Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
TÁMOP-3.1.1-11/1-2012-0001
XXI. századi közoktatás
(fejlesztés, koordináció) II. szakasz

MATEMATIKA

1. MINTAFELADATSOR

EMELT SZINT

2015

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc u. 6-8.
Telefon: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 235-7202
www.ofi.hu

1. a)		
A $2\cdot(2^x)^2-5\cdot2^x-3=0$ másodfokú egyenletből.	1 pont	
$2^x = 3$ vagy $2^x = –0,5$.	1 pont	
$x=\log_2 3$ (≈ 1,58),	1 pont	
$2^x = –0,5$ nem lehetséges, mert $2^x > 0$ minden x-re.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. b)		
Ha a dobott számok átlaga 3,6, akkor a számok összege 5·3,6 = 18.	1 pont	
Ha pontosan két darab 2-es dobás van, akkor a másik három dobás összege 14.	1 pont	
Ezt 2-esek nélkül, különböző számokból csak a 3, 5, 6 dobások állítják elő.	1 pont	
Ha pontosan három darab 2-es dobás van, akkor a másik két dobás összege 12. Egy lehetőség van: 6, 6.	1 pont	
Négy (vagy öt) 2-es dobás nem lehetséges, mert 4·2 = 8, így az ötödik dobásnak 10-nek kellene lennie.	1 pont	
A dobott számötösök tehát: (2, 2, 3, 5, 6), (2, 2, 2, 6, 6).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül ad meg jó eredményeket, akkor azokért 1-1 pontot kapjon.

2. a)		
Az első csapat t óra alatt $20t$ kilométert tesz meg, távolságuk a C ponttól $\lvert 50-20t \rvert$. A második csapat C ponttól vett távolsága hasonlóan írható fel: $\lvert 30-14t \rvert$.	1 pont	
A feltétel alapján megoldandó az $\lvert 50-20t \rvert = 2\cdot\lvert 30-14t \rvert$ egyenlet.	1 pont	
(Három esetet vizsgálunk t értéke és az abszolútértékek argumentumainak előjele alapján.) 1. eset: Ha $t \le \frac{15}{7}$, akkor $50-20t = 2\cdot(30-14t)$,	1 pont *	
innen $t = 1{,}25$ (óra).	1 pont *	
2. eset: Ha $\frac{15}{7} < t \le 2{,}5$, akkor $50 - 20t = 2\cdot(14t - 30)$,	1 pont *	
innen $t = \frac{55}{24} \approx 2{,}29$ (óra).	1 pont *	
3. eset: Ha $2{,}5 < t$, akkor $20t-50 = 2\cdot(14t-30)$,	1 pont *	
innen $t = 1{,}25$ (óra). Ez az érték nem felel meg a feltételnek, ekkor tehát nem kapunk megoldást.	1 pont*	
Ellenőrzés a szövegbe helyettesítéssel: – Ha $t = 1{,}25$, akkor az első csapat $20\cdot1{,}25 = 25$ km-t tett meg, távolságuk C-től $50 - 25 = 25$ (km). A második csapat $14\cdot1{,}25 = 17{,}5$ km-t tett meg, távolságuk C-től $30 - 17{,}5 = 12{,}5$ (km); s ez valóban fele az első csapat C-től vett távolságának. – Hasonlóan a másik értékre is.	1 pont	
Tehát 1,25 óra, illetve ≈ 2,29 óra múlva lesz az első csapat kétszer távolabb a C ponttól, mint a második.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

*A *-gal jelölt 6 pontot a vizsgázó az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja:*

A két argumentum előjele vagy megegyezik, vagy különbözik.	2 pont	*Ez a 2 pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első esetben $50-20t = 2\cdot(30-14t)$,	1 pont	
ennek megoldása $t = 1{,}25$ (óra).	1 pont	
A második esetben $50-20t = 2\cdot(14t-30)$,	1 pont	
innen $t = \frac{55}{24} \approx 2{,}29$ (óra).	1 pont	

2. b)		
Jelölje x az első csapat létszámát, ekkor a csapatban a szemüveges lányok száma $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}x=\frac{x}{10}$.	1 pont	
A második csoport létszáma $2x$, itt a szemüveges lányok száma $0{,}4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x=\frac{2x}{5}$.	1 pont	
A szemüveges lányok száma $\frac{x}{10}+\frac{2x}{5}=\frac{x}{2}$,	1 pont	
ami az összes túrázó $\frac{\frac{x}{2}}{x+2x}=\frac{1}{6}$ része.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. a)		
(A vektorok osztásarány-tételét alkalmazzuk, helyvektorokkal dolgozunk. A szokásos jelölésekkel $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$, $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$ stb.) $\underline{f}=\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2}=\frac{(-8;24)+(48;16)}{2}=(20;20)$.	1 pont	
$\underline{d}=\frac{3\underline{c}+\underline{f}}{4}=\frac{(20;20)}{4}=(5;5)$.	1 pont	
$\overrightarrow{AD}$ = $\underline{d}$ – $\underline{a}$ = (5; 5) – (–8; 24) = (13; –19).	1 pont	
$\overrightarrow{AF}$ = $\underline{f}$ – $\underline{a}$ = (20; 20) – (–8; 24) = (28; –4).	1 pont	
Jelölje φ a két vektor szögét. A skaláris szorzatot kétféleképpen felírva	1 pont *	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{13^2+(-19)^2}\cdot\sqrt{28^2+(-4)^2}\cdot\cos\varphi$	1 pont *	
= 13·28 + (–19)·(–4) = 440	1 pont *	
Innen cosφ = $\frac{440}{\sqrt{530}\cdot\sqrt{800}}$ ≈ 0,6757,	1 pont *	
φ ≈ 47,49°. (A két vektor szöge nem nagyobb, mint 180°.)	1 pont *	
Összesen:	**9 pont**	

*A *-gal jelölt 5 pontot a vizsgázó az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja:*

$\overrightarrow{DF} = \underline{f} - \underline{d}$ = (20; 20) – (5; 5) = (15; 15).	1 pont	
Az *ADF* háromszög oldalainak hossza $AD = \sqrt{13^2 + (-19)^2} = \sqrt{530}$, $AF = \sqrt{28^2 + (-4)^2} = \sqrt{800}$, $DF = \sqrt{15^2 + 15^2} = \sqrt{450}$.	1 pont	
Jelölje φ $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AF}$ szögét. Az *ADF* háromszögben felírjuk a koszinusztételt: $\cos\varphi = \frac{530 + 800 - 450}{2 \cdot \sqrt{530} \cdot \sqrt{800}}$,	1 pont	
innen $\cos\varphi \approx 0{,}6757$,	1 pont	
$\varphi \approx 47{,}49°$. (A két vektor szöge nem nagyobb, mint 180°.)	1 pont	

3. b) első megoldás		
Elegendő megmutatni, hogy $ACB\angle = 90°$. (A Thalész-tétel, illetve annak megfordítása miatt.)	1 pont	
$CA = \sqrt{(-8)^2 + 24^2} = \sqrt{640}$, $CB = \sqrt{48^2 + 16^2} = \sqrt{2560}$,	1 pont	
$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ = (48; 16) – (–8; 24) = (56; –8);	1 pont	
$AB = \sqrt{56^2 + (-8)^2} = \sqrt{3200}$.	1 pont	
Mivel $CA^2 + CB^2 = 640 + 2560 = 3200 = AB^2$, a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög valóban derékszögű.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó kerekített értékekkel számol, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

3. b) **második megoldás**		
Elegendő megmutatni, hogy pl. $\overrightarrow{CA}$ –90°-os elforgatottja párhuzamos $\overrightarrow{CB}$-vel.	1 pont	
($\overrightarrow{CA}$ –90°-os elforgatottja =) $\overrightarrow{CA}^{-90°}$ = (24; 8).	1 pont	
Mivel $\overrightarrow{CB}$ = (48; 16), így $\overrightarrow{CB} = 2 \cdot \overrightarrow{CA}^{-90°}$,	1 pont	
$\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{CA}^{-90°}$ párhuzamosak,	1 pont	
vagyis $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ valóban merőlegesek.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. b) **harmadik megoldás**		
$\overrightarrow{AB}$ = $\underline{b} - \underline{a}$ = (48; 16) – (–8; 24) = (56; –8);	1 pont	
$AB = \sqrt{56^2 + (-8)^2} = \sqrt{3200}$.	1 pont	
Az AB átmérőjű kör középpontja F(20; 20), sugara $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{3200}}{2} = \sqrt{800}$.	1 pont	
A kör egyenlete $(x - 20)^2 + (y - 20)^2 = 800$.	1 pont	
A C pont koordinátáit behelyettesítjük: $(0 - 20)^2 + (0 - 20)^2 = 800$, így C valóban a körön van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. b) **negyedik megoldás**		
Elegendő megmutatni, hogy $ACB\angle = 90°$ (a Thalész-tétel, illetve annak megfordítása miatt);	1 pont	
azaz elegendő igazolni, hogy $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ merőlegesek, vagyis skalárszorzatuk nulla.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\overrightarrow{CA} = \underline{a} = (-8;\ 24)$, $\overrightarrow{CB} = \underline{b} = (48;\ 16)$.	1 pont	
$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-8;\ 24)\cdot(48;\ 16) = -8\cdot 48 + 24\cdot 16 =$	1 pont	
$= 0$. A két vektor valóban merőleges.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. a) **első megoldás**		
Ha Attila csapattag, de Balázs nem, akkor $\binom{8}{5}$-féle csapatösszeállítás lehetséges. Ha Balázs csapattag, de Attila nem, akkor szintén $\binom{8}{5}$-féle csapatösszeállítás lehetséges.	1 pont	
Ha mindketten csapattagok, akkor a másik négy személy $\binom{8}{4}$-féleképpen választható ki.	1 pont	
Összesen tehát: $2\cdot\binom{8}{5}+\binom{8}{4} =$	1 pont	
$= 112 + 70 = 182$ -féleképpen alakítható ki a sakkcsapat.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. a) **második megoldás**		
Összesen $\binom{10}{6}$-féle csapatösszeállítás lehetséges.	1 pont	
Ebből nem megfelelőek azok, amelyekben sem Attila, sem Béla nem szerepel,	1 pont	
ezek száma $\binom{8}{6}$.	1 pont	
Összesen $\binom{10}{6}-\binom{8}{6}$ = 182-féleképpen alakítható ki a sakkcsapat.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. a) **harmadik megoldás**		
$\binom{9}{5}$ esetben csapattag Attila, és hasonlóan $\binom{9}{5}$ esetben csapattag Béla.	1 pont	
E két szám összegéből le kell vonni azoknak a kétszer számolt csapatösszeállításoknak a számát, amikor mindketten csapattagok.	1 pont	
Ezek száma $\binom{8}{4}$,	1 pont	
összesen tehát $2\cdot\binom{9}{5}-\binom{8}{4}$ = 182-féleképpen alakítható ki a sakkcsapat.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. b)		
Az I. esetben összesen $6\cdot5\cdot4$ ajándékkiosztási lehetőség van.	1 pont *	
Kati háromféle ajándékot nyerhet, és a másik két ajándékot $5\cdot4$-féleképpen nyerhetik meg a többiek.	1 pont *	
Így $3\cdot5\cdot4$-féleképpen sorsolhatják Katit.	1 pont *	
Kati $\frac{3\cdot5\cdot4}{6\cdot5\cdot4} = \frac{1}{2}$ eséllyel kap ajándékot az I. esetben.	1 pont *	
A II. esetben 6^3-féle kiosztás lehetséges.	1 pont	
Azon esetek száma, amikor Kati nem kap ajándékot 5^3.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $1-\frac{5^3}{6^3}=$	1 pont	
$=\frac{91}{216}$ ($\approx 0{,}42$).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

*A *-gal jelölt 4 pontot a vizsgázó az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja:*

Az I. esetben az ajándékok $6\cdot5\cdot4$-féleképpen oszthatók ki.	1 pont	
Ha Kati nem kap ajándékot, akkor $5\cdot4\cdot3$-féle kiosztás lehetséges;	1 pont	
így Kati $1-\frac{5\cdot4\cdot3}{6\cdot5\cdot4} = \frac{1}{2}$ eséllyel kap ajándékot az első esetben.	2 pont	

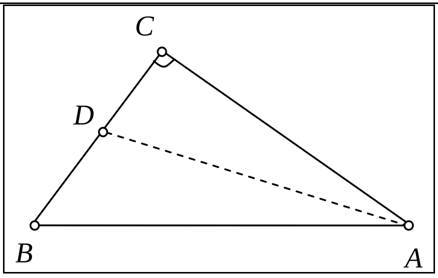
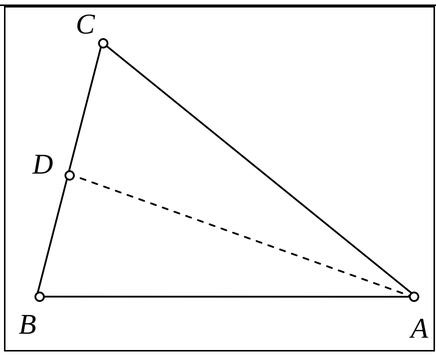
5. a) **első megoldás**		
A belső szögfelezőtétel miatt $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{42}{63}=\frac{2}{3}$.	1 pont	
Legyen $BD = 2x$, $DC = 3x$.	1 pont	
($BAC\angle = \alpha$. A BAD és DAC háromszögekben koszinusztétellel:) $\left.\begin{array}{l}(2x)^2=42^2+39^2-2\cdot 42\cdot 39\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\\(3x)^2=39^2+63^2-2\cdot 39\cdot 63\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\end{array}\right\}$,	2 pont	
azaz $\left.\begin{array}{l}4x^2=3285-3276\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\\9x^2=5490-4914\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\end{array}\right\}$.	1 pont	
(Az első egyenlet 9-szereséből kivonjuk a második egyenlet 4-szeresét:) $0=7605-9828\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.	1 pont *	
$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{7605}{9828}\left(=\frac{65}{84}\right)$	1 pont *	
$\frac{\alpha}{2}\approx 39{,}30°$, $\alpha\approx 78{,}61°$. ($0°<\frac{\alpha}{2}<90°$)	1 pont *	
Visszahelyettesítve $4x^2 = 750$, $x \approx 13{,}69$,	1 pont *	
$BC = 5x \approx 68{,}47$ (m), (a kívánt pontossággal tehát)a BC szakasz hossza 68 méter.	1 pont *	
Összesen:	**10 pont**	

*A *-gal jelölt 5 pontot a vizsgázó az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja:*

Mindkét egyenletből kifejezzük $\cos\frac{\alpha}{2}$ -t: $\frac{3285-4x^2}{3276}=\frac{5490-9x^2}{4914}$,	1 pont	
$x^2 = 187{,}5$, $x \approx 13{,}69$ (m).	1 pont	
$BC = 5x \approx 68{,}47$ (m), (a kívánt pontossággal tehát)a BC szakasz hossza 68 méter.	1 pont	
Az első egyenletből $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3285-4x^2}{3276}=\frac{3285-750}{3276}\left(=\frac{65}{84}\right)$.	1 pont	
Az egyenlet megoldása $\frac{\alpha}{2}\approx 39{,}30°$, $\alpha \approx 78{,}61°$. ($0°<\frac{\alpha}{2}<90°$)	1 pont	

5. a) **második megoldás**		
($BAC\angle = \alpha$.) $t_{ABC} = t_{ABD} + t_{ADC}$, így $\frac{AB\cdot AC\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{AB\cdot AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}+\frac{AD\cdot AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}$.	2 pont	*Ez a 2 pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\frac{42\cdot 63\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{42\cdot 39\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}+\frac{39\cdot 63\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\sin\alpha=\frac{65}{42}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.	1 pont	
Mivel $\sin\alpha = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$,	1 pont	
így $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{65}{84}$. ($\sin\frac{\alpha}{2}=0$ nem lehet.)	1 pont	
Az egyenlet megoldása: $\frac{\alpha}{2}\approx 39{,}30°$, $\alpha \approx 78{,}61°$. ($0°<\frac{\alpha}{2}<180°$)	1 pont	
Felírhatjuk a koszinusztételt: ($BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha$): $BC^2 = 42^2 + 63^2 - 2\cdot 42\cdot 63\cdot\cos 78{,}61°$.	2 pont	
$BC \approx 68{,}47$ (m);	1 pont	
(a kívánt kerekítéssel tehát) a BC szakasz hossza 68 méter.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

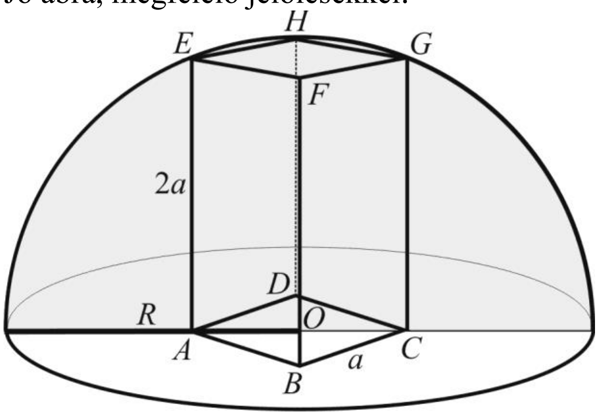
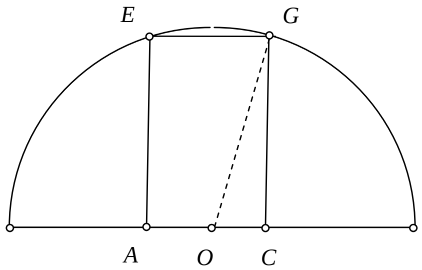
5. b)

Az *ABC* derékszögű háromszögben ($ACB\angle = 90°$) például az *AD* szögfelező hosszabb, mint *AC*, mert az *ACD* derékszögű háromszögben átfogó. Így a szögfelező lehet hosszabb az egyik közrefogó oldalnál.	2 pont	
Tetszőleges *ABC* háromszögben az *AD* szögfelező behúzásakor a *D* pontnál keletkező szögek közül nem lehet mindkettő hegyesszög.	1 pont	
Legyen pl. az *ADC* szög derékszög vagy tompaszög, ekkor az *ADC* háromszögben $AC > AD$,	1 pont	
mert nagyobb szöggel szemben fekvő oldal van.	1 pont	
Így Csillának van igaza.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. a)		
Jelölje a három számot $a - d$, a, $a + d$, ($a, d > 0$).	1 pont	
Ekkor $\left.\begin{aligned}(a+d)^3 + (a-d)^3 &= 1072,\\ (a+d)^2 - (a-d)^2 &= 32d.\end{aligned}\right\}$	2 pont	
Az első egyenletből $2a^3 + 6ad^2 = 1072$. ($a^3 + 3ad^2 = 536$)	1 pont	
A második egyenletből $4ad = 32d$,	1 pont	
így $a = 8$ ($d \neq 0$).	1 pont	
Ezt az első egyenletbe írva $512 + 24d^2 = 536$,	1 pont	
$d = 1$. ($d = -1$ nem lehetséges.)	1 pont	
A három szám 7, 8, 9.	1 pont	
Ellenőrzés: $7^3 + 9^3 = 1072$ és $9^2 - 7^2 = 32 \cdot 1$.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

6. b)		
A négy szám mediánja akkor lehet 5, ha a két középső szám 4 és 6, vagy 3 és 7, vagy 2 és 8.	2 pont	
Az első esetben 3, a másodikban 2, a harmadikban pedig 1-féle lehet a legkisebb szám (a legnagyobb adott).	2 pont	A lehetséges számnégyesek: 1, 4, 6, 9 2, 4, 6, 9 3, 4, 6, 9 2, 3, 5, 9 1, 3, 5, 9 1, 2, 6, 9
Ferinek összesen 6 lehetséges tippje van, melyekre egyenlő valószínűséggel gondolhatott Enikő.	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{1}{6}$.	1 pont	*Százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

7. a)

Jó ábra, megfelelő jelölésekkel: 	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó térhatású ábra nélkül jól dolgozik.*
Az ábra szerinti *ABCDEFGH* hasáb *ABCD* alaplapjának *O* középpontja egyúttal a félgömb középpontja is. Az *ACGE* sík átmegy a félgömb középpontján, így abból egy főkört metsz ki, és *ACGE* ebben a főkörben egy beírt téglalap. A főkör *OG* sugara egyúttal a félgömb sugara is.	1 pont	*Kevésbé részletezett indoklás is elfogadható.*
 (Jelölje a félgömb sugarát *R*, a hasáb alapélének hosszát *a*, ekkor az oldalél hossza 2*a*.) Az *ABCD* négyzet átlója $AC = \sqrt{2}a$ hosszú, *OC* hossza pedig $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.	1 pont	
Az *OCG* derékszögű háromszögben felírjuk Pitagorasz tételét:	1 pont	
$R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + (2a)^2 = \frac{9}{2}a^2$.	1 pont	
$a = \frac{\sqrt{2}}{3}R = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ (cm),	1 pont	
$b = 2a \approx 14{,}14$ (cm) a hasáb éleinek hossza.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. b)

A hasáb alapélének és oldalélének hossza (centiméterben mérve) *a*, illetve *b*. A hasáb felszíne $2a^2 + 4ab$,	1 pont	

<table>
<tr><td>térfogata a^2b.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>$2a^2 + 4ab = a^2b$,
$2a + 4b = ab$ (a és b egész számok, $a \neq 0$).</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Az egyenletet rendezzük és szorzattá alakítjuk:
$ab - 4b - 2a = 0$,
$b(a - 4) - 2(a - 4) = 8$,
$(a - 4)(b - 2) = 8$.</td><td>2 pont *</td><td></td></tr>
<tr><td>A tényezők 8 pozitív osztói,</td><td>1 pont *</td><td>Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>$a - 4$</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>$b - 2$</td><td>8</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>
így a lehetséges megoldások:
<table><tr><td>a</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>12</td></tr><tr><td>b</td><td>10</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td></tr></table>
(A tényezők nem lehetnek negatívok: $b - 2 = -1$ lehet csak, de ekkor $a - 4 = -8$ lenne.)</td><td>3 pont</td><td>3 megoldás esetén 2 pont,
2 megoldás esetén 1 pont jár.
Kettőnél kevesebb megoldás esetén nem jár pont.</td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>9 pont</td><td></td></tr>
</table>

*A *-gal jelölt 3 pontot a vizsgázó az alábbi gondolatmenetre is megkaphatja:*

Az egyenletből kifejezzük pl. a-t: $ab - 4b - 2a = 0$, $a(b - 2) = 4b$, $a = \frac{4b}{b-2} = 4 + \frac{8}{b-2}$.	2 pont	
$(b - 2)$ a 8 pozitív osztója,	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

8. a)		
I. miatt a két egyenes meredekségének szorzata –1. (Egyik egyenes sem párhuzamos a koordináta-tengelyekkel.)	1 pont	
I. és II. miatt $g(x) = mx + 3$,	1 pont	
$h(x) = -\frac{1}{m}x + 3$.	1 pont	
$(g \circ h)(x) = m \cdot \left(-\frac{1}{m}x + 3\right) + 3$	1 pont	
$= -x + 3m + 3$.	1 pont	
III.-ból $-x + 3m + 3 = 0$, ha $x = 9$;	1 pont	
$-9 + 3m + 3 = 0$, $m = 2$.	1 pont	
A g és h függvények hozzárendelési szabálya tehát: $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.	2 pont	
$f(x) = (2x+3)\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) = -x^2 + \frac{9}{2}x + 9$,	1 pont	
amivel igazoltuk az állítást.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

8. b)		
Az *f* függvény érintője meredekségének meghatározásához az *f* függvényt deriváljuk.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f\,'(x) = -2x + \frac{9}{2}$,	1 pont	
$f\,'(2) = \frac{1}{2}$ (a keresett érintő meredeksége).	1 pont	
$f(2) = 14$,	1 pont	
így az érintő egyenlete: $y - 14 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)$. (Vagy másik alakban: $y = \frac{1}{2}x + 13$.)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. a)		
(A két szomszédos pozitív egész szám legyen n és $n+1$.) Be kell látnunk, hogy $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$.	1 pont	
Közös nevezőre hozva $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$,	1 pont	
így az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. b) első megoldás		
A nevezők első tényezői olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja 10 és differenciája 2.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ezért a végtelen sor n-edik tagja $\frac{1}{(8+2n)\cdot(10+2n)}$ alakú.	1 pont	
Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
i) $n = 1$-re az állítás igaz: $S_1=\frac{1}{100+20}=\frac{1}{10\cdot 12}$	1 pont	
ii) Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, azaz $\frac{1}{10\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{(8+2k)\cdot(10+2k)}=\frac{k}{100+20k}$.	1 pont	
iii) Ekkor igazolandó, hogy az állítás $n = (k+1)$-re is igaz, azaz $\frac{1}{10\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{(8+2k)\cdot(10+2k)}+$ $+\frac{1}{(10+2k)\cdot(12+2k)}=\frac{k+1}{100+20(k+1)}$.	1 pont	
Az indukciós feltevést felhasználva a bal oldal $\frac{k}{100+20k}+\frac{1}{(10+2k)\cdot(12+2k)}=$ $=\frac{k(12+2k)+10}{(100+20k)(12+2k)}=\frac{k^2+6k+5}{20(5+k)(6+k)}$, igazolandó tehát a	2 pont	
$\frac{k^2+6k+5}{20\cdot(5+k)(6+k)}=\frac{k+1}{120+20k}=\frac{k+1}{20\cdot(6+k)}$ összefüggés.	1 pont	
A közös nevezővel szorozva a	1 pont	

$k^2+6k+5=(k+1)(k+5)$ azonosság adódik, így az állítást igazoltuk.		
Összesen:	**10 pont**	

9. b) második megoldás		
A nevezők első tényezői olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja 10 és differenciája 2.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ezért a végtelen sor n-edik tagja $\frac{1}{(8+2n)\cdot(10+2n)}$ alakú.	1 pont	
$\frac{1}{8+2n}-\frac{1}{10+2n}=\frac{10+2n-(8+2n)}{(8+2n)\cdot(10+2n)}=$ $\frac{2}{(8+2n)\cdot(10+2n)}$, így	2 pont	*Ez a 2 pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\frac{1}{(8+2n)\cdot(10+2n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8+2n}-\frac{1}{10+2n}\right)$.	1 pont	
$\frac{1}{10\cdot12}+\frac{1}{12\cdot14}+\frac{1}{14\cdot16}+\ldots+\frac{1}{(8+2n)\cdot(10+2n)}=$ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}+\ldots+\frac{1}{8+2n}-\frac{1}{10+2n}\right)$.	2 pont	
A közbülső tagok kiesnek, az első és utolsó tag nem.	1 pont	
$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{10+2n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2n}{10\cdot(10+2n)}\right)$,	1 pont	
$S_n=\frac{n}{100+20n}$. Az állítást igazoltuk.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

9. c)		
(A nevező legmagasabb kitevőjű változójával osztunk minden tagot:) $S_n=\frac{n}{100+20n}=\frac{1}{\frac{100}{n}+20}$.	1 pont	
Mivel $\frac{100}{n}$ nullához tart, (a határértékre vonatkozó műveleti szabályok miatt)	1 pont	
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{20}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	