Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
TÁMOP-3.1.1-11/1-2012-0001
XXI. századi közoktatás
(fejlesztés, koordináció) II. szakasz

MATEMATIKA

2. MINTAFELADATSOR

EMELT SZINT

2015

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc u. 6-8.
Telefon: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 235-7202
www.ofi.hu

SZÉCHENYI 2020
Európai Unió
Európai Szociális Alap
MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

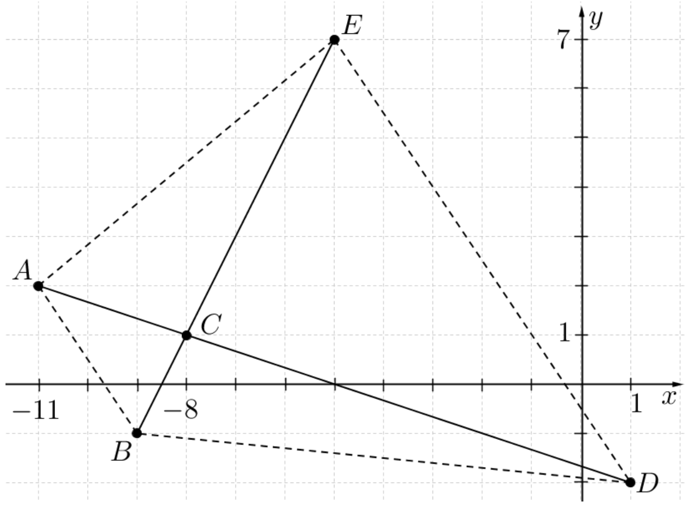
1. a)		
Az $a = \sin x$ helyettesítéssel $2a^2 - 5a - 3 = 0$ $(-1 \le a \le 1)$.	1 pont	
Az egyenlet gyökei: $a_1 = -0{,}5$; $a_2 = 3$.	1 pont	
$a_2 = 3$ nem megoldás, mert $-1 \le a \le 1$.	1 pont	
Ha $\sin x = -0{,}5$, akkor $x_1 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, vagy	1 pont	
$x_2 = \frac{11\pi}{6} + l \cdot 2\pi$, ahol $l \in \mathbf{Z}$.	1 pont	
Ekvivalens átalakításokra hivatkozás vagy behelyettesítés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. b)		
$2x - 6 \ge 0$, innen $x \ge 3$.	1 pont	
Ekkor $\lvert x-2 \rvert = x - 2$.	1 pont	
$\sqrt{2x-6} + x - 2 = 1$, azaz $\sqrt{2x-6} = 3 - x$.	1 pont	
Az egyenlet bal oldalán nemnegatív szám áll, így $3 - x \ge 0$, azaz $3 \ge x$.	1 pont	*Négyzetre emelve és rendezve:* $x^2 - 8x + 15 = 0$.
A két feltételt egybevetve $x = 3$ lehet csak.	1 pont	$x_1 = 5$, ami nem megoldás
Ellenőrzés: $\sqrt{2 \cdot 3 - 6} + \lvert 3-2 \rvert = 1$ teljesül, az egyenlet megoldása $x = 3$.	1 pont	$x_2 = 3$, ami megoldás
Összesen:	**6 pont**	

2. a)		
Jelölje a, b, c rendre a három kisváros felnőtt lakóinak számát. Ekkor az **A**, **B**, **C** városokban lakók testmagasságainak összege cm-ben mérve $168{,}2a$; $167{,}9b$ és $167{,}2c$.	1 pont	
Az **A** és **B** lakók együttes testmagassága $\frac{168{,}2a + 167{,}9b}{a+b} = 168{,}0$,	1 pont	
ahonnan $b = 2a$.	1 pont	
Az **A** és **C** lakók együttes testmagassága $\frac{168{,}2a + 167{,}2c}{a+c} = 167{,}8$,	1 pont	
ahonnan $c = \frac{2}{3}a$.	1 pont	
Az összes lakó átlagos testmagassága: $\frac{168{,}2a + 167{,}9b + 167{,}2c}{a+b+c} =$	1 pont	

$\dfrac{168{,}2a + 167{,}9 \cdot 2a + 167{,}2 \cdot \frac{2}{3}a}{a + 2a + \frac{2}{3}a}$		
$\approx 167{,}85$.	1 pont	
A három kisváros lakóinak átlagos testmagassága a kért pontossággal 167,9 cm.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít, vagy ha nem ír mértékegységet, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**8 pont**	

2. b)		
Két esetet különböztetünk meg annak alapján, hogy a **B** város lakója rendszeresen sportol vagy sem.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(Annak valószínűsége, hogy a **B** város lakója sportol: 0,15; annak valószínűsége, hogy nem sportol: 0,85.) Az **A** város lakóinak esetében a kérdéses valószínűségeket a binomiális eloszlás képletének segítségével számoljuk ki, ahol annak valószínűsége, hogy egy lakó rendszeresen sportol: 0,2.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak valószínűsége, hogy az egyik sportoló a **B**, a másik sportoló pedig az **A** városból való: $0{,}15 \cdot \binom{5}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4$ ($\approx 0{,}0614$).	2 pont	
Annak valószínűsége, hogy mindkét sportoló az **A** városból való: $0{,}85 \cdot \binom{5}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3$ ($\approx 0{,}1741$).	2 pont	
A kérdezett esemény valószínűsége a két valószínűség összege:	1 pont	
$\approx 0{,}2355$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	



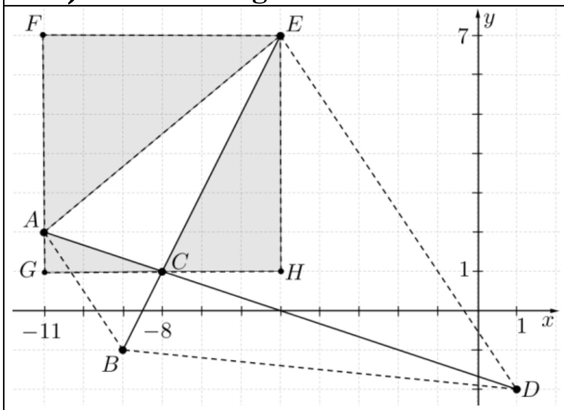
3. a) **első megoldás**		
A C pont az AD szakasz A-hoz közelebbi negyedelő pontja, így $\underline{c} = \frac{3\underline{a} + \underline{d}}{4}$,	1 pont	
$\underline{d} = 4\underline{c} - 3\underline{a} = 4\cdot(-8;\ 1) - 3\cdot(-11;\ 2) = (1;\ -2)$.	1 pont	
Hasonlóan $\underline{e} = 4\underline{c} - 3\underline{b}$	1 pont	
$= 4\cdot(-8;\ 1) - 3\cdot(-9;\ -1) = (-5;\ 7)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. a) **második megoldás**		
$\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{CA} = -3\cdot(\underline{a} - \underline{c}) = (9;\ -3)$, így	1 pont	
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = (-8;\ 1) + (9;\ -3) = (1;\ -2)$.	1 pont	
Hasonlóan $\overrightarrow{CE} = -3\overrightarrow{CB} = -3\cdot(\underline{b} - \underline{c}) = (3;\ 6)$,	1 pont	
$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE} = (-8;\ 1) + (3;\ 6) = (-5;\ 7)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. b) **első megoldás**		
(A, C, D egy egyenesre esik, így meghatározandó $BAC\angle = BAD\angle = \varphi$.) $AC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.	2 pont	
(A BAC háromszögben felírjuk a koszinusz-tételt:) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\varphi$, innen $\cos\varphi = \frac{13 + 10 - 5}{2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}}$ ($\approx 0{,}7894$),	1 pont	
$\varphi \approx 37{,}9°$ a keresett szög.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. b) második megoldás		
$\overrightarrow{AC}=\underline{c}-\underline{a}=(3;-1)$, $\overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}=(2;-3)$	1 pont	
(A vektorok skaláris szorzatát kétféleképpen számítjuk ki:) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=(3;-1)\cdot(2;-3)=6+3=9$,	1 pont	
$\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}=\dfrac{9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}}$ (≈ 0,79),	1 pont	
φ ≈ 37,9° a keresett szög.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. c) első megoldás		
Legyen $ACE\angle = BCD\angle = \alpha$ (csúcsszögek).		
A trigonometrikus területképletből $T_{ACE}=\dfrac{CA\cdot CE\cdot\sin\alpha}{2}$, $T_{BCD}=\dfrac{CB\cdot CD\cdot\sin\alpha}{2}$.	1 pont	
Igazolandó tehát, hogy $CA\cdot CE=CB\cdot CD$.	1 pont	
$CA=\sqrt{10}$, $CB=\sqrt{5}$, $CE=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}$, $CD=\sqrt{3^2+9^2}=\sqrt{90}$.	2 pont	*A hasonlósági transzformáció miatt: CD = 3CA és CE = 3CB.*
$\sqrt{10}\cdot\sqrt{45}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{90}$ valóban teljesül.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó kerekített értékek felhasználásával igazolja az egyenlőséget.*
Összesen:	**5 pont**	

3. c) második megoldás		
 (Az *ACE* háromszög területét kiszámíthatjuk pl. úgy, hogy az ábra szerinti *EFGH* bennfoglaló téglalap területéből levonjuk a három kiegészítő derékszögű háromszög területét.) $T_{ACE}=T_{EFGH}-T_{GCA}-T_{CHE}-T_{EFA}=$ $=6\cdot6-\dfrac{1\cdot3}{2}-\dfrac{3\cdot6}{2}-\dfrac{6\cdot5}{2}=$	1 pont	
= 10,5 (területegység).	1 pont	

Hasonlóan $T_{BCD} = 10\cdot 3 - \frac{1\cdot 2}{2} - \frac{1\cdot 10}{2} - \frac{3\cdot 9}{2}$	1 pont	
= 10,5 (területegység).	1 pont	
A két háromszög területe valóban egyenlő.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. c) harmadik megoldás		
Az $ABDE$ négyszög trapéz,	1 pont	
mert a középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonsága miatt AB és DE párhuzamos.	1 pont	
$T_{ABE} = T_{ABD}$, mert a két háromszög alapja megegyezik, és magasságuk is egyenlő.	1 pont	
Mindkét területet csökkentjük T_{ABC} -vel,	1 pont	
így $T_{ACE} = T_{BCD}$ valóban. („Ha egyenlőkből egyenlőt veszünk el, egyenlők maradnak.”)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

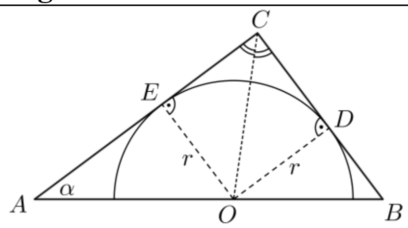
4. a)		
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x + 3)^2 + 1 =$	1 pont	
$= 4x^2 + 12x + 10$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4. b) első megoldás		
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x^2 + 1) + 3$ $(= 2x^2 + 5)$	1 pont	
$(g \circ f)(1) = 7$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

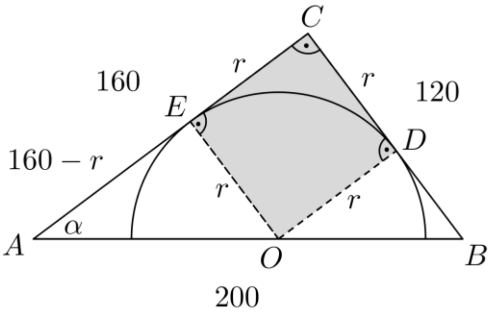
4. b) második megoldás		
$f(1) = 1^2 + 1 = 2$	1 pont	
$g(f(1)) = g(2) = 2\cdot 2 + 3 = 7$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

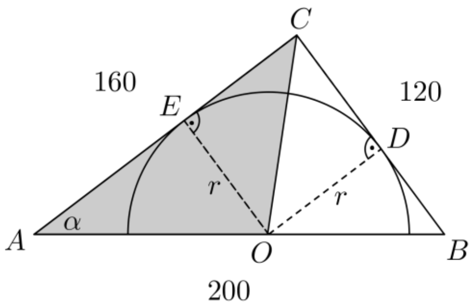
4. c)		
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g}{f} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{x+\frac{1}{x}} =$	1 pont	
= 0 a határérték, mert a számláló 2-höz, míg a nevező a végtelenhez tart.	1 pont	*Kevésbé részletezett indoklás is elfogadható.*
$\left\lvert \frac{2x+3}{x^2+1} \right\rvert = \frac{2x+3}{x^2+1} < \frac{1}{100}$ (feltehető, hogy x pozitív),	1 pont	
innen $0 < x^2 - 200x - 299$.	1 pont	
A pozitív zérushely $x \approx 201{,}48$,	1 pont	
az ennél nagyobb egész számok, pl. $x_0 = 202$, megfelelnek küszöbértéknek.	1 pont	*Bármilyen helyes becslés is elfogadható, pl. 200x + 300 <*

		x^2 + 1 egyenlőtlenség megoldása próbálgatással.
Összesen:	**6 pont**	

5. a) első megoldás		
 A háromszög alakú bútorlap csúcsait jelölje *A*, *B*, *C*; az oldalak hossza *AB* = 200 cm, *BC* = 120 cm és *AC* = 160 cm. A maximális sugarú félkör érinti az *AC* és *BC* oldalakat. Jelölje a félkör középpontját *O*, az érintési pontokat *D* és *E* (ábra). Az *OE* és *OD* sugarak merőlegesek a megfelelő érintőkre.	1 pont	*Ez a pont a megfelelő ábráért (is) jár.*
OE = *OD*, így *CO* belső szögfelező.	1 pont	
A szögfelezőtételből $\frac{AO}{OB}=\frac{AC}{CB}=\frac{160}{120}$, innen	1 pont	
$AO=\frac{AC}{AC+BC}\cdot AB = \frac{800}{7}$.	1 pont	
A koszinusztétellel meghatározzuk $CAB\angle$ = α-t: $\cos\alpha=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2\cdot AC\cdot AC}$ (= 0,8), innen	1 pont	
$\alpha \approx 36{,}9°$.	1 pont	
Az *AOE* derékszögű háromszögből $\sin\alpha=\frac{EO}{AO}$, $EO = r = AO\cdot\sin\alpha \approx 68{,}57$ (cm).	1 pont	*A* $\sin\alpha$ *= 0,6 pontos értékkel:* $EO=\frac{480}{7}$.
Az asztallap sugara az előírt pontossággal 68 cm.	1 pont	*Mértékegység nélküli válaszért nem jár pont.*
Összesen:	**8 pont**	

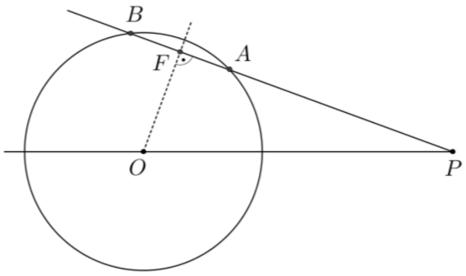
5. a) második megoldás		
A háromszög alakú bútorlap csúcsait jelölje *A*, *B*, *C*; az oldalak hossza *AB* = 200 cm, *BC* = 120 cm és *AC* = 160 cm. A maximális sugarú félkör érinti az *AC* és *BC* oldalakat. Jelölje a félkör középpontját *O*, az érintési pontokat *D* és *E* (ábra). Az *OE* és *OD* sugarak merőlegesek a megfelelő érintőkre.	1 pont	*Ez a pont a megfelelő ábráért (is) jár.*

		
Mivel $200^2 = 120^2 + 160^2$,	1 pont	
a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög derékszögű, $ACB\angle = 90°$.	1 pont	
CEOD négyzet, mert három derékszöge van, és *OE* = *OD*.	1 pont	
CE = *CD* = *r*, *így AE* = 160 – *r*.	1 pont	
AEO és *ACB* hasonló derékszögű háromszögek (szögeik egyenlők), így $\frac{BC}{CA} = \frac{OE}{EA} = \frac{r}{CA-r}$, innen	1 pont	
$r = \frac{480}{7}$ (≈ 68,57).	1 pont	
Az asztallap sugara az előírt pontossággal 68 cm.	1 pont	*Mértékegység nélküli válaszért nem jár pont.*
Összesen:	**8 pont**	

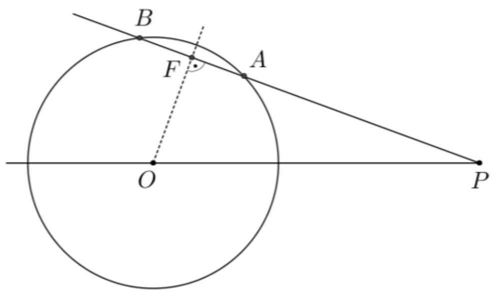
5. a) harmadik megoldás		
A háromszög alakú bútorlap csúcsait jelölje *A*, *B*, *C*; az oldalak hossza *AB* = 200 cm, *BC* = 120 cm és *AC* = 160 cm. A maximális sugarú félkör érinti az *AC* és *BC* oldalakat. Jelölje a félkör középpontját *O*, az érintési pontokat *D* és *E* (ábra). Az *OE* és *OD* sugarak merőlegesek a megfelelő érintőkre. 	1 pont	*Ez a pont a megfelelő ábráért (is) jár.*
Az *ABC* háromszög *T* területét az *AOC* és *BOC* háromszögek területének összegeként írjuk fel.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T = \frac{AC \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2}$, innen $r = \frac{2T}{AC+BC}$.	1 pont	
(A háromszög területét kiszámolhatjuk pl. Héron képletéből.) A háromszög fél kerülete $s = \frac{AB+BC+AC}{2} = 240$.	1 pont	

Héron képletéből $T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{240\cdot120\cdot80\cdot40}$	1 pont	
= 9600,	1 pont	
így $r=\dfrac{19200}{160+120}=\dfrac{480}{7}$.	1 pont	
Az asztallap sugara az előírt pontossággal 68 cm.	1 pont	*Mértékegység nélküli válaszért nem jár pont.*
Összesen:	**8 pont**	

5. b) első megoldás

 Legyen $OPA\angle=\varphi$, és jelölje az AB húr felezőpontját F. OF merőleges az AB húrra, meghatározandó OF hossza.	1 pont	*Ez a pont a megfelelő ábráért (is) jár.*
Az OPA háromszögben felírjuk a koszinusz-tételt: $OA^2=OP^2+PA^2-2\cdot OP\cdot PA\cdot\cos\varphi$,	1 pont	
innen $\cos\varphi=\dfrac{OP^2+PA^2-OA^2}{2\cdot OP\cdot PA}=\dfrac{13^2+10^2-5^2}{2\cdot13\cdot10}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}9385$.	1 pont	
$\varphi\approx20{,}2°$	1 pont	
Az OPF derékszögű háromszögben $\sin\varphi=\dfrac{OF}{OP}$,	1 pont	
$OF=OP\cdot\sin\varphi\approx$	1 pont	
≈ 4,49 cm a keresett távolság.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

5. b) második megoldás

 Jelölje az AB húr felezőpontját F. OF merőleges az AB húrra, meghatározandó OF hossza.	1 pont	*Ez a pont a megfelelő ábráért (is) jár.*
Az adott P pontból a körhöz húzott szelőszakaszok szorzata állandó,	1 pont	
a szorzat értéke $(PO+r)(PO-r)=(13+5)(13-5)$	1 pont	

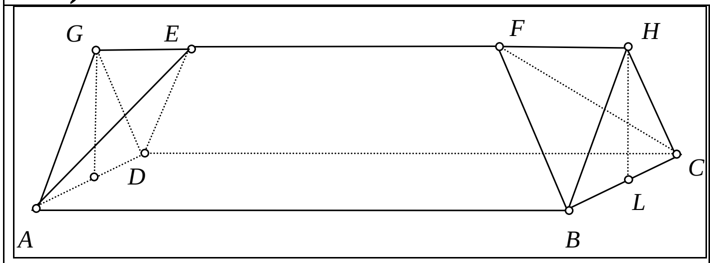
= 144.	1 pont	
$PA \cdot PB = 10 \cdot (10 + AB) = 100 + 10 \cdot AB = 144$, innen	1 pont	
$AB = 4{,}4$ (cm).	1 pont	
$AF = 2{,}2$, így a PFO derékszögű háromszögből $OF = \sqrt{PO^2 - PF^2} = \sqrt{13^2 - 12{,}2^2}$	1 pont	
$\approx 4{,}49$ cm a keresett távolság.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. a)		
Az $M: t \mapsto t^2(12 - t)$ függvény maximumát keressük, ha $0 < t \le 12$.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az $M: t \mapsto t^2(12 - t)$ függvény deriváltja $(12t^2 - t^3)' = 24t - 3t^2$.	1* pont	
A derivált zérushelyei $t_1 = 8$ és $t_2 = 0$.	1* pont	
$t_2 = 0$ nem megoldása a feladatnak.	1* pont	
A $t_1 = 8$ helyen a deriváltfüggvény előjelet vált, pozitívból negatívba,	1* pont	*Megfelelő a harmadfokú függvény tulajdonságainak (pl. ábrázolás segítségével történő) vizsgálata vagy a második derivált előjelére való hivatkozás is.*
így ezen a helyen a függvénynek maximuma van.	1* pont	
Bonifác mesternek tehát 8 órát érdemes fizikai munkával töltenie, és 4 órát pihenéssel.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*A *-gal jelölt 5 pont a következő gondolatmenetért is megkapható:*

A függvény 2-szeresének, $2M = t^2(24 - 2t)$-nek ugyanaz a maximumhelye (ha van).	1 pont	
A három tagra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt $\sqrt[3]{t \cdot t \cdot (24 - 2t)} \le \frac{t + t + (24 - 2t)}{3}$,	1 pont	
azaz $\sqrt[3]{2M} \le 8$, ahonnan $M \le 256$.	1 pont	
Az M függvénynek tehát felső korlátja van.	1 pont	
Egyenlőség (függvénymaximum) akkor lehetséges, ha $t = 24 - 2t$, azaz $t = 8$.	1 pont	

6. b)		
A tíz zsömle megvásárlása után a kiflik és zsömlék száma megegyezik. Jelöljük ezt a számot x-szel.	1 pont	
Kezdetben x kifli és $x + 10$ zsömle került a polcra. Ekkor két kifli $\binom{x}{2}$-féleképpen választható,	1 pont	
két péksütemény összes választási lehetősége $\binom{2x+10}{2}$,	1 pont	
innen $\dfrac{\binom{x}{2}}{\binom{2x+10}{2}} = \dfrac{3}{29}$.	1 pont	
Az egyenletből $29 \cdot \dfrac{x(x-1)}{2} = 3 \cdot \dfrac{(2x+10)(2x+9)}{2}$,	1 pont	
$17x^2 - 143x - 270 = 0$.	1 pont	
$x_1 = 10$, $x_2 = -\dfrac{27}{17}$, ami nem lehetséges.	1 pont	
Kezdetben tehát 10 kifli volt a polcon.	1 pont	
Ellenőrzés: Ha kezdetben 10 kifli és 20 zsömle van a polcon, akkor a két kifli vásárlásának valószínűsége $\dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{30}{2}} = \dfrac{10 \cdot 9}{30 \cdot 29} = \dfrac{3}{29}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. a)		
 A tetőtéralak térfogatát például úgy számítjuk ki, hogy a kiegészítő hasáb térfogatából kivonjuk a két végénél lemetszett gúlák térfogatát.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az EF szakaszt mindkét irányban szimmetrikusan meghosszabbítjuk úgy, hogy az így kapott GH szakasz hossza megegyezzen AB (és CD) hosszával. Ekkor a $BCHADG$ háromszög alapú egyenes hasáb keletkezik; az AB, CD, GH alkotók merőlegesek a BCH és ADG lapokra.	1 pont	*Ez a pont a megfelelő ábráért (is) jár.*

$FH = \dfrac{AB - EF}{2} = 1{,}6$ (m),	1 pont	
$FHB\angle = 90°$ (, mert FH merőleges a BCH síkra.)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az FHB derékszögű háromszögben $BH = \sqrt{BF^2 - FH^2} = \sqrt{5{,}8^2 - 1{,}6^2} \approx 5{,}57$ (m).	1 pont	
A BHC háromszög egyenlő szárú, $BH = HC$. Jelölje L a BC szakasz felezőpontját; ekkor HL merőleges a BC oldalra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A BLH derékszögű háromszögben $LH = \sqrt{BH^2 - BL^2} = \sqrt{5{,}8^2 - 1{,}6^2 - 4^2} \approx 3{,}88$ (m).	1 pont	
$T_{BCH} = \dfrac{BC \cdot LH}{2} = \dfrac{8 \cdot 3{,}88}{2} \approx 15{,}52$ (m²).	1 pont	
A $BCHF$ és $ADGE$ gúlák egybevágók, így a térfogat $V = T_{BCH} \cdot AB - 2 \cdot \dfrac{T_{BCH} \cdot HF}{3} = \left(T_{BCH} \cdot \left(AB - \dfrac{2 \cdot HF}{3}\right)\right) \approx 138{,}65$ (m³).	1 pont	
A tetőtér térfogata a kért pontossággal 139 m³.	1 pont	*Mértékegység nélküli válaszért nem jár pont.*
Összesen:	**10 pont**	

7. b)		
$T_k = -5$ °C a külső környezet hőmérséklete.	1 pont	
A folyamat kezdetekor $t = 0$; $0{,}9^{\frac{t}{3}} = 1$, és ekkor a belső hőmérséklet $T = 15$ °C.	1 pont	
Behelyettesítés után $15 = -5 + A$, innen $A = 20$ (°C). (A lehűlési képlet: $T = -5 + 20 \cdot 0{,}9^{\frac{t}{3}}$.)	1 pont	
A kritikus hőmérséklet elérésének idejét a $3 = -5 + 20 \cdot 0{,}9^{\frac{t}{3}}$ egyenletből határozhatjuk meg.	1 pont	
$0{,}4 = 0{,}9^{\frac{t}{3}}$, mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve $\dfrac{t}{3} = \dfrac{\lg 0{,}4}{\lg 0{,}9}$.	1 pont	
Innen $t \approx 26{,}09$, tehát kb. 26 óra múlva hűl le +3 °C-ra a tetőtér.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. a)		
$(2x-3)^8 = 256 \Leftrightarrow \lvert 2x-3 \rvert = 2$.	1 pont	
Ha $2x - 3 = 2$, akkor $x_1 = 2{,}5$;	1 pont	
ha $2x - 3 = -2$, akkor $x_2 = 0{,}5$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. b)		
A binomiális tételt alkalmazzuk. $(2x-3)^8 =$ $(2x)^8 + \binom{8}{1}(2x)^7\cdot(-3) + \binom{8}{2}(2x)^6\cdot(-3)^2 + \ldots$ $+\binom{8}{7}(2x)^1\cdot(-3)^7 + \binom{8}{8}\cdot(-3)^8$	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az x^5 a $\binom{8}{3}(2x)^5\cdot(-3)^3$ tagban szerepel;	1 pont	
az együtthatója –48 384.	2 pont	*Előjelhiba esetén 1 pont jár.*
Összesen:	**4 pont**	

8. c) első megoldás		
n-re vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk. Az állítás $n = 1$-re igaz: $a_1 = 0$ osztható 9-cel.	1 pont	*Ez a pont megadható, ha a vizsgázó az $n = 0$ kezdőértéket ellenőrzi.*
Tegyük fel, hogy az állítás $n = k$-ra igaz, azaz $a_k = 4^k - 3k - 1$ osztható 9-cel.	1 pont	
Az indukciós feltevést felhasználva igazolnunk kell, hogy az állítás $n = (k + 1)$-re is igaz, azaz a_{k+1} is osztható 9-cel.	1 pont	
$a_{k+1} - a_k = 4^{k+1} - 3(k+1) - 1 - (4^k - 3k - 1) =$ $= 4\cdot 4^k - 3k - 4 - (4^k - 3k - 1) = 3\cdot 4^k - 3 =$	1* pont	
$= 3\cdot(4^k - 1)$.	1* pont	
4^k maradéka 3-mal osztva 1,	1* pont	
így $(4^k - 1)$ osztható 3-mal.	1* pont	
$a_{k+1} - a_k = 3\cdot(4^k - 1)$ osztható 9-cel;	1* pont	
s mivel a_k is osztható 9-cel, ebből következik, hogy a_{k+1} is osztható 9-cel. Az állítást beláttuk.	1* pont	
Összesen:	**9 pont**	

*A *-gal jelölt 6 pont az alábbi gondolatmenetért is megkapható:*

$a_{k+1} = 4^{k+1} - 3(k+1) - 1 =$	1 pont	
$4\cdot(4^k - 3k - 1) + 9k$.	2 pont	
$4\cdot(4^k - 3k - 1)$ osztható 9-cel az indukciós feltevés miatt,	1 pont	
$9k$ is osztható 9-cel,	1 pont	
így az összegük is osztható 9-cel. Az állítást beláttuk.	1 pont	

8. c) második megoldás		
A binomiális tételt alkalmazzuk.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$(3+1)^n = 3^n + \binom{n}{1}\cdot 3^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot 3^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}\cdot 3^2 + \binom{n}{n-1}\cdot 3 + 1$.	2 pont	
Ha $n \geq 2$, akkor az utolsó két tag kivételével az összeg minden tagja osztható 9-cel	2* pont	
4^n maradéka 9-cel osztva ugyanannyi, mint $\binom{n}{n-1}\cdot 3+1 = \binom{n}{1}\cdot 3+1 = 3n+1$ maradéka,	2* pont	
így ebben az esetben $a_n = 4^n - 3n - 1$ osztható 9-cel.	1* pont	
Ha $n = 1$, akkor $a_1 = 4^1 - 3 - 1 = 0$ szintén osztható 9-cel. Az állítást beláttuk.	1* pont	
Összesen:	**9 pont**	

*A *-gal jelzett 6 pont az alábbi gondolatmenetért is megkapható:*

$\binom{n}{n-1}\cdot 3+1 = \binom{n}{1}\cdot 3+1 = 3n+1$,	1 pont	
így $a_n = 4^n - 3n - 1 = 3^n + \binom{n}{1}\cdot 3^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot 3^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}\cdot 3^2 + \binom{n}{n-1}\cdot 3 + 1 - 3n - 1 =$ $3^n + \binom{n}{1}\cdot 3^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot 3^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}\cdot 3^2$. $(n \geq 2)$	2 pont	
Az összeg minden tagja osztható 9-cel,	2 pont	
így a_n is osztható 9-cel. (Az oszthatóság $n = 1$-re is teljesül.) Az állítást beláttuk.	1 pont	

8. c) harmadik megoldás		
Esetszétválasztást végzünk n 3-mal való osztási maradéka alapján.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha $n = 3k$ alakú, akkor $a_n = 4^{3k} - 3\cdot 3k - 1 = (64^k - 1) - 9k$,	1 pont	
ami osztható 9-cel, hiszen 64^k 9-cel osztva 1 maradékot ad.	1 pont	
Ha $n = (3k+1)$ alakú, akkor $a_n = 4^{3k+1} - 3\cdot(3k+1) - 1 = 4\cdot 64^k - 9k - 4 =$ $4\cdot(64^k - 1) - 9k$,	1 pont	
ami az előzőek miatt szintén osztható 9-cel.	1 pont	

Ha $n = (3k + 2)$ alakú, akkor $a_n = 4^{3k+2} - 3\cdot(3k+2) - 1 = 16\cdot 64^k - 9k - 7 =$	1 pont	
$= 7\cdot(64^k - 1) + 9\cdot(64^k - k)$	1 pont	
ami az előzőek miatt szintén osztható 9-cel.	1 pont	
Ezzel az állítást (minden pozitív egész számra) igazoltuk.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

9. a)		
(Az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = \cos x$ függvénygörbék által közrefogott terület a kérdés; először a két metszéspontot határozzuk meg.) Ha $\sin x = \cos x$, akkor $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.	2 pont	*A 2 pont jár, ha a vizsgázó rögtön a [0; 2π] intervallum két alapmegoldását adja meg, periódus nélkül.*
$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, így $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.	1 pont	
(A görbék közötti területet a különbségfüggvény abszolútértékének az integrálja adja meg:) $T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \lvert f(x) - g(x)\rvert \,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x =$	2 pont	
$= \left[-\cos x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$	1 pont	
$= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right) =$	1 pont	
$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$ (területegység) az alakzat területe.	1 pont	
Háromszoros nagyítás során a terület kilencszeresére nő,	1 pont	
így a „csepp” logó területe $\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot 9 = \frac{36}{\sqrt{2}}\left(= 18\sqrt{2}\right) \approx 25{,}5$ (cm^2).	2 pont	*Mértékegység nélküli válasz 1 pontot ér.*
Összesen:	**11 pont**	

9. b) első megoldás		
Esetszétválasztást végzünk a szélső sárga sávok száma szerint.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha mindkét szélső sáv sárga, akkor a középső két sáv 4·4 (= 16)-féleképpen színezhető.	1 pont	
Ha csak a felső sáv sárga, akkor a színezési	1 pont	

lehetőségek száma $4^2 \cdot 3$ (= 48).		
Hasonlóan $4^2 \cdot 3$ (= 48) megfelelő színezés van, ha csak az alsó sáv sárga.	1 pont	
(Az összes színezési lehetőség számát a három eset összege adja,) $16 + 2 \cdot 48 = 112$ megfelelő színezés van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b) második megoldás		
Esetszétválasztást végzünk a felső sáv színe alapján.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha a felső sáv sárga, akkor a többi sáv tetszőleges színű lehet. Ilyen színezési lehetőségből 4^3 darab van.	1 pont	
Ha a felső sáv nem sárga, akkor az alsónak sárgának kell lennie. Így a megfelelő színezések száma $3 \cdot 4^2$.	1 pont	
A kedvező eseteket pontosan egyszer számoltuk, az összes színezési lehetőség számát a két eset összege adja.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Összesen $4^3 + 3 \cdot 4^2 = 112$ megfelelő színezés van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b) harmadik megoldás		
A komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az összes lehetséges színezés száma 4^4.	1 pont	
Nem megfelelőek azok a színezések, amelyeknél egyik szélső sáv sem sárga,	1 pont	
ezek száma $3 \cdot 4^2 \cdot 3$.	1 pont	
(Az összes színezés számát a két eset különbsége adja,) összesen tehát $4^4 - 3 \cdot 4^2 \cdot 3 = 7 \cdot 16 = 112$ megfelelő színezés van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b) negyedik megoldás		
(A szitaformulát alkalmazzuk.) Ha a felső sáv sárga (és a többi tetszőleges), akkor 4^3 számú színezési lehetőség van.	1 pont	
Hasonlóan 4^3 számú lehetőség van, ha az alsó sáv sárga (és a többi tetszőleges).	1 pont	
A kétszer számolt eseteket egyszer ki kell vonnunk,	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezek száma (amikor mindkét szélső sáv sárga) 4^2.	1 pont	
Összesen $2 \cdot 4^3 - 4^2 = 112$ megfelelő színezés van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	