Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
TÁMOP-3.1.1-11/1-2012-0001
XXI. századi közoktatás
(fejlesztés, koordináció) II. szakasz

MATEMATIKA

2. MINTAFELADATSOR

KÖZÉPSZINT

2015

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc u. 6-8.
Telefon: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 235-7202
www.ofi.hu

1.		
$A \cap B = \{2; 3\}$	1 pont	
$A \setminus B = \{5; 7\}$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az 1-et prímszámnak tekinti, de egyébként jól dolgozik, akkor 1 pontot kapjon.

2.		
24 000 (Ft)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
28 cm	2 pont	*Ha a vizsgázó nem ír mértékegységet, akkor legfeljebb 1 pontot kapjon.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
Módusz: jeles (5)	1 pont	
Medián: jó (4)	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
(32 + 8 + 2 + 1 =) 43	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
8, 13, 21, 34	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a tagok megadása során egyszer hibázik, de a hibás eredménnyel jól számol tovább, akkor 1 pontot kapjon. Egynél több hiba esetén nem jár pont.

7.		
A) Hamis,	1 pont	
mert a fokszámok összege nem lehet páratlan szám.	1 pont	
B) Igaz,	1 pont	
mert a 6 pontú teljes gráfnak 15 éle van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8.		
$x = -1$	2 pont	*Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe a függvény alaphalmazát, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.*

Összesen:	**2 pont**	

9.		
(A szinusztétel alapján:) $\frac{b}{6}=\frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ}$	1 pont	
$b \approx 8{,}77$ cm	2 pont	*Ha a vizsgázó nem ír mértékegységet, akkor legfeljebb 1 pontot kapjon.*
Összesen:	**3 pont**	

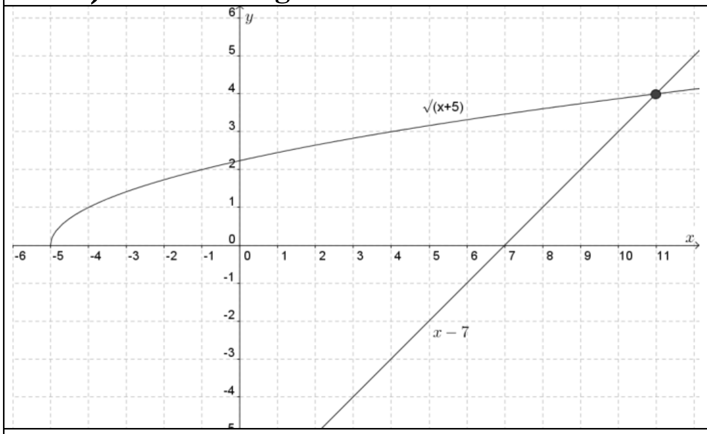
10.		
(Az egyenlet diszkriminánsa:) $D=b^2-40$.	1 pont	
(Az egyenletnek nincs valós megoldása, ha) $b^2-40<0$.	1 pont	
(A legnagyobb ilyen egész szám) $b=6$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

11.		
$(x-3)^2+(y+1)^2=$	1 pont	
$=25$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

12.		
Összesen $\binom{90}{5}$-féleképpen húzhatnak ki 5 számot a 90-ből.	1 pont	
Dani szelvénye $\binom{85}{5}$-féleképpen lehet kitöltve, ha nincs egyetlen találata sem.	1 pont	
A keresett valószínűség: $p=\frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}=$	1 pont	
$\left(=\frac{32\,801\,517}{43\,949\,268}\right)\approx 0{,}746.$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. a)		
Egy tört értéke pontosan akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelűek.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mivel a számláló negatív, így a nevező is negatív, azaz $2-x<0$, így	1 pont	
$2<x$.	1 pont	
A megoldáshalmaz (a megadott intervallumon)]2; 5].	1 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**4 pont**	

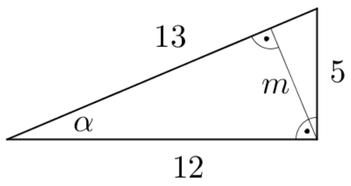
13. b) első megoldás		
$-5\le x$ (és $7\le x$)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
(Négyzetre emelve és rendezve:) $x^2-15x+44=0$	1 pont	
Az egyenlet gyökei: $x_1=4$ és $x_2=11$.	1 pont	
$x_1=4$ nem megoldása az egyenletnek.	1 pont	
$x_2=11$ megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy a [7; ∞[intervallumon ekvivalenciára való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

13. b) második megoldás		
		
Az $f(x)=x-7$ függvény ábrázolása.	2 pont	
Az $g(x)=\sqrt{x+5}$ függvény ábrázolása ugyanabban a koordináta-rendszerben.	2 pont	
(A függvénygörbék közös pontjának leolvasása.) $x=11$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. a)		
Mivel $5^2+12^2=13^2$,	1 pont	
így a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög valóban derékszögű.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

14. b)		
A Thalész-tétel megfordítása miatt	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a Thalész-tételre hivatkozik.*
a súlyvonal hossza az átfogó fele, azaz 6,5 cm.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

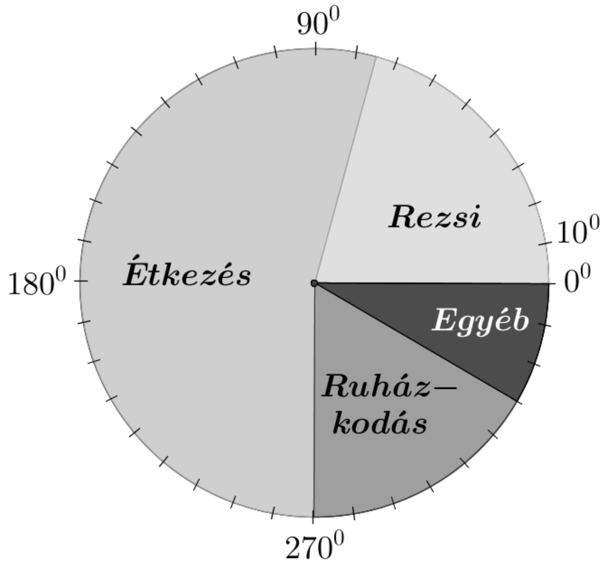
14. c) első megoldás		
A háromszög területét kétféleképpen felírva $\frac{5\cdot 12}{2}=\frac{13\cdot m}{2}$,	2 pont	
ahonnan $m=\frac{60}{13}$ (cm).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. c) második megoldás		
 (A 12 cm és 13 cm hosszúságú oldalak által közrefogott α szögre:) $\sin\alpha=\frac{5}{13}=\frac{m}{12}$,	2 pont	
ahonnan $m=\frac{60}{13}$ (≈ 4,62) (cm).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. d)		
(Jelölje V a kettőskúp térfogatát, V_1 és V_2 a kúpok térfogatát.) $V=V_1+V_2=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$=\frac{\left(\frac{60}{13}\right)^2\pi\cdot m_1}{3}+\frac{\left(\frac{60}{13}\right)^2\pi\cdot m_2}{3}=$	1 pont	
$=\frac{\left(\frac{60}{13}\right)^2\pi\cdot(m_1+m_2)}{3}=$	1 pont	

$=\dfrac{\left(\dfrac{60}{13}\right)^2\pi\cdot 13}{3}\approx$	1 pont	
≈ 290 (cm^3)	1 pont	
A dísz tömege ($290\cdot 2{,}66\approx$) 771,4 g.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

15. a)		
2015-ben Andráséknál az életkorok összege ($5\cdot 30=$) 150 év.	1 pont	
2015-ben Barbaráéknál az életkorok összege ($4\cdot 39=$) 156 év.	1 pont	
2016-ben mindenki 1 évvel idősebb, így az életkorok összege 315 év.	1 pont	*Az átlagéletkor 2015-ben 306 : 9 = 34 év,*
Átlagéletkoruk ekkor $315:9=35$ év.	1 pont	*egy év múlva pedig 35 év.*
Összesen:	**4 pont**	

15. b)		
50 + 130 + 40 + 20 = 240, így 1000 Ft kiadás az ábrán ($360:240=$) 1,5º-nak felel meg.	1 pont	*Ezek a pontok járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
A megfelelő középponti szögek: 75º (Rezsi), 195º (Étkezés), 60º (Ruházkodás), 30º (Egyéb).	1 pont	
	2 pont	*1 pont a helyes középponti szögekért, 1 pont a megfelelő jelmagyarázatért jár.*
Összesen:	**4 pont**	

15. c)		
András januárt követően minden hónapban előző havi fizetése 1,02-szorosát kapja.	1 pont	
Éves fizetése: $160\,000+160\,000\cdot 1{,}02+\ldots+160\,000\cdot 1{,}02^{11}$ forint, így egy mértani sorozat első 12 tagját kell összegezni; a sorozat első tagja 160 000, hányadosa 1,02.	2 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

$S_{12} = 160\,000 \cdot \frac{1{,}02^{12} - 1}{1{,}02 - 1} \approx$	1 pont	
$\approx$ 2 145 934 Ft.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó rosszul kerekít vagy nem kerekít. A 2 145 935 Ft is elfogadható válasz.*
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó hónapról hónapra helyesen kiszámolja, majd összegzi a fizetéseket, teljes pontszámot kapjon.

16. a)		
(Az 1. díjcsomaggal Andrea várható havi költsége:) 6000 Ft-ot befizet, de $(3000:15 =)$ 200 perc beszélgetésért nem kell külön fizetnie.	2 pont	
Az előfizetés, a fennmaradó 100 perc és a 40 sms ára: $6000 + 100 \cdot 15 + 40 \cdot 30 =$	1 pont	
= 8700 Ft.	1 pont	
(Az 2. díjcsomaggal Andrea várható havi költsége:) $(8000:25 =)$ 320 percet beszélhet havonta további költség nélkül, így a telefonálásért nem kell majd külön fizetnie.	1 pont	
Mivel az sms-ekért sem kell majd fizetnie,	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért 8000 Ft a teljes költsége.	1 pont	
A 2. díjcsomagot érdemes választania.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

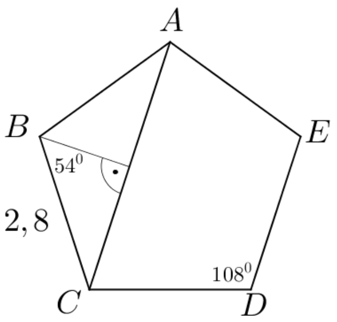
16. b)		
$A(0) = 1{,}5 \cdot 2^2 + 8 =$	1 pont	
$= 14$ óráig üzemel.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

16. c)		
$1{,}5 \cdot 2^{-t+2} + 8 = 12{,}5$	1 pont	
$2^{-t+2} = 3$	1 pont	
$-t + 2 = \log_2 3$	1 pont	$\lg 2^{-t+2} = \lg 3$
$t = 2 - \log_2 3 =$	1 pont	$(-t+2)\lg 2 = \lg 3$
$= 2 - \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx$	1 pont	$t = 2 - \frac{\lg 3}{\lg 2}$
$\approx 0{,}415$ év,	1 pont	
azaz kb. 5 hónap múlva.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. a) **első megoldás**		
Az ötszög belső szögeinek összege: $3 \cdot 180° = 540°$.	1 pont	
Ha a legkisebb szög α, a differencia δ, akkor $S_5 = \frac{2\alpha + 4\delta}{2} \cdot 5 = 540°$	1 pont	
$(\alpha+2\delta)\cdot 5 = 540°$.	1 pont	
$\alpha+2\delta = 108°$,	1 pont	
azaz (a sorozat harmadik tagja,) az ötszög egyik szöge valóban 108°-os.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. a) **második megoldás**		
Az ötszög belső szögeinek összege: $3 \cdot 180° = 540°$.	1 pont	
Ha a középső szög γ, a differencia δ, akkor $S_5 = (\gamma - 2\delta) + (\gamma - \delta) + \gamma + (\gamma + \delta) + (\gamma + 2\delta) = 5\gamma$	1 pont	
$5\gamma = 540°$.	1 pont	
$\gamma = 108°$,	1 pont	
azaz (a sorozat harmadik tagja,) az ötszög egyik szöge valóban 108°-os.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. b)		
Ha a 70° az első tag, akkor $\delta = (108° - 70°):2 = 19°$.	1 pont	
A legnagyobb szög: $108° + 2\cdot 19° = 146°$.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján. (A sokszög szögei: 70°, 89°, 108°, 127°, 146°, amely megfelelő.)	1 pont	
Ha a 70° a második tag, akkor $\delta = 108° - 70° = 38°$,	1 pont	
az ötödik tag (a legnagyobb szög) $108° + 2 \cdot 38° = 184°$,	1 pont	
amely nem lehetséges, mert az ötszög konvex.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. c)		
A szabályos ötszög egy belső szöge: $((3\cdot 180°):5 =)\ 108°$.	2 pont	$180^{\circ}-\frac{360^{\circ}}{5}=108^{\circ}$
Az ötszög egy oldala: $14:5 = 2{,}8$ (cm).	1 pont	
Az *ABC* háromszög egyenlő szárú, így a *B*-ből induló magasság szögfelező, és felezi az *AC* átlót.	1 pont*	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
 $\sin 54° = \frac{\frac{AC}{2}}{2{,}8}$, ahonnan	1 pont*	
AC (= $5{,}6\cdot\sin 54°$) $\approx 4{,}53$ (cm).	1 pont*	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pont az alábbi gondolatmenetért is jár:*

Koszinusztétellel: $AC^2 = 2{,}8^2 + 2{,}8^2 - 2\cdot 2{,}8\cdot 2{,}8\cdot\cos 108^{\circ}$	2 pont	
$AC \approx 4{,}53$ (cm)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. a)		
A háromjegyű szám pontosan akkor kisebb 500-nál, ha az első kihúzott szám 5-nél kisebb (a többi számjegy ezt nem befolyásolja).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kedvező esetek száma 4. (Az első kihúzott szám az 1, 2, 3 vagy 4.)	1 pont	
Az első kihúzott számjegy 9-féle lehet.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{4}{9}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b) első megoldás		
Összesen $9\cdot8\cdot7$-féleképpen húzhat.	1 pont	
P(van 1-es) = 1 – P(nincs 1-es)	2 pont	
$8\cdot7\cdot6$-féleképpen húzhat úgy, hogy nincs a kihúzott számok között 1-es.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $p=1-\frac{8\cdot7\cdot6}{9\cdot8\cdot7}=\frac{1}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. b) második megoldás		
Összesen $9\cdot8\cdot7$-féleképpen húzhat.	1 pont	
Az 1-es mellé $\binom{8}{2}$-féleképpen húzhat másik két számot.	1 pont	*Az 1-es három helyen lehet,*
Minden számhármas esetében 3! = 6-féle sorrend lehetséges.	1 pont	*a másik két szám 8·7-féleképpen rendezhető el.*
A kérdéses valószínűség: $p=\frac{6\cdot\binom{8}{2}}{9\cdot8\cdot7}=$	1 pont	$p=\frac{3\cdot8\cdot7}{9\cdot8\cdot7}=$
$=\frac{1}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. c)		
A háromjegyű szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(Ha szerepel a 9 a számjegyek között, akkor a lehetséges számhármasok:) 9, 8, 1 9, 7, 2 9, 6, 3 9, 5, 4	2 pont	
(Ha nem szerepel a 9 a számjegyek között, akkor a lehetséges számhármasok:) 8, 7, 3 8, 6, 4 7, 6, 5 6, 2, 1 5, 3, 1 4, 3, 2	2 pont	
10-féle számhármas van (a sorrendtől eltekintve).	1 pont	
A számok sorrendje ezekben 3! = 6-féle lehet, így	1 pont	
$(10\cdot6=)$ 60 ilyen számot kaphatott Réka.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	