MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI MINTAFELADATOK

A 2024. JANUÁR 1-TŐL BEVEZETÉSRE KERÜLŐ VIZSGAKÖVETELMÉNYEK SZERINT

MINTAFELADATOK:

I. rész

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{4}{x^2+2x}-\frac{2}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-2x}$, ahol $x \neq 0$, $x \neq -2$, $x \neq 2$ *(5 pont)*

b) $\left|4^x-7\cdot 2^x+2\right|=10$ *(8 pont)*

2. Egy strandon lévő úszómedence 50 méter hosszú, az egyik végén (a Start-oldalon) 130 centiméter, a másik végén 210 centiméter mély. A medence egyenletesen mélyül az egyik végétől a másikig. A „Vigyázat, mélyvíz!" felirat kihelyezéséhez a víz felett (az 50 méter hosszú oldalra merőlegesen) ki kell feszíteni egy kötelet ott, ahol a víz mélysége eléri a 180 centimétert.

a) A Start-oldaltól milyen messze kell kifeszíteni a feliratot tartó kötelet? *(6 pont)*

A strand büféjében az egyik üdítő 1,5 literes és 0,5 literes kiszerelésben is kapható. (A műanyag palackokat tekintsük geometriai értelemben hasonló hengereknek.)

b) Hány százalékkal nagyobb három kis palack felszínének összege, mint egy nagypalack felszíne? A választ egész számra kerekítve adja meg! *(6 pont)*

3. Egy egyetemi tanár az online vizsgáztatás idején a következő módszerrel választja ki a vizsgázó hallgató által „húzott" tételt a 10 tételből álló tételsorból. A hallgató mond egy egész számot 1-től 10-ig, a tanár ezt a számot megszorozza egy pozitív egyjegyű számmal (ezt nevezzük *kódszorzónak*), és az így kapott szorzathoz hozzáad egy másik pozitív egyjegyű számot (ez a *kódtöbblet*). Az összegnek veszi a 10-zel vett osztási maradékát, és az így kapott számhoz tartozó tételt kapja a hallgató a vizsgán. (A 0 osztási maradék jelenti a 10-es tételt.) A kódszorzót és a kódtöbbletet a hallgatók természetesen nem ismerik, ezek egy vizsganapon belül azonosak, de vizsganapról vizsganapra változnak.

Az egyik nap a kódszorzó 9, a kódtöbblet 7.

a) Ha Hajni ezen a napon a 4-es számot mondja, akkor melyik sorszámú tételt kapja? *(3 pont)*

b) Ha Balázs ugyanezen a napon a 9-es tételből felel, akkor melyik számot mondta? *(3 pont)*

Egy másik nap azt tudjuk, hogy aki az 5-ös számot mondta, az a 8-as tételt kapta, aki pedig a 2-es számot mondta, az a 7-es tételből felelt.

c) Melyik szám volt ezen a napon a kódszorzó, és melyik a kódtöbblet? *(8 pont)*

4. Adott az $A(5; 4)$ pont és a $3x + 4y = 6$ egyenletű f egyenes.

a) Adja meg a k paraméter értékét úgy, hogy az $y = kx + 4$ egyenletű h egyenes és az f egyenes merőleges legyen egymásra! *(3 pont)*

b) Mi a kölcsönös helyzete az A középpontú, 5 egység sugarú körnek és az f egyenesnek? *(5 pont)*

A g egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra és az f egyenest egy olyan pontban metszi, melynek két koordinátája egymás ellentettje.

c) Írja fel a g egyenes egyenletét! *(4 pont)*

II. rész

Az 5., 6., 7., 8. és 9. feladatok közül közül csak négyet kell megoldani.

5. Egy kutatás során három mozifilm (jelölje ezeket **A**, **B** és **C**) esetén feljegyezték 40-40 véletlenszerűen kiválasztott néző életkorát, és a kapott adatokat egy dobozdiagramon (box-plot) ábrázolták.

a) Adja meg az alábbi – a kutatásban részt vevő személyekre vonatkozó – állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja! *(6 pont)*

1. *Az* **A** *jelű filmet megnézők között a legfeljebb 16 évesek kevesebben voltak, mint a* **B** *jelű filmet megnézők között a legalább 16 évesek.*
2. *A* **C** *jelű filmet megnézők közül 30-an legalább 20 évesek voltak.*
3. *A* **B** *jelű filmet megnézők életkorának terjedelme kisebb, mint az* **A**, *illetve a* **C** *filmet megnézők életkorának terjedelme.*

Három kosárban összesen 57 alma van. Kezdetben az egyes kosarakban lévő almák száma egy számtani sorozat három egymást követő tagját alkotja. Abból a kosárból, amelyikben a második legtöbb gyümölcs van, egyet átteszünk abba, amelyikben a legtöbb van. Ezután az egyes kosarakban lévő almák száma egy mértani sorozat három egymást követő tagját alkotja.

b) Hány alma van kezdetben az egyes kosarakban külön-külön? *(10 pont)*

6. Adott a valós számok halmazán értelmezett *f*: $x \mapsto 3 - 6 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ függvény.

a) Mennyi az *f* függvény (legkisebb pozitív) periódusa? *(2 pont)*

b) Igazolja, hogy az *f* függvény páros! *(2 pont)*

c) Adja meg az *f* függvény zérushelyeit! *(6 pont)*

Érintőt húzunk az *f* függvény grafikonjának abba a pontjába, melynek első koordinátája π.

d) Írja fel az érintő egyenesének egyenletét! *(6 pont)*

7. Képzeljük el, hogy egy nagy lapra leírtuk az összes olyan különböző számjegyekből álló háromjegyű pozitív egész számot, melyben nem szerepel a 0 számjegy.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk közülük egy számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a választott szám osztható 3-mal? *(8 pont)*

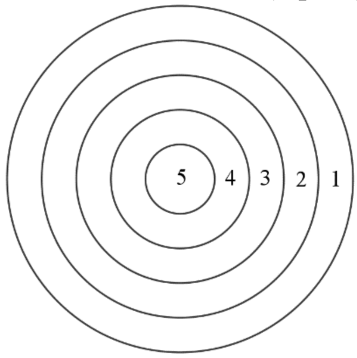
A lapon két számot akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha pontosan két azonos számjegy van bennük. (Pl. a 536-ot és a 315-öt összekötjük, de a 718-at és a 615-öt közvetlenül nem, illetve a 842-t és a 284-et sem.) Így egy gráfot kapunk.

b) Határozza meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis). Állítását indokolja! *(3 pont)*

A kapott gráf összefüggő.

c) Hány éle van ennek a gráfnak? *(5 pont)*

8. Egy céltábla kör alakú, melynek átmérője 50 cm. A legbelső, 5 pontot érő kör sugara 5 cm, a többi, 4, 3, illetve 2 pontot érő, körgyűrű alakú tartományt határoló körök sugara rendre 10 cm, 15 cm és 20 cm. A külső körgyűrű eltalálása 1 pontot ér.



a) Számítsa ki a 2 pontot érő körgyűrű területét! *(2 pont)*

b) A céltábla öt tartományát három színnel szeretnék kiszínezni úgy, hogy szomszédos tartományok ne legyenek azonos színűek, és mind a három színt felhasználják. Hányféleképpen színezhető ki a céltábla a feltételeknek megfelelően? *(4 pont)*

Dóri mindig eltalálja a céltáblát. Annak a valószínűsége, hogy a céltáblának egy megadott részét eltalálja, egyenesen arányos az adott rész területének nagyságával.

c) Igazolja, hogy annak a valószínűsége, hogy Dóri 1, 2, 3, 4, illetve 5 pontot ér el egy lövésből, rendre 9/25, 7/25, 5/25, 3/25, illetve 1/25. *(4 pont)*

d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy Dóri két egymást követő lövésből összesen legalább 9 pontot ér el! *(3 pont)*

e) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy Dóri 10 egymást követő lövésből legfeljebb egyszer találja el a legbelső, 5 pontot érő kört! *(3 pont)*

9.

a) Oldja meg az $(x + 4)(x + 2)(x - 2) \geq 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
(5 pont)

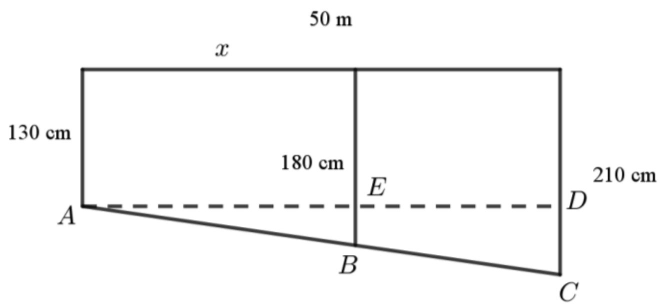
b) Határozza meg, milyen x érték esetén van az $f(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 2)$ függvénynek helyi minimuma, illetve helyi maximuma a $]-5; 5[$ intervallumon!
(6 pont)

c) Vegyük a $g(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ függvény értékeit, ha $x = -100, -99, -98, \ldots -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 100$. Hány esetben kapunk (pozitív) prímszámot? *(5 pont)*

MEGOLDÁSOK:

1. a)		
$\frac{4}{x(x+2)} - \frac{2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x(x-2)}$	2 pont	
$4(x-2) - 2x = x + 2$	1 pont	
$x = 10$	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. b)		
Két esetet kell vizsgálnunk: $4^x - 7 \cdot 2^x + 2 = 10$ vagy $4^x - 7 \cdot 2^x + 2 = -10$.	1 pont	
Az első esetben kapott, 2^x-re nézve másodfokú egyenlet gyökei 8 és –1.	1 pont	
Ebből $x = 3$, mivel $2^x > 0$.	2 pont	
A második esetben kapott, 2^x-re nézve másodfokú egyenlet gyökei 4 és 3.	1 pont	
Ebből $x = 2$, vagy $x = \log_2 3$.	2 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

2. a)		
Megfelelő ábra, a kérdéses szakasz hosszát (méterben számolva) jelölje x. 	1 pont	
Az ábrán látható AEB és ADC háromszögek hasonlók (két-két szögük egyenlő),	1 pont	
továbbá $EB = 180 - 130 = 50$ (cm) és $DC = 210 - 130 = 80$ (cm).	2 pont	
A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, így $\frac{x}{50} = \frac{50}{80}$,	1 pont	
amiből $x = 31{,}25$ méter.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. b)		
A két hasonló test térfogatának aránya 1: 3, azaz kb. 0,333	1 pont	
így a hasonlóság aránya ennek köbgyöke, azaz kb. 0,693.	2 pont	
A két felszín aránya a hasonlóság arányának négyzete, azaz kb. 0,481,	1 pont	
így három kis palack (együttes) felszínének és egy nagy palack felszínének aránya kb. 1,44.	1 pont	
A három kispalack felszíne kb. 44%-kal nagyobb, mint egy nagypalack felszíne.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

3. a)		
$9 \cdot 4 + 7 = 43$,	2 pont	
azaz Hajni a 3-as tételt kapja.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. b)		
Ha Balázs a 9-es tételből felel, akkor a mondott szám 9-szerese 9 – 7 = 2-re végződik.	1 pont	
Az egyetlen 10-nél nem nagyobb szám, aminek a 9-szerese 2-re végződik a 8, tehát Balázs a 8-as számot mondta.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. c)		
(A kódszorzót jelöljük a-val, a kódtöbbletet b-vel.) A feladat szövege alapján $5a + b$ 8-ra végződik, $2a + b$ pedig 7-re.	2 pont	
Az első megállapításból következik, hogy $b = 3$ vagy $b = 8$.	1 pont	
Ha $b = 8$ lenne, akkor $2a + b$ nem végződhetne 7-re, tehát $b = 3$,	1 pont	
és ekkor a páratlan.	1 pont	
Ha $b = 3$, akkor $2a$ 4-re végződik,	1 pont	
tehát $a = 2$ vagy $a = 7$,	1 pont	
de ebből csak $a = 7$ a megoldás.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

4. a)		
Az f egyenes meredeksége $-\frac{3}{4}$,	1 pont	
Így a rá merőleges h egyenes meredeksége $k = \frac{4}{3}$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. b)		
A kör egyenlete: $(x-5)^2+(y-4)^2=25$.	1 pont	
A kör egyenletéből és az f egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása: $x = 2$ és $y = 0$.	2 pont	
Mivel a körnek és az egyenesnek egy közös pontja van, így az egyenes érinti a kört.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó kiszámolja, hogy az A pont és az f egyenes távolsága éppen akkora, mint a megadott kör sugara, és ez alapján helyesen válaszol, akkor a teljes pontszám jár.

4. c)		
Az f egyenes kérdéses pontjára $3x + 4(-x) = 6$.	1 pont	
$x = -6$, azaz a g egyenes másik pontja a $(-6; 6)$ pont.	1 pont	
A g egyenes egyenlete: $2x + 11y = 54$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. a)		
Az 1. állítás hamis, mert az **A** jelű filmet megnézők között legalább 20-an legfeljebb 16 évesek, a **B** jelű filmet megnézők között pedig 10-nél kevesebb a legalább 16 évesek száma.	2 pont	
A 2. állítás igaz, mert a **C** jelű filmnél az alsó kvartilis 20 év, vagyis legfeljebb 10 fő fiatalabb ennél az életkornál.	2 pont	
A 3. állítás igaz, mert a **B** jelű filmet megnézők életkorának terjedelme (44 – 6 =) 38, és ez az adat az **A** jelű filmnél 43, a **C** jelűnél pedig 42.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. b)		
A „középső” kosárban 19 alma van, a másik kettőben $19 - d$ és $19 + d$, ahol $d > 0$.	2 pont	
Az áttevés után: $19 - d$, 18, $20 + d$.	1 pont	
A feladat szövege alapján $18^2=(19-d)(20+d)$.	1 pont	
$324=380-20d+19d-d^2$	1 pont	
Ebből $d = 7$ vagy $d = -8$.	2 pont	
A -8 nem felel meg a feltételeknek.	1 pont	
Ha $d = 7$, akkor kezdetben 12, 19 és 26 alma volt a kosarakban,	1 pont	
az áttevés után pedig 12, 18 és 27, és ez a három szám valóban egy mértani sorozat három egymást követő tagja.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

6. a)		
Az f periódusa 4π.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6. b)		
A koszinusz függvény páros, ezért $f(-x) = 3 - 6 \cdot \cos\left(-\frac{1}{2}x\right) = 3 - 6 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = f(x)$ valóban.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

Megjegyzés: A vizsgázó hivatkozhat arra is, hogy a páros koszinusz függvényből az f függvényt olyan transzformációkon keresztül kapjuk, melyek nem befolyásolják annak szimmetriáját az y tengelyre.

6. c)		
Megoldandó a $3 - 6 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$ egyenlet.	1 pont	
$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$	1 pont	
$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$	2 pont	
$x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 4l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. d)		
Az érintő meredekségét az f első deriváltja segítségével határozzuk meg: $f'\colon x \mapsto \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.	2 pont	
Ebből az érintő meredeksége (ha $x = \pi$) 3.	1 pont	
Az érintési pont: $E(\pi; 3)$.	1 pont	
Az érintő egyenlete: $y - 3 = 3(x - \pi)$, azaz $y = 3x - 3\pi + 3$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. a)		
Összesen $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ ilyen szám van (összes eset száma).	2 pont	
(A 3-mal való oszthatóságot a számjegyek összege adja meg. Vizsgáljuk a számjegyek 3-as maradékát!) 0 maradék: 3, 6, 9; 1 maradék: 1, 4, 7; 2 maradék: 2, 5, 8	1 pont	
Ha a választott szám osztható 3-mal, akkor vagy mindhárom számjegy azonos maradékot ad 3-mal osztva, vagy mindhárom különbözőt.	1 pont	
Azonos maradékú számokat a sorrendjük figyelembevételével $3 \cdot 3! = 18$-féleképpen,	1 pont	
különböző maradékú számokat a sorrendjük figyelembevételével $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3! = 162$-féleképpen választhatunk. A kedvező esetek száma tehát 180.	2 pont	
A keresett valószínűség $\frac{180}{504} \approx 0{,}357$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

0 maradék	1 maradék	2 maradék
3, 6, 9	1, 4, 7	2, 5, 8

7. b)		
Az állítás igaz.	1 pont	
Bármely két háromjegyű számhoz találhatunk (legfeljebb) két olyan „híd”-számot, melyeken keresztül össze vannak kötve: az *abc* és *cab* számokhoz az *abd*; az *abc* és *ade* számokhoz az *abd*; az *abc* és *def* számokhoz megfelelő az *abd* és az *ade* (ahol a különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek).	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. c)		
Az *abc* számot azokkal a számokkal kötjük össze, melynek két számjegye megegyezik *abc* valamelyik két számjegyével (*a*-*b*, *a*-*c*, *b*-*c*), és a harmadik számjegy különbözik ettől a két jegytől és a harmadik jegytől is.	1 pont	
A két megegyező számjegyet 3-féleképpen választhatjuk, a különböző számjegy 6-féle lehet,	1 pont	
és a számjegyek sorrendje 6-féle lehet,	1 pont	
így ez $3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$ él behúzását jelenti minden szám esetén.	1 pont	
Mivel minden élt mindkét végpontjában lévő szám esetén számolunk, így összesen $504 \cdot 108 : 2 =$ $= 27\,216$ éle van a gráfnak.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. a)		
$T = 20^2\pi - 15^2\pi = 175\pi \approx 550\ \text{cm}^2$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8. b)		
Ha nem vesszük figyelembe azt a követelményt, hogy mindhárom színt fel kell használni, akkor $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ lehetőség van.	2 pont	
Ebből csak két színt használ $3 \cdot 2 = 6$ színezés,	1 pont	
tehát 42, a feltételeknek megfelelő színezés van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. c)		
Az öt kör hasonló egymáshoz, sugaruk aránya 1 : 2 : 3 : 4 : 5, így területük aránya 1 : 4 : 9 : 16 : 25.	2 pont	
Az 5, 4, 3, 2, 1 pontot érő tartományok területének aránya így 1 : 3 : 5 : 7 : 9.	1 pont	
Ez a feltételek szerint egyben az egyes tartományok eltalálása valószínűségeinek aránya is, melyek így valóban a megadott értékekkel egyenlők.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. d)		
Három esetben ér el legalább 9 pontot, ha a lövései: 4-5, 5-4 vagy 5-5, ezek valószínűsége rendre $\frac{3}{25}\cdot\frac{1}{25}$, $\frac{1}{25}\cdot\frac{3}{25}$, illetve $\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{25}$.	2 pont	
A keresett valószínűség ezek összege, azaz $\frac{7}{625} = 0{,}0112$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. e)		
Binomiális eloszlással számolva $P(\text{legfeljebb } 1) = P(0) + P(1) =$	1 pont	
$= \left(\frac{24}{25}\right)^{10} + \binom{10}{1}\cdot\frac{1}{25}\cdot\left(\frac{24}{25}\right)^{9} \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}6648 + 0{,}2770 = 0{,}9418$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. a)		
Ha $x < -4$, akkor mindhárom tényező negatív, így a szorzatuk negatív, ami nem megfelelő.	1 pont	
Ha $-4 \le x < -2$, akkor az első tényező nemnegatív, a másik két tényező negatív, így a szorzatuk nemnegatív, ami megfelelő.	1 pont	
Ha $-2 \le x < 2$, akkor az első tényező pozitív, a második nemnegatív, a harmadik pedig negatív, így a szorzatuk lehet nulla (ha $x = -2$), ami megfelelő, vagy negatív, ami nem megfelelő.	1 pont	
Ha $2 \le x$, akkor a harmadik tényező nulla, vagy pozitív, a többi tényező pozitív, így a szorzatuk nulla, vagy pozitív, ami megfelelő.	1 pont	
Tehát $-4 \le x \le -2$, vagy $2 \le x$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b)		
$f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$	1 pont	
$f'(x) = 3x^2 + 8x - 4$	1 pont	
A (nyílt intervallumon értelmezett, folytonos) függvénynek helyi szélsőértéke ott lehet csak, ahol a függvény deriváltja nulla.	1 pont	
$x_1 = \frac{-8+\sqrt{112}}{6}\ \left(= \frac{-4+\sqrt{28}}{3}\right) \approx 0{,}43$ $x_2 = \frac{-8-\sqrt{112}}{6}\ \left(= \frac{-4-\sqrt{28}}{3}\right) \approx -3{,}1$ (Mindkét szám eleme az értelmezési tartománynak.)	1 pont	
Mivel a deriváltfüggvény pozitív főegyütthatójú másodfokú függvény, így $x_2 = \frac{-8-\sqrt{112}}{6}$ esetén pozitív értékből lesz negatív, így ott a függvénynek helyi maximuma van,	1 pont	
míg $x_1 = \frac{-8+\sqrt{112}}{6}$ esetén negatív értékből lesz pozitív, így ott a függvénynek helyi minimuma van.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. c)		
$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = (x + 4)(x + 2)(x - 2)$	1 pont	
A tényezők különböző egész számok. Ez a háromtényezős szorzat pontosan akkor lehet prímszám, ha az egyik tényező -1, egy másik 1, a harmadik pedig egy prímszám ellentettje.	1 pont	
(-1 és 1 különbsége 2, így) $x + 4 = 1$ és $x + 2 = -1$ lehet csak, ahonnan $x = -3$.	1 pont	
Ekkor a harmadik tényező -5, a függvény értéke 5, ami prímszám.	1 pont	
A függvényértékek között egyetlen prímszám van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	