OKTATÁSKUTATÓ ÉS FEJLESZTŐ INTÉZET

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
TÁMOP-3.1.1-11/1-2012-0001
XXI. századi közoktatás
(fejlesztés, koordináció) II. szakasz

MATEMATIKA

3. MINTAFELADATSOR

EMELT SZINT

2015

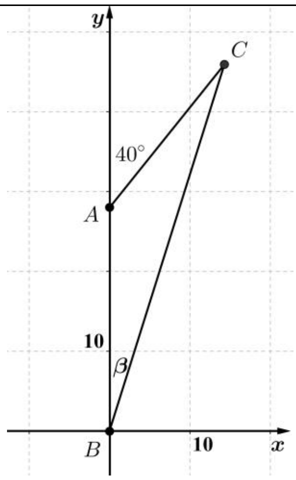
JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

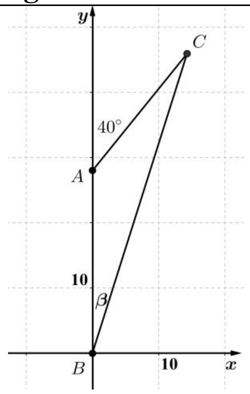
Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc u. 6-8.
Telefon: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 235-7202
www.ofi.hu

SZÉCHENYI 2020
MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

1. a)		
$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$	1 pont	
Az $a = x^2$ helyettesítéssel másodfokú egyenletet kapunk, ennek gyökei: $a_1 = -1$ (ez nem lehetséges, mert $x^2 \geq 0$),	1 pont	
$a_2 = 4$, azaz $x^2 = 4$.	1 pont	
$x_1 = 2$, $x_2 = -2$ a megoldások.	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. b)		
($x \neq 0$. A két oldalt azonos alapra hozzuk:) $\log_2 x^2 + \frac{\log_2 x^2}{\log_2 4} = 9\frac{\log_2 5}{\log_2 8}$,	1 pont	
$\frac{3}{2}\log_2 x^2 = 3\log_2 5 \Leftrightarrow \log_2 x^2 = \log_2 25$.	1 pont	
(A logaritmus definíciója alapján) $x^2 = 25$, $\|x\| = 5$.	1 pont	
$x_1 = 5$, $x_2 = -5$.	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. a) első megoldás		
 Az ábra szerinti jelöléseket alkalmazzuk: az $A(0; 28)$ és $B(0; 0)$ pontokból indulnak a hajók, a találkozási pontot jelölje C; a BAC háromszög A-nál lévő külső szöge $\alpha' = 40°$, így $BAC\angle = \alpha = 140°$; és keressük $ABC\angle = \beta$-t.	1 pont	
$BC = 2AC$, mert azonos idő alatt a második hajó $\left(\frac{w}{v} =\right)$ 2-szer akkora utat tesz meg.	1 pont	
Az ABC háromszögben felírjuk a szinusztételt: $\frac{\sin\beta}{AC} = \frac{\sin\alpha}{BC}$, innen	1 pont	*Vagy: az AC és BC útszakaszok x tengellyel párhuzamos vetülete megegyezik, így* $BC \cdot \sin\beta = AC \cdot \sin\alpha$
$\sin\beta = \frac{AC\sin\alpha}{BC} = \frac{\sin 140°}{2} \approx 0{,}3214$,	1 pont	
$\beta \approx 18{,}7°$ a keresett szög (β hegyesszög).	1 pont	
$ACB\angle = 180° - 140° - 18{,}7° = 21{,}3°$, így $\frac{BC}{\sin 140°} = \frac{BA}{\sin 21{,}3°}$,	1 pont	
$BC = \frac{\sin 140° \cdot 28}{\sin 21{,}3°} \approx 49{,}55$.	1 pont	
A találkozásig eltelt idő $t = \frac{BC}{w} \approx 4{,}13$ óra (kb. 4 óra 8 perc).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

2. a) második megoldás		
 Az ábra szerinti jelöléseket alkalmazzuk: az $A(0; 28)$ és $B(0; 0)$ pontokból indulnak a hajók, a találkozási pontot jelölje C; a BAC háromszög A-nál lévő külső szöge $\alpha' = 40°$, így $BAC\angle = \alpha = 140°$; és keressük $ABC\angle = \beta$-t.	1 pont	
Ha a hajók t idő múlva találkoznak, akkor a találkozásig megtett utak nagysága: $AC = vt = 6t$ és $BC = wt = 12t$.	1 pont	
Az ABC háromszögben felírjuk a koszinusztételt: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha$, $(12t)^2 = 28^2 + (6t)^2 - 2\cdot 28\cdot 6t\cdot\cos 140°$, innen	1 pont	
$108t^2 - 257{,}39t - 784 = 0$	1 pont	
$t_1 \approx 4{,}13$ (óra) a találkozásig eltelt idő ($t_2 < 0$ nem lehetséges).	1 pont	
Az ABC háromszögben felírjuk a szinusztételt: $\frac{\sin\beta}{AC} = \frac{\sin\alpha}{BC}$, innen	1 pont	
$\sin\beta = \frac{AC\sin\alpha}{BC} = \frac{\sin 140°}{2} \approx 0{,}3214$,	1 pont	
$\beta \approx 18{,}7°$ a keresett szög (β hegyesszög).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

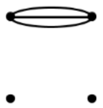
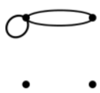
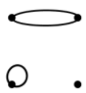
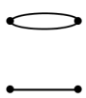
2. b)		
Jelölje x az első hajón utazók létszámát; ekkor a második hajón $x - 18$ utas volt.	1 pont	
Az utasok életkorának összege az első hajón $46x$, a másodikon $38(x - 18)$, a találkozás után együttesen pedig $43(2x - 18)$.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$46x + 38(x - 18) = 43(2x - 18)$, innen	1 pont	
$x = 45$.	1 pont	
Az első hajón 45, a másodikon $45 - 18 = 27$ fő utazott.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a)		
Az egyjegyű prímszámok: 2, 3, 5, 7.	1 pont	
Az 5-tel való oszthatóság miatt a negyedik számjegy 0 vagy 5 lehet.	1 pont	
A négy számjegy összegének 3-mal oszthatónak kell lennie, így negyedik számjegy csak a 0 lehet: $0 + 2 + 3 + 7 = 12$ osztható 3-mal.	1 pont	
Mivel a 0-ra végződő szám 2-vel és 5-tel osztható, ezért a 2, 3 és 7 számjegyekből kell egy 7-tel osztható számot összeállítani.	1 pont	*Más helyes indoklás vagy próbálkozással (pl. 210 többszöröseinek vizsgálatával) megtalált érték is megfelelő.*
A hat lehetséges szám közül csak a 273 osztható 7-tel,	1 pont	
így a 2730 (az egyetlen) megfelelő szám.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3. b)		
Jelölje x a választott számot. Ekkor a négy szám átlaga: $\frac{2+3+7+x}{4} = 3 + \frac{x}{4}$.	1 pont	
A szórás ugyanazon x értékre lesz minimális, amelyre a szórásnégyzet 4-szerese.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat a megoldásból derül ki.*
A számok szórásnégyzetének 4-szerese: $\left(3+\frac{x}{4}-2\right)^2 + \left(3+\frac{x}{4}-3\right)^2 + \left(3+\frac{x}{4}-7\right)^2 + \left(3+\frac{x}{4}-x\right)^2 =$	1* pont	
$= \left(1+\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}-4\right)^2 + \left(3-\frac{3x}{4}\right)^2 =$ $= \frac{3}{4}x^2 - 6x + 26$.	1* pont	
Az $ax^2 + bx + c$ kifejezés ($a \neq 0$) szélsőértékhelye $x = \frac{-b}{2a}$,	2 pont	*Megfelel egyéb indoklás is: függvényábrázolás, teljes négyzetté alakítás, deriválás.*
a szórás tehát $x = \frac{6}{2 \cdot \frac{3}{4}} = 4$ esetén lesz minimális.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*A *-gal jelölt 2 pont a következő gondolatmenetért is megkapható:*

A számok szórásnégyzete $\frac{2^2+3^2+7^2+x^2}{4}-\left(3+\frac{x}{4}\right)^2=$	1 pont	
$=\frac{3}{16}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{26}{4}$	1 pont	

4. a)		
A gráfban van két pont, amelyeket legalább két többszörös él köt össze. A gráf hiányzó, harmadik éle háromféle lehet: többszörös él, hurokél vagy „egyszerű” él.	1 pont	
Ha a hiányzó él többszörös él, akkor csak egy eset lehetséges: két pontot három él köt össze.  1.	1 pont	
Ha a hiányzó él hurokél, akkor ez kiindulhat a többszörös éllel rendelkező pontok valamelyikéből, vagy a másik két pontból. Két esetet kapunk.  2.  3.	2 pont	
Ha pedig a hiányzó él nem többszörös és nem hurokél, akkor kétféle lehet: a másodfokú pontok valamelyikét köti össze egy nulladfokú ponttal, vagy két nulladfokú pontot köt össze.  4.  5. Összesen öt megfelelő gráf van.	2 pont	*Minden (rendszeres vagy rendszertelen) próbálkozással megtalált helyes gráf 1 pontot ér.*
Összesen:	**6 pont**	

4. b)		
Jelölje $x - 1$, x, $x + 1$ a három számot.	1 pont	
Ekkor $x - 6$, x, $x + 24$ egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik eleme, így $(x-6)(x+24)=x^2$.	1 pont	
$x = 8$,	1 pont	
tehát a számtani sorozat elemei: 7, 8, 9.	1 pont	
A mértani sorozat első eleme 2, hányadosára $q^2 = 4$.	1 pont	
(Két lehetséges mértani sorozat van.) Az első esetben $q_1 = 2$,	1 pont	
a második esetben $q_2 = -2$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

5. a)		
Mindegyik lap ötféle színű lehet, így az összes lehetséges színezés száma 5^4.	1 pont	
Nem megfelelőek azok a színezések, amelyek sem kék, sem sárga színt nem tartalmaznak,	2 pont	
ilyenből van 3^4-féle.	1 pont	
$5^4 - 3^4 =$	1 pont	
= 544 a lehetséges színezések száma.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. b) első megoldás		
Különböző eseteket vizsgálunk aszerint, hogy hány kék és hány sárga lapja van a kulcstartónak.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat a megoldásból derül ki.*
Ha egy kék és egy sárga lapja van, akkor a kék lap 4, a sárga lap 3-féleképpen választható, a másik két lap három tetszőleges színnel színezhető,	1 pont	
így a lehetséges esetek száma $4 \cdot 3 \cdot 3^2 = 108$.	1 pont	
Két kék és egy sárga lap esetén a két kék lap $\binom{4}{2}$ (= 6)-féleképpen, az egy sárga lap 2-féleképpen választható ki, a negyedik lap háromféle lehet,	1 pont	
így a lehetséges esetek száma $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$, (és ugyanennyi van abból, amelynek két sárga és egy kék lapja van).	1 pont	
Három kék és egy sárga lap esetén a három kék lap 4-féleképpen választható ki, a negyedik lap színe adott,	1 pont	
így a lehetőségek száma 4, (és ugyanennyi van abból, amelynek három sárga és egy kék lapja van).	1 pont	

Végül két kék és két sárga lapja $\binom{4}{2} = 6$ kulcstartónak lehet.	1 pont	
Ez összesen 108 + 2·36 + 2·4 + 6 =	1 pont	
= 194 különböző színezési lehetőség.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

5. b) második megoldás		
Az a) feladatban kapott eredményt felhasználva azon színezések számát határozzuk meg, amelyekben van kék, de nincs sárga, illetve van sárga, de nincs kék lap.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat a megoldásból derül ki.*
Ha (pontosan) egy kék lap van, akkor ezt 4 lap közül választhatjuk ki, a maradék három lap 3-3 színű lehet (nem lehet sem kék, sem sárga),	1 pont	
így a lehetséges esetek száma $4 \cdot 3^3 = 108$.	1 pont	
Ha (pontosan) két kék lap van, akkor ezeket 4 lap közül $\binom{4}{2}$ (= 6)-féleképpen választhatjuk ki, a maradék két lap 3-3 színű lehet,	1 pont	
így a lehetőségek száma $6 \cdot 3^2 = 54$.	1 pont	
Három kék lapot 4-féleképpen választhatunk, a negyedik lap 3 színű lehet, így a lehetséges esetek száma $4 \cdot 3 = 12$.	1 pont	
Mind a négy lapja 1-féleképpen lehet kék.	1 pont	
Így összesen 108 + 54 + 12 + 1 = 175 olyan színezés van, melyben van kék lap, de nincs sárga.	1 pont	
Ugyanennyi olyan színezés van, amelyben van sárga lap, de nincs kék, így az a) feladatban kapott eredményt felhasználva a kérdéses színezések száma 544 – 2·175 =	1 pont	
= 194.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

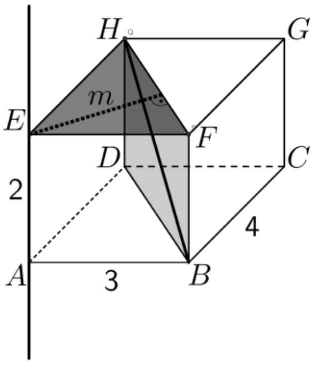
5. b) harmadik megoldás		
Az olyan színezések számát határozzuk meg, amelyekben van kék, de nincs sárga lap.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat a megoldásból derül ki.*
Ezen színezések számát megkapjuk, ha azon színezések számából, melyek nem tartalmaznak sárga lapot, kivonjuk azokat, amelyek nem tartalmaznak sem sárga, sem kék lapot.	2 pont	
A sárga lapot nem tartalmazó színezések száma 4^4,	1 pont	
a sem sárga, sem kék lapot nem tartalmazó színezések száma 3^4,	1 pont	
így a kék lapot igen, de sárgát nem tartalmazó	1 pont	

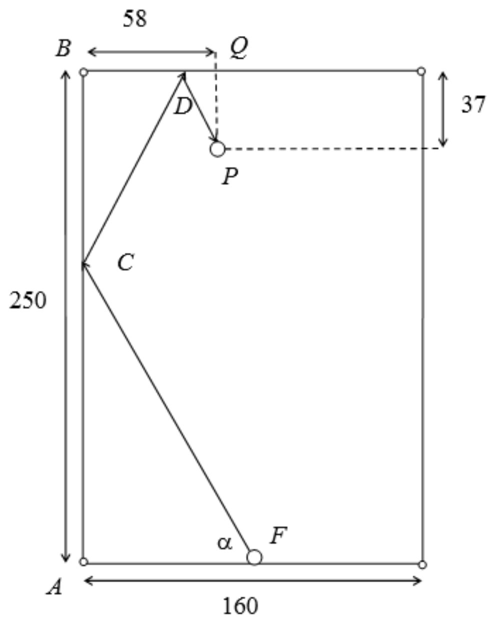
színezések száma $4^4 - 3^4 =$		
$= 175$.	1 pont	
Ugyanennyi olyan színezés van, amelyben van sárga lap, de nincs kék, így az a) feladatban kapott eredményt felhasználva a kérdéses színezések száma $544 - 2\cdot175 =$	2 pont	
$= 194$.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

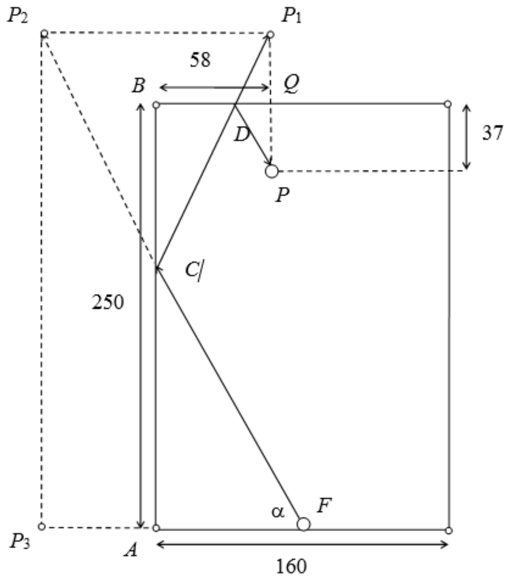
5. b) negyedik megoldás		
A logikai szita-formulát alkalmazzuk.	1 pont	*Ez a két pont jár, ha ez a gondolat a megoldásból derül ki.*
Ha az összes színezési lehetőség számából kivonjuk azokat, amelyek nem tartalmaznak sárga lapot és azokat, amelyek nem tartalmaznak kék lapot, akkor a sem sárga, sem kék lapokat nem tartalmazó színezéseket kétszer vontuk ki.	2 pont	
Így ezek számát a különbséghez egyszer még hozzá kell adni.	1 pont	
A sárga lapot nem tartalmazó színezések száma 4^4,	1 pont	
a kék lapot nem tartalmazó színezések száma szintén 4^4.	1 pont	
A sem sárga, sem kék lapot nem tartalmazó színezések száma 3^4,	1 pont	
így a kék és sárga lapokat is tartalmazó színezések száma $5^4 - 2\cdot4^4 + 3^4$	2 pont	
$= 194$.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

6. a)		
A nagymutató a számlap 12-es pozíciójához képest az utolsó órában $\frac{10}{60}\cdot360° = 60°$-ot fordult el.	1 pont	
A kismutató 6 óra óta $\frac{10}{60}\cdot\frac{1}{12}\cdot360° = 5°$-ot fordult,	1 pont	
a két mutató által bezárt szög $\frac{6}{12}\cdot360° + 5° - 60° =$ $= 125°$.	1 pont	
Jelölje d a keresett távolságot. Felírjuk a koszinusztételt: $d^2 = 92^2 + 56^2 - 2\cdot92\cdot56\cdot\cos125°$, innen	1 pont	
$d \approx 132{,}3$ cm a mutatók végpontjainak távolsága.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. b)		
$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta\cos\beta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \sin(2\beta)$.	1 pont	
Az egyenlet akkor teljesül, ha $\alpha = \beta$ (+ $k\cdot360°$, $k \in \mathbf{Z}$)	1 pont	
vagy $2\alpha = 180° - 2\beta$ (+ $l\cdot360°$, $l \in \mathbf{Z}$), azaz	1 pont	
$\alpha + \beta = 90°$. (És ekkor $\gamma = 90°$.)	1 pont	
Az állítás nem igaz,	1 pont	
α és β pótszögek is lehetnek egy nem egyenlő szárú derékszögű háromszögben.	1 pont	*A teljes pontszám egyetlen megtalált (helyes) ellenpéldáért is jár.*
Összesen:	**6 pont**	

6. c)		
 *AE* és *BH* kitérő egyenesek. *AE*-t eltoljuk például *BF*-be, *AE* és az így kapott (*BFH*) sík párhuzamosak. *AE* és *BH* távolsága megegyezik *AE* és a (*BFH*) sík távolságával, azaz meghatározandó *AE* és a (*BFHD*) sík távolsága.	1 pont	
„Felülnézetből” tekintve ez a távolság az *FEH* (derékszögű) háromszög *E*-ből húzott magasságának *m* hosszával egyenlő.	1 pont	
Az *FEH* háromszög területét kétféleképpen írjuk fel: $\frac{FH \cdot m}{2} = \frac{EH \cdot EF}{2}$,	1 pont	
$m = \frac{EH \cdot EF}{FH} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$	1 pont	
= 2,4 egység a keresett távolság.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. a) első megoldás		
 Az ábrán látható módon jelölje *A* és *B* az asztal két sarokpontját, *C* és *D* a két ütközési pontot, *Q* pedig *P* merőleges vetületét. A beesési és visszaverődési szögek egyenlősége miatt $ACF\angle = BCD\angle =$ $= 90° - \alpha$, $BDC\angle = PDQ\angle = \alpha$. (*FC* és *PD* párhuzamosak.)	1 pont	
Legyen $AC = x$, $DQ = y$. Az *FAC* háromszögben $\text{tg}\,\alpha = \frac{x}{80}$,	1 pont	*Hivatkozás hasonló háromszögekre:* $\frac{x}{80} = \frac{250-x}{58-y} = \frac{37}{y}$
a *CBQ* háromszögben $\text{tg}\,\alpha = \frac{250-x}{58-y}$,	1 pont	
a *DQP* háromszögben pedig $\text{tg}\,\alpha = \frac{37}{y}$.	1 pont	
Az első és harmadik egyenletből $x = \frac{37\cdot 80}{y}$,	1 pont	
a második és harmadik összevetéséből $\frac{250 - \frac{37\cdot 80}{y}}{58-y} = \frac{37}{y}$, innen	1 pont	
$y = \frac{37\cdot 138}{287}$	1 pont	
$\text{tg}\,\alpha = \frac{37}{y} = \frac{287}{138}$.	1 pont	
$\alpha \approx 64{,}3°$ a kérdéses szög.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. a) második megoldás		
 Az ábrán látható módon jelölje A és B az asztal két sarokpontját, C és D a két ütközési pontot, Q pedig P merőleges vetületét. A beesési és visszaverődési szögek egyenlősége miatt $ACF\angle = BCD\angle =$ $= 90° - \alpha$, $BDC\angle = PDQ\angle = \alpha$. ($FC$ és PD párhuzamosak.)	1 pont	
Tükrözzük P-t az asztal felső szélére, így kapjuk a P_1 pontot; P_1-et tükrözzük az asztal bal szélére, így kapjuk P_2-t. Jelölje végül P_2 merőleges vetületét az asztal alsó szélére P_3 (ábra).	2 pont	
A beesési és visszaverődési szögek egyenlősége miatt C, D, P_1, valamint F, C, P_2 egy egyenesbe esik.	2 pont	
$P_3P_2 = 250 + 37 = 287$, $FP_3 = 80 + 58 = 138$.	2 pont	
a P_3P_2F háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{287}{138}$,	1 pont	
$\alpha \approx 64{,}3°$ a kérdéses szög.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. b)		
A binomiális eloszlás modelljét alkalmazzuk. Egy adott játszmában András nyerési esélye $p = \frac{3}{5} = 0{,}6$, Béla nyerési esélye $1 - p = 0{,}4$.	1 pont	
($P(x)$ jelentse annak a valószínűségét, hogy András x játszmát nyer meg a 6-ból.) $P(4) = \binom{6}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^2$,	1 pont	

hasonlóan $P(5)=\binom{6}{5}\cdot 0{,}6^5\cdot 0{,}4$ és $P(6)=0{,}6^6$.	2 pont	
Annak valószínűsége, hogy András 3-nál többször győz: $P(4) + P(5) + P(6) =$	1 pont	
$=\binom{6}{4}\cdot 0{,}6^4\cdot 0{,}4^2+\binom{6}{5}\cdot 0{,}6^5\cdot 0{,}4+0{,}6^6\ = 0{,}54432$,	1 pont	
melynek értéke a kért kerekítéssel 0,54.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

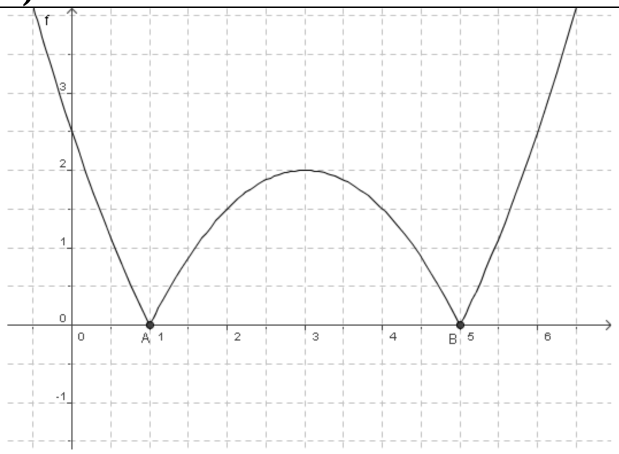
8. a) első megoldás		
A sorozat néhány kezdeti értékét kifejezzük a_1-gyel: $a_1 = 1$, $a_2=2a_1+1$, $a_3=2(2a_1+1)+1=2^2a_1+2+1$, $a_4=2(2^2a_1+2+1)+1=2^3a_1+2^2+2+1$ stb.	2 pont	
A sorozat képzési szabályának ismételt felhasználásából adódik, hogy $a_n=2^{n-1}a_1+2^{n-2}+2^{n-2}+\ldots+2^2+2+1$.	2 pont	
Mivel $a_1 = 1$, így $a_n=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-2}+\ldots+2^2+2+1$.	1 pont	
A mértani sorozat összegképletét alkalmazzuk (a hányados értéke 2): $a_n=a_1\cdot\frac{2^n-1}{2-1}$	1 pont	
$=2^n-1$.	1 pont	
Ezzel az állítást beláttuk.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. a) második megoldás		
A moszat ágainak számára vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk. Kezdetben 1 ág van, és ez egyenlő $a_1 = 2^1 - 1$-gyel.	1 pont	
Tegyük fel, hogy a képlet $n = k$ esetén teljesül, azaz $a_k = 2^k - 1$.	1 pont	
Ekkor igazolandó, hogy az összefüggés $n = k + 1$ esetére is „öröklődik”, azaz $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.	2 pont	
A rekurzív összefüggés miatt $a_{k+1} = 2\cdot a_k + 1 =$	1 pont	
$2\cdot(2^k-1)+1=2^{k+1}-2+1=2^{k+1}-1$. (Felhasználtuk az indukciós feltevést.)	2 pont	
Az igazolandó $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ összefüggést kaptuk, ezzel az állítást beláttuk.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. a) harmadik megoldás		
A moszatot olyan gráffal modellezzük, melynek élei a moszat ágai, csúcsai az ágak végpontjai. A moszat gráfja összefüggő és körmentes, tehát (gráfelméleti) fa.	2 pont	
Néhány kezdeti időegységben a gráf csúcsainak száma: $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 8$ stb.	1 pont	
A gráf képzési szabályának ismételt alkalmazásából következik, hogy a csúcsok száma minden időegység alatt megkétszereződik. (A növekedést úgy is szemléltethetjük, mintha minden csúcsból egy új ág indulna ki.)	2 pont	*Alkalmazhatunk a csúcsok számára vonatkozó teljes indukciót is.*
Mivel $c_1 = 2$, így $c_n = 2^n$.	1 pont	
Mivel a moszat gráfja fa, éleinek száma $a_n = c_n - 1$,	1 pont	
így $a_n = 2^n - 1$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. b)		
$a_n = 2^n - 1 = 800 \Leftrightarrow 2^n = 801$.	1 pont	
A logaritmus definíciója alapján $n = \log_2 801 = \frac{\lg 801}{\lg 2} \approx$	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a 2 egész kitevőjű hatványainak ismeretében megállapítja, hogy 9 < n < 10.*
$\approx 9{,}64$,	1 pont	
így a moszat ágainak száma a 10. időegység végére éri el a 800-at.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. c)		
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^{n-3} - 17} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^{n-3} - 17}$.	1 pont	
(Minden tagot osztunk 2^{n-3}-nal:) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^3 - \frac{1}{2^{n-3}}}{1 - \frac{17}{2^{n-3}}}$.	1 pont	
A két konstans tagon kívüli tagok 0-hoz tartanak, így	1 pont	
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^{n-3} - 17} = 2^3 = 8$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. a)		
 A h függvény zérushelyei: $0{,}5\lvert x^2-6x+5\rvert=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$, innen $x_1=1,\ x_2=5$.	2 pont	
A keresztmetszet grafikonja a [0; 1] intervallumon az $x \mapsto 0{,}5\left(x^2-6x+5\right)$ függvény, az [1; 5] intervallumon az $x \mapsto -0{,}5\left(x^2-6x+5\right)$ függvény.	1 pont	
A keresztmetszet területe: $\int_0^1 0{,}5\left(x^2-6x+5\right)dx\ +$ $\int_1^5 -0{,}5\left(x^2-6x+5\right)dx=$	2 pont	
$\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x\right]_1^5=$	2 pont	
$\frac{1}{6}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-\frac{125}{6}+\frac{75}{2}-\frac{25}{2}+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$ = 6,5 (m^2).	2 pont	
A 9 méteres szakasz térfogata $9\cdot 6{,}5=58{,}5$ (m^3),	1 pont	
ami a kért pontossággal 59 m^3.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

9. b)		
$h(4)=1{,}5$.	1 pont	
Az $x \mapsto -0{,}5\left(x^2-6x+5\right)$ függvény	1 pont	
deriváltja $-x+3$,	1 pont	
a (4; 1,5) pontba húzott érintő meredeksége $-4+3=-1$.	1 pont	
Az érintő egyenlete: $y-1{,}5=-(x-4)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	