

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2006. május 9.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI MINISZTERIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
- Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
- Az olyan részsámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- A vizsgafeladatsor **II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
A legkisebb szög: 20° .	2 pont	<i>A szögösszeg megjelenítéséért már jár 1 pont.</i>
Összesen:	2 pont	

2.		
A sorozat negyedik eleme: 6.	2 pont	<i>A megfelelő képlet felírása 1 pontot ér.</i>
Összesen:	2 pont	

3.		
A két szám egyenlő. ($7 \cdot 13 = 91$).	2 pont	
Összesen:	2 pont	

4.		
$\frac{9,8^\circ}{7} = 1,4^\circ$.	2 pont	<i>A fogalom helyes használata melletti számolási hiba esetén 1 pont.</i>
Összesen:	2 pont	

5.		
20	2 pont	
Összesen:	2 pont	

6.		
$V = 42 \cdot 25 \cdot 30 (= 31\,500 \text{ cm}^3 = 31,5 \text{ dm}^3) = 31,5 \text{ liter}$.	2 pont	<i>Ha a mértékegység átváltása hiányzik, vagy nem áttekinthető, maximum 1 pont adható.</i>
Az akvárium nem telik meg.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

7.		
b)	1 pont	<i>Ha az a)-t is kiválasztja, maximum 1 pont adható.</i>
c)	1 pont	
Összesen:	2 pont	

8.		
156 000 Ft-ot vehet fel Péter egy év elteltével.	2 pont	<i>A 2 pont nem bontható.</i>
Összesen:	2 pont	

9.		
Mind a négy ember maximum három levelet írhatott egy héten (4·3).	2 pont	
12 vagy b)	1 pont	
Összesen:	3 pont	

10.		
$4x + 5y = -13$	3 pont	<i>A jól leolvasott normálvektor vagy irányvektor 1 pont; a pont jó behelyettesítése 2 pont.</i>
Összesen:	3 pont	

11.		
Számolósos indoklás vagy helyes Venn-diagram (6 + 8) – 10 = 4	2 pont	
Mindkét nyelvet 4 fő beszéli.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

12.		
f legkisebb értéke: -3 ,	1 pont	
ez az $x = 2$ értékhez tartozik.	1 pont	
f legnagyobb értéke: 7 ,	1 pont	
ez az $x = 6$ értékhez tartozik.	1 pont	
Összesen:	4 pont	<i>Ha a jó tartalmat hibásan, pl. rendezett számpárokkal fejezi ki, 2 pont adható.</i>

II./A

13. a)		
Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani.	1 pont	<i>Az új változó bevezetése nélkül is jár a pont.</i>
Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$.	1 pont	
$a = 3^x = 3$ esetén, $x = 1$.	1 pont	
$a = 3^x = -1$ egyenlet nem ad megoldást,	1 pont	
mert 3 minden valós kitevőjű hatványa pozitív szám.	1 pont	
Az $x = 1$ kielégíti az eredeti egyenletet.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

13. b)		
Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani. Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$.	1 pont*	
$a = \sin x = 3$ nem ad megoldást,	1 pont	
mert $\sin x \leq 1$.	1 pont	
$a = \sin x = -1$. A $\sin x = -1$ egyenlet gyökei: az $x = \frac{3}{2} \cdot \pi + 2k \cdot \pi$, ahol k tetszőleges egész szám.	2 pont	<i>Az egyenlet gyökének elfogadható a fokokban megadott helyes alakja is: $x = \frac{3}{2} \cdot \pi + 2k \cdot \pi =$ $= 270^\circ + k \cdot 360^\circ$ Ha a gyök megadásánál hiányzik a periódus, 1 pont adható. Ha vegyesen használ fokot és ívmértéket, akkor is 1 pont jár.</i>
Ezek az x értékek kielégítik az eredeti egyenletet.	1 pont	
Összesen:	6 pont	
<i>* Ha az első egyenletben ezért a részletért nem kaphatott pontot, akkor itt 2 pont adható.</i>		

14.		
Az a oldalú szabályos háromszög magassága: $\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \sqrt{3}.$	1 pont	<i>Az 1 pont akkor is jár, ha közvetlenül a területképletet írja fel helyesen.</i>
Az alaplap területe: $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16 \cdot \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$	2 pont	
A palást területe: $3 a m_t = 24 m_t$	2 pont	
$24 m_t = 6 \cdot 16 \cdot \sqrt{3}$ $m_t = 4 \cdot \sqrt{3}$	2 pont	
$V_{\text{hasáb}} = (T_a \cdot m_t) = 16 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 192 \text{ (cm}^3\text{)}$	2 pont	
$A_{\text{hasáb}} = 2 T_a + 3 a \cdot m_t$	1 pont	<i>Akkor is jár az 1 pont, ha közvetlenül a képletbe jól behelyettesítve írja fel a felszín.</i>
$A_{\text{hasáb}} = 2 \cdot 16 \cdot \sqrt{3} + 24 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 128 \cdot \sqrt{3} \approx 221,7 \text{ (cm}^2\text{)}$	2 pont	
Összesen:	12 pont	<i>Következetesen alkalmazott kerekítések esetén teljes pontszám jár.</i>

15. a)		
Az összes képezhető kódok száma $5!$	2 pont	
120 tanuló írt dolgozatot.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

15. b)																	
<table border="1"> <tr> <td>jegyek</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>fok</td> <td>45°</td> <td>105°</td> <td>150°</td> <td>60°</td> </tr> <tr> <td>fő</td> <td>15</td> <td>35</td> <td>50</td> <td>20</td> </tr> </table>	jegyek	2	3	4	5	fok	45°	105°	150°	60°	fő	15	35	50	20	4 pont	<i>Adatokat tartalmazó oszloponként 1-1 pont. Ha a tanulói létszámokat kerekítés után adja meg helyesen, 2 pontot kaphat.</i>
jegyek	2	3	4	5													
fok	45°	105°	150°	60°													
fő	15	35	50	20													
	2 pont																
Összesen:	6 pont																

15. c)		
A 4-es és az 5-ös dolgozatok száma összesen: 70.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{70}{120} = \frac{7}{12} \approx 0,583$.	2 pont	
Összesen:	3 pont	

II./B

16. a)		
	2 pont	Ha az (1)-nek megfelelő tartományon ábrázol, 1 pont adható.
Összesen:		2 pont

16. b)		
Az (1) egyenlet miatt $y > -1$	1 pont	
és $x > -11$.	1 pont	
Összesen:		2 pont

16. c)		
$\lg(y+1)^2 = \lg(x+11)$	1 pont	
$\lg(2x+1)^2 = \lg(x+11)$	1 pont	
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt	1 pont	
$(2x+1)^2 = x+11$	1 pont	
$4x^2 + 3x - 10 = 0$	2 pont	
$x_1 = \frac{5}{4}$ és $x_2 = -2$	1 pont	
$y_1 = \frac{5}{2}$ és $y_2 = -4$	1 pont	
A másodfokú egyenletrendszer megoldásai: $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$ illetve $(-2, -4)$,	1 pont	
amiből a második számpár nem tartozik az eredeti egyenlet értelmezési tartományába,	1 pont	
az első számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert.	1 pont	
Összesen:		11 pont

16. d)		
A $P\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$ pont bejelölése.	2 pont	<i>Ha a c) részre adott választ jól ábrázolja, akkor jár a 2 pont.</i>
Összesen:	2 pont	

17. a)																										
1. megoldás																										
Foglaljuk táblázatba az egyes fordulóiban megtett tetteket és a nyereményeket																										
<table border="1"> <thead> <tr> <th>forduló</th> <th>tét</th> <th>a forduló végén visszakapott pénz</th> <th>összes pénz a forduló végén</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1.</td> <td></td> <td>40 000.-</td> <td>40 000.-</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td>40 000.-</td> <td>80 000.-</td> <td>80 000.-</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td>80 000.-</td> <td>160 000.-</td> <td>160 000.-</td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td>160 000.-</td> <td>320 000.-</td> <td>320 000.-</td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td>320 000.-</td> <td>640 000.-</td> <td>640 000.-</td> </tr> </tbody> </table>	forduló	tét	a forduló végén visszakapott pénz	összes pénz a forduló végén	1.		40 000.-	40 000.-	2.	40 000.-	80 000.-	80 000.-	3.	80 000.-	160 000.-	160 000.-	4.	160 000.-	320 000.-	320 000.-	5.	320 000.-	640 000.-	640 000.-	4 pont	<i>2. fordulótól soronként 1-1 pont. Bármilyen logikusan felépített, helyes megjelenítés elfogadható.</i>
forduló	tét	a forduló végén visszakapott pénz	összes pénz a forduló végén																							
1.		40 000.-	40 000.-																							
2.	40 000.-	80 000.-	80 000.-																							
3.	80 000.-	160 000.-	160 000.-																							
4.	160 000.-	320 000.-	320 000.-																							
5.	320 000.-	640 000.-	640 000.-																							
A bátor versenyző 640 000 Ft-ot nyerhet, ha minden fordulóban jól válaszol.																										
Összesen:	4 pont																									

2. megoldás		
Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy fordulóban a pénze mindig megduplázódik, így a végén $40\,000 \cdot 2^4 = 640\,000$ forint a nyeremény.	4 pont	
Összesen:	4 pont	

17. b)**1. megoldás**

forduló	tét	a forduló végén visszakapott pénz	összes pénz a forduló végén	4 pont	2. fordulótól soronként 1-1 pont. Bármilyen logikusan felépített, helyes megjelenítés elfogadható.
1.		40 000.-	40 000.-		
2.	20 000.-	40 000.-	60 000.-		
3.	30 000.-	60 000.-	90 000.-		
4.	45 000.-	90 000.-	135 000.-		
5.	67 500.-	135 000.-	202 500.-		
Az óvatos versenyző 202 500 Ft-ot nyerhet, ha minden fordulóban jól válaszol.				Összesen:	4 pont

2. megoldás

Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy fordulóban a pénze mindig másfélszeresedik, így a végén $40\,000 \cdot 1,5^4 = 202\,500$ forint a nyeremény.	4 pont
Összesen:	4 pont

17. c)**1. megoldás**

forduló	tét	a forduló végén visszakapott pénz	összes pénz a forduló végén	5 pont	2. fordulótól soronként 1-1 pont. Bármilyen logikusan felépített, helyes megjelenítés elfogadható.
1.		40 000.-	40 000.-		
2.	40 000.-	80 000.-	80 000.-		
3.	60 000.-	120 000.-	140 000.-		
4.	105 000.-	210 000.-	245 000.-		
5.	183 750.-	0	61 250.-		
A versenyző 61 250 Ft-ot nyerhet.				Összesen:	5 pont

2. megoldás

Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy forduló végére $40\,000 \cdot 2^1 \cdot 1,75^2 \cdot 0,25 = 61\,250$ forint a nyeremény.	5 pont
Összesen:	5 pont

17. d)		
1. megoldás		
A kockáztatás 4 fordulón keresztül történik, és a játékos minden fordulóban $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vállal 100%-ot.	1 pont	
A maximális nyereményhez jutás valószínűsége: $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0,012$.	3 pont	
Összesen:	4 pont	

2. megoldás		
Az összes esetek száma a 4 utolsó fordulóban $3^4 = 81$.	2 pont	
A kedvező esetek száma 1.	1 pont	
A keresett valószínűség (a klasszikus modell szerint): $\frac{1}{81} \approx 0,012$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	
<i>Megjegyzés: Ha a vizsgázó a leírt játékszabályokat nem jól értelmezi (pl. a feltett pénzt nem kiadásként kezeli), és a saját modelljében újabb hibát nem követ el, az a) kérdésre járó 4 pontot nem kaphatja meg. Megoldása így legfeljebb 13 pontot ér.</i>		

18. a)		
A feladat megértését tükröző helyes ábra.		
	2 pont	
Összesen:	2 pont	

18. b)		
$y = \frac{4}{\cos 70^\circ}$	3 pont	
$\approx 11,7$ (m)	1 pont	
Összesen:	4 pont	

18. c)		
A legtovábbi megvilágított pont a talajon a rúd aljától: $x = 4 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ$ távolságra van,	2 pont	
$x \approx 11 \text{ (m)}$,	1 pont	
így a 15 méterre levő pont már nincs megvilágítva.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

18. d)		
$r^2 \pi \leq 100$	1 pont	
$r \leq \sqrt{\frac{100}{\pi}} \approx 5,64 \text{ (m)}$,	2 pont	
$h \leq \frac{5,64}{\operatorname{tg} 70^\circ} \approx 2,05 \text{ (m)}$,	2 pont	
tehát az első vagy a második kampóra kell akasztani az érzékelőt.	2 pont	
Összesen:	7 pont	<i>Egyenlettel számolva is járnak a pontok.</i>