < 9)$	1 pont	
A $V(a) = a\left(\frac{a}{2}+7,5\right)(18-2a)$; $0 < a < 9$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol $V'(a) = 0$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$V(a) = -a^3 - 6a^2 + 135a$	1 pont	
$V'(a) = -3a^2 - 12a + 135 = -3(a^2 + 4a - 45)$	1 pont	
$a^2 + 4a - 45 = 0$ gyökei 5 és -9 (a -9 nem lehetséges, az 5 pedig megfelel).	1 pont	
$V''(a) = -6a - 12$ és így $V''(5) < 0$, tehát V-nek (abszolút) maximuma van $a = 5$-nél.	1 pont	*Az $a = 5$ helyen a V' függvény pozitívból negatívba megy át, ezért itt V-nek maximuma van.*
A téglatest térfogata maximális (400 cm^3), ha éleinek hossza $a = 5$ cm, $b = 10$ cm és $c = 8$ cm.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

5. b) **második megoldás**		
(A térfogatot az egyik él hosszának segítségével fejezzük ki.) A $\left.\begin{array}{r}2a+c=18\\a+2b+c=33\end{array}\right\}$ egyenletrendszer két egyenletének különbségéből: $a-2b=-15$, vagyis $a=2b-15$.	1 pont	
Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $c=18-2(2b-15)=48-4b$.	1 pont	
A téglatest térfogata $V=abc=(2b-15)b(48-4b)$ (ahol $7{,}5<b<12$).	1 pont	
A $V(b)=4b(2b-15)(12-b)$; $7{,}5<b<12$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol $V'(b)=0$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$V(b)=-8b^3+156b^2-720b$	1 pont	
$V'(b)=-24b^2+312b-720=24(-b^2+13b-30)$	1 pont	
$-b^2+13b-30=0$ gyökei a 10 és a 3 (a 3 nincs a V értelmezési tartományában, a 10 pedig megfelel).	1 pont	
A $b=10$ helyen a V' függvény pozitívból negatívba megy át, ezért itt V-nek (abszolút) maximuma van.	1 pont	$V''(b)=24(-2b+13)$ *és* $V''(10)=-168<0$, *ezért* *V-nek itt maximuma van.*
A téglatest térfogata maximális (400 cm^3), ha éleinek hossza $b=10$ cm, $a=5$ cm és $c=8$ cm.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzések:

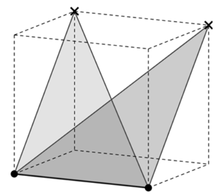
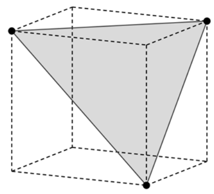
1. *Ha a vizsgázó válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.*
2. $V(c)=\frac{1}{8}(c^3-66c^2+864c)$, *ahol* $0<c<18$;

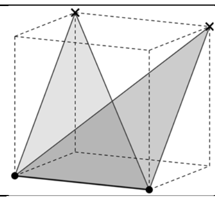
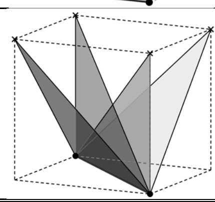
   $V'(c)=\frac{3}{8}(c^2-44c+288)$;

   A $c^2-44c+288=0$ *egyenlet gyökei* 8 *és* 36
   (a 36 *nincs a V értelmezési tartományában, a* 8 *pedig megfelel);*

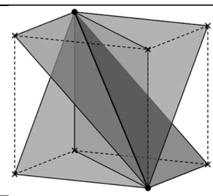
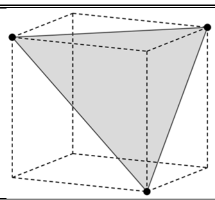
   $V''(c)=\frac{3}{4}(c-22)$ *és* $V''(8)=-10{,}5<0$.

5. c) első megoldás		
A téglatest 8 csúcsa összesen $\binom{8}{3}=56$ háromszöget határoz meg.	1 pont	
Ezek közül le kell vonni azokat, melyeknek síkja egybeesik a téglatest valamelyik lapjának síkjával. Mind a hat lapon négy ilyen háromszög van, összesen tehát 24.	2 pont	
A megfelelő háromszögek száma (56 – 24 =) 32.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

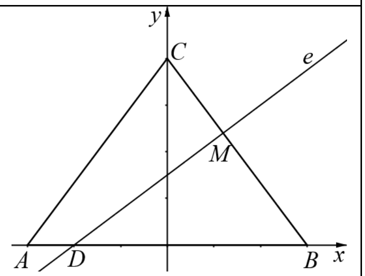
5. c) második megoldás		
(A feladat szerint nem választható olyan háromszög, amelynek két oldala a téglatest két élével azonos.) Ha a háromszög egyik oldala a téglatest egy éle, akkor ennek két végpontjához kétféleképpen választhatjuk a háromszög harmadik csúcsát (mert a kiválasztott élben csatlakozó két lap egyik csúcsa sem választható a háromszög harmadik csúcsaként).	1 pont	
(A téglatestnek 12 éle van, ezért) ilyen háromszögből összesen $12\cdot 2=24$ darab van.	1 pont	
Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik élével azonos, akkor mindhárom oldala a téglatest egy-egy lapjának átlója. A téglatest egy adott csúcsából kiinduló három él nem közös végpontjai egy megfelelő háromszöget határoznak meg. (A téglatestnek 8 csúcsa van, ezért) ilyen háromszögből 8 darab van.	1 pont	
A megfelelő háromszögek száma 24 + 8 = 32.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. c) harmadik megoldás		
A téglatest „alsó” lapjáról két szomszédos csúcsot 4-féleképpen választhatunk, ezekhez a feltételnek megfelelően a „felső” lapjáról 2-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot.	1 pont	
Az alsó lapról két átellenes csúcsot 2-féleképpen választhatunk, ezekhez a felső lapról 4-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot.	1 pont	

Tehát $(4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 =)$ 16 megfelelő háromszög van, melynek az alsó lapon van két csúcsa, és ugyanígy 16 megfelelő háromszög van, melynek a felső lapon van két csúcsa.	1 pont	
Összesen tehát 32 megfelelő háromszög van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. c) negyedik megoldás		
A téglatest egy kiválasztott testátlójának két végpontjához a téglatest maradék 6 csúcsának bármelyike választható a háromszög harmadik csúcsának.	1 pont	
(A téglatestnek 4 testátlója van, ezért) ilyen háromszögből összesen $6 \cdot 4 = 24$ darab van.	1 pont	
Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik testátlója, akkor (nincs olyan oldala sem, amelyik a téglatest valamelyik éle, ezért) mindhárom oldala lapátló. Ilyen háromszögből 8 darab van.	1 pont	
A megfelelő háromszögek száma $24 + 8 = 32$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. a)		
A háromszög kerülete 30 egység. Jelölje az oldalak hosszát x, x és $30 - 2x$.	1 pont	
A szórás miatt: $\sqrt{\frac{(10-x)^2+(10-x)^2+(2x-20)^2}{3}}=3\sqrt{2}$.	1 pont	
$200-40x+2x^2=18$ $2x^2-40x+182=0$ $x^2-20x+91=0$	1 pont	$\sqrt{2(10-x)^2}=3\sqrt{2}$ $\sqrt{(10-x)^2}=3$ $\lvert 10-x \rvert=3$
$x = 7$ vagy $x = 13$	1 pont	
A háromszög oldalai az első esetben 7, 7, 16 egység, a második esetben 13, 13, 4 egység.	1 pont	
Ellenőrzés: Az első eset nem lehetséges, mert nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A második eset lehetséges, mert teljesül a háromszög-egyenlőtlenség (és a szórás $\sqrt{\frac{3^2+3^2+6^2}{3}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ valóban).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. b)		
Az e egyenes az x tengelyt a $D(-4;\ 0)$ pontban (az y tengelyt pedig a $(0;\ 3)$ pontban) metszi.	1 pont	
(Keressük BC és az e egyenes M metszéspontját.) A BC egyenes egy normálvektora $(4;\ 3)$,	1 pont	
egyenlete $4x + 3y = 24$.	1 pont	
A BC és az e egyenes M metszéspontját a $\left.\begin{array}{l}4x+3y=24\\3x-4y=-12\end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása adja. Az első egyenlet 4-szeresének és a második egyenlet 3-szorosának összegét véve: $25x = 60$.	1 pont	*Az első egyenletből $x = 6 - 0{,}75y$, amit a másodikba helyettesítve:* $18 - 6{,}25y = -12$. $6{,}25y = 30$
$x = 2{,}4$ és $y = 4{,}8$, tehát $M(2{,}4;\ 4{,}8)$.	1 pont	
A DBM háromszög területe: $\frac{10\cdot 4{,}8}{2} = 24$.	1 pont	
Mivel az ABC háromszög területe: $\frac{12\cdot 8}{2} = 48$, az e valóban felezi az ABC háromszög területét.	1 pont	
(A Pitagorasz-tételből) $AC = \sqrt{6^2+8^2} = 10$, az ABC háromszög kerülete ezért $2\cdot 10 + 12 = 32$.	1 pont	
$BM = \sqrt{3{,}6^2+4{,}8^2} = 6$, $DB + BM = 10 + 6 = 16$,	1 pont	
tehát az e egyenes valóban felezi az ABC háromszög kerületét is.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

7. a)		
Az I. állítás hamis.	1 pont	
Az öt számjegy között biztosan lesz három azonos paritású, így az ezeknek megfelelő csúcsok egy hárompontú kört alkotnak a gráfban, ezért az nem lehet fagráf.	1 pont	
A II. állítás igaz.	1 pont	
Egy megfelelő példa. (Ha például egy páros és négy páratlan számjegyet írunk le, akkor a páros számnak megfelelő csúcs a gráfban izolált pont lesz, ezért ez a gráf nem összefüggő.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b)		
Legyen a célállomások száma a két évvel ezelőtti időpontban n, jelenleg pedig $1{,}5n$ (n így páros). A járatok száma korábban $\binom{n}{2}$ volt, jelenleg $\binom{1{,}5n}{2}$.	1 pont	*Jelenleg m, két éve* $\frac{2}{3}m$ *célállomás esetén:*
A feltétel szerint $\binom{n}{2}+60=\binom{1{,}5n}{2}$.	1 pont	$\binom{\frac{2}{3}m}{2}+60=\binom{m}{2}$.
$\frac{n(n-1)}{2}+60=\frac{1{,}5n(1{,}5n-1)}{2}$	1 pont	$\frac{\frac{2}{3}m\left(\frac{2}{3}m-1\right)}{2}+60=\frac{m(m-1)}{2}$
Nullára rendezve: $0=1{,}25n^2-0{,}5n-120$.	1 pont	$0=\frac{5}{9}m^2-\frac{1}{3}m-120$
Ennek egyik gyöke –9,6, ami nem megoldása a feladatnak, a másik gyöke pedig 10.	1 pont	*A* –14,4 *nem megoldás, a másik gyök pedig* 15.
Jelenleg $(10\cdot 1{,}5=)$ 15 célállomásra közlekednek.	1 pont	
Ellenőrzés: két éve 45, jelenleg 105 járatot közlekedtetnek, és 105 = 45 + 60 valóban igaz.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az $\binom{n}{2}$ *értékeinek felsorolása* (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, …) *alapján megállapítja, hogy* 10 *korábbi és* 15 *jelenlegi célállomás megfelel a feladat feltételeinek* ($10\cdot 1{,}5=15$*, illetve* $105-45=60$)*, akkor erre a gondolatmenetére 3 pontot kapjon.*
További 4 pontot kapjon, ha bizonyítja, hogy nincs más megoldása a feladatnak.
Például: Az n (a feladat szövege alapján) páros, ezért $n=2k$ *és* $1{,}5n=3k$ ($k\in\mathbf{N}^+$).
$\binom{3k}{2}-\binom{2k}{2}=2{,}5k(k-0{,}2)$ *(2 pont),*
ami $k\geq 1$ *esetén szigorúan monoton növekszik (1 pont), tehát más megoldás nincs (1 pont).*

7. c)		
A modell szerint 0,968 annak a valószínűsége, hogy valaki megjelenik az indulásnál.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy 169 utas jelenik meg: $P(169)=\binom{170}{169}\cdot 0{,}968^{169}\cdot 0{,}032\approx 0{,}022$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy 170 utas jelenik meg: $P(170)=0{,}968^{170}\approx 0{,}004$.	1 pont	
Annak a valószínűsége tehát, hogy legfeljebb 168 utas jelenik meg: $1-P(169)-P(170)\approx 0{,}974$.	1 pont	
A légitársaság által fizetendő kártérítés várható értéke: $P(169)\cdot 600+P(170)\cdot 1200\approx 18$ euró.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. a)		
Megoldandó az $\frac{n^2-5n+10}{2}=26$ egyenlet. Nullára rendezve $n^2-5n-42=0$.	1 pont	
Ennek a gyökei (kb. 9,45 és –4,45) nem egészek,	1 pont	
így nincs olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha megállapítja, hogy a kilencbetűs szóért 23, *a tízbetűsért* 30 *pont jár (1 pont), majd a b) feladat állítására hivatkozva (1 pont) bizonyítottnak tekinti, hogy* 26 *pont nem kapható (1 pont).*

8. b)		
Hárombetűs szóért (a képlet alapján) 2 pont jár, és ez több, mint a kétbetűs szóért járó 1 pont.	1 pont	
Legyen $f(n)=\frac{n^2-5n+10}{2}$ (ahol $n \geq 3$ és $n \in \mathbf{N}$). Igazolni kell, hogy $f(n+1) > f(n)$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f(n+1)=\frac{(n+1)^2-5(n+1)+10}{2}=\frac{n^2-3n+6}{2}$,	1 pont*	
az $\frac{n^2-3n+6}{2}>\frac{n^2-5n+10}{2}$ egyenlőtlenséget (ekvivalens lépésekkel) átrendezve $n > 2$ adódik. Ez ($n \geq 3$ miatt) teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy hosszabb szóért több pont jár.	1 pont*	
Mivel $n^2-5n=n(n-5)$ két ellentétes paritású tényező szorzata, ezért páros, tehát $f(n)$ egész szám.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Teljes négyzetté alakítással kapjuk, hogy $f(n)=0{,}5(n-2{,}5)^2+1{,}875$.	1 pont	
Az $x \mapsto 0{,}5(x-2{,}5)^2+1{,}875$ másodfokú függvény szigorúan monoton növekedő, ha $x \geq 2{,}5$. Ebből következik, hogy $f(n+1) > f(n)$ is teljesül, ha $n \geq 3$ és $n \in \mathbf{N}$.	1 pont	

8. c) első megoldás		
Megmutatjuk, hogy az $\frac{n^2-5n+10}{2}=2+\frac{m(m+1)}{2}$ egyenletnek minden $m\in\mathbf{N}$ paraméter esetén van megoldása az $n\geq 3$ egészek körében.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Nullára rendezve: $n^2-5n+(6-m-m^2)=0$.	1 pont	$n^2-5n+10=4+m(m+1)$
A megoldóképletet felírva: $n_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4(6-m-m^2)}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1+4m+4m^2}}{2}$.	1 pont	$n^2-5n+6=m(m+1)$
A négyzetgyök alatti kifejezés (a diszkrimináns) teljes négyzet, így $n_{1,2}=\frac{5\pm(1+2m)}{2}$.	1 pont	$(n-3)(n-2)=m(m+1)$
Az egyenlet gyökei tehát 3 + m és 2 – m.	1 pont	*Mivel $n\geq 3$, ezért a jobb oldalon és a bal oldalon is két szomszédos természetes szám szorzata áll.*
A 3 + m mindig 2-nél nagyobb egész szám (a 2 – m pedig soha),	1 pont	*Az egyenlőség teljesül, ha $n-3=m$, azaz $n=m+3$,*
ezért igaz, hogy tetszőleges m természetes szám esetén a játékos kaphat $2+\frac{m(m+1)}{2}$ pontot.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. c) második megoldás		
Megmutatjuk, hogy az $\frac{n^2-5n+10}{2}=2+\frac{m(m+1)}{2}$ egyenletnek minden $m\in\mathbf{N}$ paraméter esetén van megoldása az $n\geq 3$ egészek körében.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Rendezve: $n^2-5n+10=m^2+m+4$.	1 pont	
Mindkét oldalt 4-gyel szorozva: $4n^2-20n+40=4m^2+4m+16$, amiből $4n^2-20n+25=4m^2+4m+1$.	1 pont	
$(2n-5)^2=(2m+1)^2$	1 pont	
$2n-5=2m+1$ vagy $2n-5=-2m-1$	1 pont	
$n=m+3$, amely mindig legalább 3, ezért megfelel (vagy $n=2-m$, de ez mindig legfeljebb 2, ezért nem felel meg).	1 pont	
Tehát igaz, hogy tetszőleges m természetes szám esetén a játékos kaphat $2+\frac{m(m+1)}{2}$ pontot.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. c) harmadik megoldás

(Megkeressük m-hez a megfelelő n értéket.)
Az első néhány eset táblázatokba foglalva:

m	0	1	2	3	4	5	6	…
$2+\frac{m(m+1)}{2}$	2	3	5	8	12	17	23	…

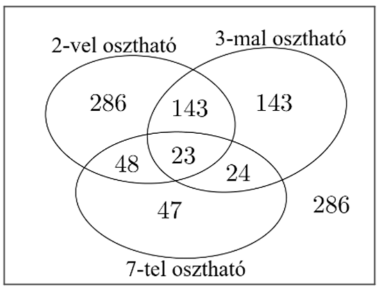
n (a szó hossza)	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{n^2-5n+10}{2}=$	–	–	–	2	3	5	8	12

(táblázatok fent)	1 pont	
A két táblázat alapján az sejthető, hogy az m-hez tartozó pontszámot az $n = m + 3$ hosszúságú szóra kapjuk meg ($m = 0$ esetén $n = 3$, $m = 1$ esetén $n = 4$, $m = 2$ esetén $n = 5$ megfelelő, és így tovább).	2 pont	
$\frac{(m+3)^2-5(m+3)+10}{2}=\frac{m^2+6m+9-5m-15+10}{2}=$	1 pont	
$=\frac{m^2+m+4}{2}=\frac{4+m(m+1)}{2}=2+\frac{m(m+1)}{2}$,	2 pont	
így az $n = m + 3$ valóban minden m esetén megfelelő választás.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. a) első megoldás

$42 = 2\cdot 3\cdot 7$, így azokat az 1000-nél nem nagyobb pozitív egész számokat keressük, melyek nem oszthatók sem 2-vel, sem 3-mal, sem 7-tel.	1 pont	
1-től 1000-ig 2-vel osztható szám 500 darab, 3-mal osztható 333 darab, 7-tel osztható 142 darab van;	1 pont	*Az* 500 *darab páratlan szám között* 167 *darab* 3-*mal osztható és* 71 *darab* 7-*tel osztható van,*
2-vel és 3-mal (azaz 6-tal) osztható szám 166 darab, 2-vel és 7-tel (azaz 14-gyel) osztható szám 71 darab, 3-mal és 7-tel (azaz 21-gyel) osztható szám 47 darab;	1 pont	
végül 2-vel, 3-mal és 7-tel (azaz 42-vel) osztható szám 23 darab van.	1 pont	*a* 3-*mal és* 7-*tel is oszthatók száma pedig* 24.
A keresett számok száma (logikai szita formulával) 1000 – (500 + 333 + 142) + (166 + 71 + 47) – 23 =	1 pont*	500 – 167 – 71 + 24 =
= 286.	1 pont*	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó a megfelelő halmazábra részhalmazai elemszámának összeadásával jut helyes eredményre:*
1000 – (286 + 143 + 47 + 143 + 24 + 48 + 23) = 286.



9. a) második megoldás		
1-től 42-ig a 42-höz relatív prímek: 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, ez 12 darab.	1 pont*	
(Ha k relatív prím a 42-höz, akkor $k + 42$ is, ezért) bármelyik 42 egymást követő egész szám között 12 megfelelő szám van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$1000 = 23 \cdot 42 + 34$	1 pont	
Így 1-től $(23 \cdot 42 =)$ 966-ig $23 \cdot 12 = 276$ megfelelő szám van,	1 pont	
967-től 1000-ig pedig annyi, amennyi 1-től 34-ig, azaz 10 darab.	1 pont	
A keresett számok száma $(276 + 10 =)$ 286.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó az adott számhoz a nála kisebb relatív prímek számát megadó φ(n) függvényre hivatkozik:*

$$\varphi(42) = 42 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 12\,.$$

9. b)		
Az n-edik L alakú sávban a számok összege $n + 2n + 3n + \ldots + (n-1)n + n \cdot n +$ $+ n(n-1) + n(n-2) + \ldots + n \cdot 2 + n =$	1 pont	$2 \cdot (n + 2n + 3n + \ldots +$ $+ (n-1)\, n + n \cdot n) - n \cdot n$
$n \cdot ((1 + 2 + \ldots + n - 1) \cdot 2 + n) =$	1 pont	$2n(1+2+3+\ldots+n) - n^2 =$
$= n \cdot (n(n-1) + n) =$	1 pont	$= 2n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n^2 =$
$= n^3$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. c) első megoldás		
Teljes indukciót alkalmazunk. $n = 1$-re az állítás igaz: $K_1 = 1^3 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2$.	1 pont	
Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely m pozitív egészre, azaz $K_m = 1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$. Be kell látni, hogy az állítás $(m + 1)$-re is teljesül, azaz $K_{m+1} = 1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 + (m+1)^3 = \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$. Az indukciós feltevést felhasználva tehát igazolandó, hogy: $\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3 = \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$.	2 pont	

Osztunk $(m+1)^2$-nel, majd szorzunk 4-gyel: $\left(\frac{m}{2}\right)^2+(m+1)=\left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$ $m^2+4(m+1)=(m+2)^2 \Leftrightarrow$ $m^2+4m+4=m^2+4m+4$.	2 pont	
A két oldal egyenlő, és ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát az eredeti állítás minden pozitív egész n-re igaz.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem hivatkozik az ekvivalenciára.*
Összesen:	**6 pont**	

9. c) második megoldás		
Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$-re igaz az állítás $(1 = 1)$.	1 pont	
Ha az állítás valamely $m \in \mathbf{N}^+$-re igaz: $K_m=1^3+2^3+3^3+...+m^3=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$,	1 pont	
akkor igaz az is, hogy $K_{m+1}=1^3+2^3+3^3+...+m^3+(m+1)^3=$ $=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2+(m+1)^3=$	1 pont	
$=(m+1)^2\left(\frac{m^2}{4}+m+1\right)=(m+1)^2\cdot\frac{m^2+4m+4}{4}=$	1 pont	
$=(m+1)^2\cdot\frac{(m+2)^2}{4}=\left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$.	1 pont	
Az állítás igaz $m + 1$-re is, tehát az eredeti állítás minden pozitív egész n-re igaz.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. c) harmadik megoldás		
A b) feladat megoldása alapján az első n pozitív köbszám összege az első n darab L alakú sávban lévő számok összege, $L_1 + L_2 +\ldots+ L_n$, ami megegyezik a táblázat bal felső $n \times n$-es részében lévő számok összegével.	2 pont	
$(1 + 2 + 3 +\ldots+ n) + 2\cdot(1 + 2 + 3 +\ldots+ n) +$ $+ 3\cdot(1 + 2 + 3 +\ldots+ n) +\ldots+ n\cdot(1 + 2 + 3 +\ldots+ n) =$	1 pont	
$= (1 + 2 + 3 +\ldots+ n)\cdot(1 + 2 + 3 +\ldots+ n) =$	1 pont	
$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.	1 pont	
Ezzel az állítást igazoltuk.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	